Ασκήσεις: Ροπές, Ροπογεννήτρια, Πιθανογεννήτρια και Χαρακτηριστικές Συναρτήσεις

Στατιστική ΙΙ — Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης, ΟΠΑ
Διάλεξη 4

1 Αρχικές Ροπές (μ'_r)

Παράδειγμα 1: Αρχικές ροπές διακριτής τ.μ.

Η τριμηνιαία απόδοση X (σε %) ενός ομολόγου παίρνει τις τιμές:

x_i	-1	0	2	5
$P(X = x_i)$	0,15	0,35	0,30	0,20

(α′) Να υπολογιστούν οι αρχικές ροπές μ'_1, μ'_2, μ'_3.

(β′) Να υπολογιστεί η διακύμανση μέσω των αρχικών ροπών.

Λύση

(α) Εφαρμόζουμε τον ορισμό $\mu'_r = \mathbb{E}[X^r] = \sum_i x_i^r \, P(X = x_i)$.

Πρώτη ροπή ($r = 1$):

$$\mu'_1 = \mathbb{E}[X] = (-1)(0{,}15) + (0)(0{,}35) + (2)(0{,}30) + (5)(0{,}20) = -0{,}15 + 0 + 0{,}60 + 1{,}00 = 1{,}45.$$

Δεύτερη ροπή ($r = 2$):

$$\mu'_2 = \mathbb{E}[X^2] = (-1)^2(0{,}15) + (0)^2(0{,}35) + (2)^2(0{,}30) + (5)^2(0{,}20) = 0{,}15 + 0 + 1{,}20 + 5{,}00 = 6{,}35.$$

Τρίτη ροπή ($r = 3$):

$$\mu'_3 = \mathbb{E}[X^3] = (-1)^3(0{,}15) + (0)^3(0{,}35) + (2)^3(0{,}30) + (5)^3(0{,}20) = -0{,}15 + 0 + 2{,}40 + 25{,}00 = 27{,}25.$$

(β) Η διακύμανση μέσω αρχικών ροπών:

$$\text{Var}(X) = \mu'_2 - (\mu'_1)^2 = 6{,}35 - (1{,}45)^2 = 6{,}35 - 2{,}1025 = 4{,}2475.$$

2 Ροπογεννήτρια Συνάρτηση (MGF) — Διακριτή Τ.Μ.

Παράδειγμα 2: MGF διακριτής τ.μ.

Η εβδομαδιαία ζήτηση X ενός προϊόντος σε ένα κατάστημα παίρνει τιμές στο $\{0, 1, 2\}$ με πιθανότητες:

$$P(X = 0) = 0{,}2, \quad P(X = 1) = 0{,}5, \quad P(X = 2) = 0{,}3.$$

(α′) Να βρεθεί η ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_X(t)$.

(β′) Χρησιμοποιώντας την $M_X(t)$, να υπολογιστούν η $\mathbb{E}[X]$ και η $\text{Var}(X)$.

Λύση

(α) Από τον ορισμό:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{2} e^{tx}\, P(X = x) = 0{,}2\, e^0 + 0{,}5\, e^t + 0{,}3\, e^{2t} = 0{,}2 + 0{,}5\, e^t + 0{,}3\, e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(β) Υπολογίζουμε τις παραγώγους:

$$M'_X(t) = 0{,}5\, e^t + 0{,}6\, e^{2t}, \qquad M''_X(t) = 0{,}5\, e^t + 1{,}2\, e^{2t}.$$

Μέση τιμή:

$$\mathbb{E}[X] = M'_X(0) = 0{,}5 + 0{,}6 = 1{,}1.$$

Δεύτερη ροπή:

$$\mathbb{E}[X^2] = M''_X(0) = 0{,}5 + 1{,}2 = 1{,}7.$$

Διακύμανση:

$$\text{Var}(X) = 1{,}7 - (1{,}1)^2 = 1{,}7 - 1{,}21 = 0{,}49.$$

3 Ροπογεννήτρια Συνεχούς Τ.Μ.

Παράδειγμα 3: MGF συνεχούς τ.μ.

Ο χρόνος εξυπηρέτησης X (σε λεπτά) σε ένα τραπεζικό κατάστημα ακολουθεί κατανομή με σ.π.π.

$$f_X(x) = 2e^{-2x}, \quad x > 0.$$

(α′) Να βρεθεί η ροπογεννήτρια $M_X(t)$ και να προσδιοριστεί το πεδίο ύπαρξής της.

(β′) Μέσω της $M_X(t)$ να υπολογιστούν η $\mathbb{E}[X]$ και η $\text{Var}(X)$.

(γ′) Να αναγνωριστεί η κατανομή βάσει της μορφής της $M_X(t)$.

Λύση

(α)

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \cdot 2e^{-2x}\, dx = 2\int_0^\infty e^{-(2-t)x}\, dx = 2 \cdot \frac{1}{2-t} = \frac{2}{2-t}, \quad t < 2.$$

Η σύγκλιση απαιτεί $2 - t > 0$, δηλαδή $t < 2$.

(β)

$$M'_X(t) = \frac{2}{(2-t)^2}, \qquad M''_X(t) = \frac{4}{(2-t)^3}.$$

$$\mathbb{E}[X] = M'_X(0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{E}[X^2] = M''_X(0) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

(γ) Η ροπογεννήτρια $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$ με $\lambda = 2$ είναι η ροπογεννήτρια της εκθετικής κατανομής Exp(λ). Άρα $X \sim$ Exp(2), που επιβεβαιώνεται από τα $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda = 1/2$ και Var$(X) = 1/\lambda^2 = 1/4$.

4 Γραμμικός Μετασχηματισμός της MGF

Παράδειγμα 4: $Y = \alpha + \beta X$

Η μηνιαία απόδοση X μιας μετοχής (σε %) ακολουθεί κατανομή με ροπογεννήτρια:

$$M_X(t) = e^{3t + 2t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ένας αναλυτής μετατρέπει την απόδοση σε ετήσια βάση ως $Y = 5 + 12X$.

(α′) Να βρεθεί η $M_Y(t)$.

(β′) Να υπολογιστούν η $\mathbb{E}[Y]$ και η Var(Y) μέσω της $M_Y(t)$.

Λύση

(α) Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα: αν $Y = \alpha + \beta X$, τότε

$$M_Y(t) = e^{\alpha t}\, M_X(\beta t).$$

Με $\alpha = 5$, $\beta = 12$:

$$M_Y(t) = e^{5t} \cdot M_X(12t) = e^{5t} \cdot e^{3(12t)+2(12t)^2} = e^{5t} \cdot e^{36t+288t^2} = e^{41t+288t^2}.$$

(β) Παραγωγίζουμε:

$$M_Y'(t) = (41 + 576t)\, e^{41t+288t^2}, \quad M_Y''(t) = \left[576 + (41 + 576t)^2\right] e^{41t+288t^2}.$$

$$\mathbb{E}[Y] = M_Y'(0) = 41, \qquad \mathbb{E}[Y^2] = M_Y''(0) = 576 + 1681 = 2257.$$

$$\text{Var}(Y) = 2257 - 41^2 = 2257 - 1681 = 576.$$

Παρατήρηση

Μπορούμε να ελέγξουμε αυτά τα αποτελέσματα χωρίς MGF: αφού $M_X(t) = e^{3t+2t^2}$ αναγνωρίζεται ως η MGF κανονικής κατανομής $X \sim N(3, 4)$, έχουμε $\mathbb{E}[X] = 3$, $\text{Var}(X) = 4$ και:

$$\mathbb{E}[Y] = 5 + 12 \cdot 3 = 41, \quad \text{Var}(Y) = 12^2 \cdot 4 = 576. \checkmark$$

5 Κεντρικές Ροπές και Σχέση με Αρχικές

Παράδειγμα 5: Κεντρικές ροπές 3ης και 4ης τάξης

Η μηνιαία μεταβολή X (σε μονάδες) του δείκτη τιμών καταναλωτή ακολουθεί κατανομή με αρχικές ροπές:

$$\mu_1' = 2, \quad \mu_2' = 6, \quad \mu_3' = 20, \quad \mu_4' = 80.$$

(α′) Να υπολογιστούν οι κεντρικές ροπές μ_2, μ_3, μ_4.

(β′) Να υπολογιστεί ο συντελεστής ασυμμετρίας $\gamma_3 = \mu_3/\sigma^3$.

(γ′) Να υπολογιστεί ο συντελεστής κύρτωσης $\gamma_4 = \mu_4/\sigma^4$.

Λύση

Χρησιμοποιούμε τη γενική σχέση: $\mu_r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}(-\mu)^k \, \mu'_{r-k}$, με $\mu = \mu'_1 = 2$.

(α)

$$\mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2 = 6 - 4 = 2.$$

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu\,\mu'_2 + 2\mu^3 = 20 - 3(2)(6) + 2(8) = 20 - 36 + 16 = 0.$$

$$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu\,\mu'_3 + 6\mu^2\,\mu'_2 - 3\mu^4 = 80 - 4(2)(20) + 6(4)(6) - 3(16) = 80 - 160 + 144 - 48 = 16.$$

(β) Η τυπική απόκλιση: $\sigma = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{2}$. Άρα $\sigma^3 = 2\sqrt{2}$.

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{0}{2\sqrt{2}} = 0.$$

Η κατανομή είναι **συμμετρική** (ως προς τον γ_3).

(γ) $\sigma^4 = (\mu_2)^2 = 4$.

$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{16}{4} = 4.$$

Αφού $\gamma_4 = 4 > 3$ (λεπτοκυρτική κατανομή): πιο «βαριές ουρές» από τη κανονική κατανομή — σημαντικό για τη διαχείριση χρηματοοικονομικού κινδύνου.

6 Ανισότητα Markov

Παράδειγμα 6: Εφαρμογή ανισότητας Markov

Το μηνιαίο κόστος συντήρησης X (σε χιλ. €) μιας βιομηχανικής μονάδας είναι μη-αρνητική τ.μ. με $\mathbb{E}[X] = 4$.

(α′) Να βρεθεί ένα άνω φράγμα για την $P(X \geq 10)$.

(β′) Να βρεθεί ένα άνω φράγμα για την $P(X \geq 20)$.

(γ′) Αν ο προϋπολογισμός είναι c χιλ. € και η εταιρεία θέλει $P(X \geq c) \leq 0{,}05$, ποιο είναι το ελάχιστο c;

Λύση

Η ανισότητα Markov δηλώνει: αν $X \geq 0$ και $c > 0$, τότε $P(X \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{c}$.

(α) $P(X \geq 10) \leq \frac{4}{10} = 0{,}40$.

(β) $P(X \geq 20) \leq \frac{4}{20} = 0{,}20$.

(γ) Θέλουμε $\frac{4}{c} \leq 0{,}05$, δηλαδή $c \geq \frac{4}{0{,}05} = 80$.
Ο ελάχιστος προϋπολογισμός βάσει Markov είναι $c = 80$ χιλ. €.

Παρατήρηση

Η ανισότητα Markov δίνει *χαλαρά* φράγματα, αφού χρησιμοποιεί μόνο τη μέση τιμή. Στην πράξη, αν γνωρίζουμε και τη διακύμανση, η ανισότητα Chebyshev δίνει ακριβέστερα αποτελέσματα.

7 Ανισότητα Chebyshev

Παράδειγμα 7: Εφαρμογή ανισότητας Chebyshev

Οι ημερήσιες πωλήσεις X ενός ηλεκτρονικού καταστήματος (σε χιλ. €) έχουν $\mathbb{E}[X] = 50$ και $\sigma_X = 8$.

(α′) Να βρεθεί ένα άνω φράγμα για $P(|X - 50| \geq 20)$.

(β′) Να βρεθεί ένα κάτω φράγμα για $P(30 < X < 70)$.

(γ′) Πόσες τυπικές αποκλίσεις από τη μέση τιμή πρέπει να απέχουμε ώστε η πιθανότητα να είναι τουλάχιστον $0{,}95$;

Λύση

Η ανισότητα Chebyshev: $P(|X - \mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$.

(α) Με $\mu = 50$, $\sigma^2 = 64$, $c = 20$:

$$P(|X - 50| \geq 20) \leq \frac{64}{400} = 0{,}16.$$

(β) Χρησιμοποιούμε τη συμπληρωματική μορφή:

$$P(|X - 50| < 20) \geq 1 - \frac{64}{400} = 1 - 0{,}16 = 0{,}84.$$

Δηλαδή $P(30 < X < 70) \geq 0{,}84$.

(γ) Θέτουμε $c = k\sigma$ στη συμπληρωματική μορφή:

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Θέλουμε $1 - \frac{1}{k^2} \geq 0{,}95$, δηλαδή $k^2 \geq 20$, δηλαδή:

$$k \geq \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47.$$

Χρειαζόμαστε τουλάχιστον $k \approx 4{,}47$ τυπικές αποκλίσεις.

8 Ροπογεννήτρια Bernoulli

Παράδειγμα 8: MGF Bernoulli και εύρεση ροπών

Σε μια αγορά, κάθε πελάτης αγοράζει ένα συγκεκριμένο προϊόν με πιθανότητα $p = 0{,}3$. Η τ.μ. $X \sim$ Bernoulli$(0{,}3)$ δείχνει αν ο πελάτης αγόρασε ($X = 1$) ή όχι ($X = 0$).

(α′) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια $M_X(t)$.

(β′) Να βρεθεί η $\mathbb{E}[X]$ και η Var(X) μέσω παραγώγισης της $M_X(t)$.

Λύση

(α) Από τον ορισμό:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = e^{t\cdot 0} \cdot P(X=0) + e^{t\cdot 1} \cdot P(X=1) = 0{,}7 + 0{,}3\,e^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(β)

$$M_X'(t) = 0{,}3\,e^t, \quad M_X''(t) = 0{,}3\,e^t.$$
$$\mathbb{E}[X] = M_X'(0) = 0{,}3 = p. \qquad \mathbb{E}[X^2] = M_X''(0) = 0{,}3.$$
$$\text{Var}(X) = 0{,}3 - (0{,}3)^2 = 0{,}3 - 0{,}09 = 0{,}21 = p(1-p). \checkmark$$

9 Ροπογεννήτρια Αθροίσματος Ανεξάρτητων Τ.Μ.

Παράδειγμα 9: Απόδοση χαρτοφυλακίου

Ένας επενδυτής κατέχει δύο ανεξάρτητες επενδύσεις X_1 και X_2 με αποδόσεις (σε %) που ακολουθούν εκθετικές κατανομές: $X_1 \sim \text{Exp}(1)$ και $X_2 \sim \text{Exp}(2)$.
Η συνολική απόδοση είναι $S = X_1 + X_2$.

(α′) Να βρεθεί η ροπογεννήτρια $M_S(t)$.

(β′) Μέσω της $M_S(t)$ να υπολογιστούν η $\mathbb{E}[S]$ και η $\text{Var}(S)$.

Λύση

(α) Για ανεξάρτητες τ.μ.: $M_S(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t)$.
Η MGF εκθετικής Exp(λ): $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$, $t < \lambda$.

$$M_S(t) = \frac{1}{1-t} \cdot \frac{2}{2-t} = \frac{2}{(1-t)(2-t)}, \quad t < 1.$$

(β) Εφαρμόζουμε μερικά κλάσματα: $\frac{2}{(1-t)(2-t)} = \frac{2}{1-t} - \frac{2}{2-t}$.
Παραγωγίζουμε:

$$M_S'(t) = \frac{2}{(1-t)^2} - \frac{2}{(2-t)^2}, \qquad M_S''(t) = \frac{4}{(1-t)^3} - \frac{4}{(2-t)^3}.$$

$$\mathbb{E}[S] = M_S'(0) = 2 - \frac{2}{4} = 2 - 0{,}5 = 1{,}5.$$
$$\mathbb{E}[S^2] = M_S''(0) = 4 - \frac{4}{8} = 4 - 0{,}5 = 3{,}5.$$
$$\text{Var}(S) = 3{,}5 - (1{,}5)^2 = 3{,}5 - 2{,}25 = 1{,}25.$$

Παρατήρηση

Εναλλακτικά, αφού οι X_i είναι ανεξάρτητες: $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ και $\text{Var}(S) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. ✓

10 Ροπογεννήτρια Αθροίσματος ΑΤΙ Τ.Μ.

Παράδειγμα 10: Μηνιαίες αξιώσεις ασφάλισης

Σε μια ασφαλιστική εταιρεία, τα ποσά αποζημιώσεων $X_1, X_2, \dots, X_n$ (σε χιλ. €) είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με κοινή κατανομή $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$.
Ορίζουμε το συνολικό κόστος $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ (για σταθερό n).

(α′) Να βρεθεί η $M_{S_n}(t)$.

(β′) Αν $\lambda = 0{,}5$ και $n = 4$, να υπολογιστούν η $\mathbb{E}[S_4]$ και η $\text{Var}(S_4)$ μέσω της $M_{S_4}(t)$.

Λύση

(α) Αφού οι X_i είναι ΑΤΙ (ανεξάρτητες και ισόνομες):

$$M_{S_n}(t) = \left[M_X(t)\right]^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n, \quad t < \lambda.$$

(β) Με $\lambda = 0{,}5$ και $n = 4$:

$$M_{S_4}(t) = \left(\frac{0{,}5}{0{,}5 - t}\right)^4, \quad t < 0{,}5.$$

Παραγωγίζουμε:

$$M'_{S_4}(t) = 4 \cdot \frac{(0{,}5)^4}{(0{,}5 - t)^5}, \qquad M''_{S_4}(t) = 20 \cdot \frac{(0{,}5)^4}{(0{,}5 - t)^6}.$$

$$\mathbb{E}[S_4] = M'_{S_4}(0) = 4 \cdot \frac{(0{,}5)^4}{(0{,}5)^5} = \frac{4}{0{,}5} = 8.$$

$$\mathbb{E}[S_4^2] = M''_{S_4}(0) = 20 \cdot \frac{(0{,}5)^4}{(0{,}5)^6} = \frac{20}{(0{,}5)^2} = 80.$$

$$\text{Var}(S_4) = 80 - 64 = 16.$$

Παρατήρηση

Επαλήθευση: $\mathbb{E}[S_4] = 4 \cdot \frac{1}{\lambda} = 4 \cdot 2 = 8$ και $\text{Var}(S_4) = 4 \cdot \frac{1}{\lambda^2} = 4 \cdot 4 = 16$. ✓
Αυτή η ροπογεννήτρια αναγνωρίζεται ως $\text{Gamma}(n, \lambda)$, δηλαδή $S_4 \sim \text{Gamma}(4,\ 0{,}5)$.

11 Ροπογεννήτρια Γραμμικού Συνδυασμού

Παράδειγμα 11: Σταθμικός μέσος αποδόσεων

Ένα χαρτοφυλάκιο αποτελείται από δύο ανεξάρτητα περιουσιακά στοιχεία με αποδόσεις $X_1 \sim N(5, 4)$ και $X_2 \sim N(8, 9)$ (σε %).
Η απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι $Y = 0{,}6\, X_1 + 0{,}4\, X_2$.

(α′) Να βρεθεί η $M_Y(t)$ χρησιμοποιώντας την πρόταση για MGF γραμμικού συνδυασμού ανεξάρτητων τ.μ.

(β′) Να αναγνωριστεί η κατανομή του Y από τη μορφή της $M_Y(t)$.

Λύση

(α) Για ανεξάρτητες X_1, X_2 και $Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$:

$$M_Y(t) = M_{X_1}(\alpha_1 t) \cdot M_{X_2}(\alpha_2 t).$$

Η MGF κανονικής $N(\mu, \sigma^2)$: $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$.

$$M_{X_1}(0{,}6t) = e^{5(0{,}6t) + \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot (0{,}6t)^2} = e^{3t + 0{,}72t^2}.$$

$$M_{X_2}(0{,}4t) = e^{8(0{,}4t) + \frac{1}{2}\cdot 9 \cdot (0{,}4t)^2} = e^{3{,}2t + 0{,}72t^2}.$$

$$M_Y(t) = e^{3t + 0{,}72t^2} \cdot e^{3{,}2t + 0{,}72t^2} = e^{6{,}2t + 1{,}44t^2}.$$

(β) Η μορφή $M_Y(t) = e^{\mu_Y t + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 t^2}$ αντιστοιχεί σε κανονική κατανομή. Ταυτίζοντας:

$$\mu_Y = 6{,}2, \quad \tfrac{1}{2}\sigma_Y^2 = 1{,}44 \Rightarrow \sigma_Y^2 = 2{,}88.$$

Άρα $Y \sim N(6{,}2,\ 2{,}88)$.

Παρατήρηση

Αυτό επιβεβαιώνει το γνωστό αποτέλεσμα: γραμμικός συνδυασμός ανεξάρτητων κανονικών τ.μ. ακολουθεί επίσης κανονική κατανομή.

12 Αναγνώριση Κατανομής μέσω MGF (Μοναδικότητα)

Παράδειγμα 12: Αναγνώριση κατανομής

Δίνεται ότι μια τ.μ. X έχει ροπογεννήτρια:

$$M_X(t) = \left(\frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}\right)^{10}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(α′) Ποια κατανομή ακολουθεί η X; Να προσδιοριστούν οι παράμετροί της.

(β′) Να υπολογιστούν η $\mathbb{E}[X]$ και η $\mathsf{Var}(X)$.

Λύση

(α) Αναδιατάσσουμε:

$$M_X(t) = \left(\frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}\right)^{10} = (pe^t + q)^n$$

με $p = \frac{1}{3}$, $q = 1 - p = \frac{2}{3}$, $n = 10$.
Η γνωστή MGF της διωνυμικής $\mathsf{Bin}(n, p)$ είναι $M(t) = (pe^t + q)^n$.
Άρα, από το θεώρημα μοναδικότητας, $X \sim \mathsf{Bin}(10,\ \frac{1}{3})$.

(β) Χρησιμοποιούμε τους γνωστούς τύπους:

$$\mathbb{E}[X] = np = 10 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \approx 3{,}33.$$

$$\mathsf{Var}(X) = npq = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{9} \approx 2{,}22.$$

13 Πιθανογεννήτρια Συνάρτηση (PGF)

Παράδειγμα 13: PGF — Αριθμός ελαττωματικών

Σε ένα εργοστάσιο, ο αριθμός ελαττωματικών προϊόντων X ανά παρτίδα ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 2$:

$$P(X = k) = \frac{e^{-2} \cdot 2^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(α′) Να βρεθεί η πιθανογεννήτρια $G_X(t)$.

(β′) Μέσω της $G_X(t)$ να υπολογιστούν η $\mathbb{E}[X]$ και η $\text{Var}(X)$.

Λύση

(α) Από τον ορισμό $G_X(t) = \mathbb{E}[t^X] = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \cdot P(X = k)$:

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^k}{k!} = e^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2t)^k}{k!} = e^{-2} \cdot e^{2t} = e^{2(t-1)}, \quad |t| \leq 1.$$

(β) Η πιθανογεννήτρια δίνει ροπές μέσω:

$$\mathbb{E}[X] = G'_X(1), \qquad \text{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2.$$

Υπολογίζουμε:

$$G'_X(t) = 2e^{2(t-1)}, \qquad G''_X(t) = 4e^{2(t-1)}.$$
$$G'_X(1) = 2, \qquad G''_X(1) = 4.$$
$$\mathbb{E}[X] = 2. \qquad \text{Var}(X) = 4 + 2 - 4 = 2.$$

Όπως αναμενόταν: για Poisson(λ) ισχύει $\mathbb{E}[X] = \text{Var}(X) = \lambda = 2$. ✓

14 PGF — Ιδιότητες και Μετασχηματισμός

Παράδειγμα 14: Εύρεση πιθανοτήτων από PGF

Δίνεται ότι μια τ.μ. X (αριθμός βλαβών ανά εβδομάδα σε ένα δίκτυο) έχει πιθανογεννήτρια:

$$G_X(t) = \frac{1}{4}(1 + t)^3, \quad |t| \leq 1.$$

(α′) Να βρεθούν οι $P(X = 0),\ P(X = 1),\ P(X = 2),\ P(X = 3)$.

(β′) Να υπολογιστεί η $\mathbb{E}[X]$ μέσω της G_X.

(γ′) Η τ.μ. $Y = 1 + 2X$ παριστάνει το κόστος (σε εκατ. €). Να βρεθεί η πιθανογεννήτρια $G_Y(t)$.

Λύση

(α) Χρησιμοποιούμε $P(X=r)=\frac{1}{r!}G_X^{(r)}(0)$.
Αναπτύσσουμε: $(1+t)^3=1+3t+3t^2+t^3$. Άρα:

$$G_X(t)=\frac{1}{4}(1+3t+3t^2+t^3)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}t+\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{4}t^3.$$

Αφού $G_X(t)=\sum_k P(X=k)\,t^k$, ταυτίζοντας συντελεστές:

$$P(X=0)=\tfrac{1}{4},\quad P(X=1)=\tfrac{3}{4},\quad P(X=2)=\tfrac{3}{4},\quad P(X=3)=\tfrac{1}{4}.$$

Έλεγχος: αυτές δεν αθροίζουν σε 1! Ας ελέγξουμε ξανά:

$$\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}=2\neq 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να είμαστε πιο προσεκτικοί. Ταυτίζουμε τους συντελεστές του t^k στο ανάπτυγμα:

$$G_X(t)=\frac{1}{4}\left(1+3t+3t^2+t^3\right).$$

Ο συντελεστής του t^0 είναι $\frac{1}{4}$, του t^1 είναι $\frac{3}{4}$, του t^2 είναι $\frac{3}{4}$ και του t^3 είναι $\frac{1}{4}$.
Πράγματι: $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=2\neq 1$.
Επομένως, **η δοσμένη $G_X(t)$ δεν αντιστοιχεί σε έγκυρη κατανομή**, αφού $G_X(1)=\frac{1}{4}(1+1)^3=\frac{8}{4}=2\neq 1$.

Διόρθωση: Η σωστή πιθανογεννήτρια πρέπει να ικανοποιεί $G_X(1)=1$. Αν θέσουμε $G_X(t)=\frac{1}{8}(1+t)^3$, τότε $G_X(1)=\frac{8}{8}=1$. Με αυτήν:

$$G_X(t)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}t+\frac{3}{8}t^2+\frac{1}{8}t^3.$$

$$P(X=0)=\tfrac{1}{8},\quad P(X=1)=\tfrac{3}{8},\quad P(X=2)=\tfrac{3}{8},\quad P(X=3)=\tfrac{1}{8}.$$

Άθροισμα: $\frac{1+3+3+1}{8}=1$. ✓

Παρατήρηση

Αναγνωρίζουμε τη $\text{Bin}(3,\frac{1}{2})$, αφού $P(X=k)=\binom{3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

(β) $G_X'(t)=\frac{3}{8}(1+t)^2$. Άρα $\mathbb{E}[X]=G_X'(1)=\frac{3}{8}\cdot 4=\frac{3}{2}$.

(γ) Για $Y=\alpha+\beta X$ με α,β ακέραιους:

$$G_Y(t)=t^\alpha\,G_X(t^\beta).$$

Με $\alpha=1$, $\beta=2$:

$$G_Y(t)=t^1\cdot G_X(t^2)=t\cdot\frac{1}{8}(1+t^2)^3.$$

15 Σχέση PGF με MGF

Παράδειγμα 15: Μετάβαση μεταξύ PGF και MGF

Ο αριθμός αιτήσεων δανείου X που λαμβάνει μια τράπεζα ανά ημέρα ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$, $k = 1, 2, 3, \dots$ και $p = 0{,}4$.

(α′) Να βρεθεί η ροπογεννήτρια $M_X(t)$.

(β′) Να βρεθεί η πιθανογεννήτρια $G_X(t)$ χρησιμοποιώντας τη σχέση $G_X(t) = M_X(\ln t)$.

(γ′) Να επαληθευτεί ότι $G_X(e^t) = M_X(t)$.

Λύση

(α) $X \sim \text{Geom}(p)$ με $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$. Η MGF:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk}(1-p)^{k-1}p = pe^t \sum_{k=0}^{\infty}(qe^t)^k = \frac{pe^t}{1-qe^t}, \quad t < -\ln q.$$

Αντικαθιστώντας $p = 0{,}4$:

$$M_X(t) = \frac{0{,}4\, e^t}{1-0{,}6\, e^t}, \quad t < \ln\tfrac{5}{3} \approx 0{,}511.$$

(β) $G_X(t) = M_X(\ln t)$. Αντικαθιστούμε $t \to \ln t$ στην MGF:

$$G_X(t) = \frac{0{,}4 \cdot e^{\ln t}}{1-0{,}6 \cdot e^{\ln t}} = \frac{0{,}4\, t}{1-0{,}6\, t}, \quad |0{,}6\, t| < 1.$$

(γ) Ελέγχουμε: $G_X(e^t) = \frac{0{,}4\, e^t}{1-0{,}6\, e^t} = M_X(t)$. ✓

16 Χαρακτηριστική Συνάρτηση — Ορισμός και Υπολογισμός

Παράδειγμα 16: Χαρακτηριστική συνάρτηση ομοιόμορφης

Η ημερήσια κατανάλωση ενέργειας X (σε MWh) ενός εργοστασίου ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή $X \sim U(0, 1)$.

(α′) Να βρεθεί η χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_X(t)$.

(β′) Να υπολογιστεί η $\mathbb{E}[X]$ μέσω της $\varphi_X(t)$.

Λύση

(α) Η $f_X(x) = 1$ για $x \in [0,1]$. Από τον ορισμό:

$$\varphi_X(t) = \int_0^1 e^{itx} \cdot 1\,dx = \frac{e^{itx}}{it}\bigg|_0^1 = \frac{e^{it}-1}{it}, \quad t \neq 0.$$

Για $t = 0$: $\varphi_X(0) = 1$ (πάντα ισχύει).

(β) Η ροπή r-τάξης μέσω χαρακτηριστικής:

$$\mathbb{E}[X^r] = \frac{1}{i^r}\,\varphi_X^{(r)}(0).$$

Για $r = 1$ χρειαζόμαστε $\varphi'_X(0)$. Παραγωγίζουμε:

$$\varphi'_X(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{it}-1}{it}\right).$$

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα πηλίκου:

$$\varphi'_X(t) = \frac{i^2 t\,e^{it} - i(e^{it}-1)}{(it)^2} = \frac{ite^{it} - e^{it} + 1}{-t^2}.$$

Αυτός ο τύπος είναι αόριστης μορφής στο $t = 0$. Εφαρμόζουμε L'Hôpital ή ανάπτυγμα Taylor.

Ανάπτυγμα Taylor: $e^{it} = 1 + it + \frac{(it)^2}{2} + \cdots$

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{it}-1}{it} = \frac{it + \frac{(it)^2}{2} + \frac{(it)^3}{6} + \cdots}{it} = 1 + \frac{it}{2} + \frac{(it)^2}{6} + \cdots$$

Άρα $\varphi'_X(0) = \frac{i}{2}$.
Τελικά:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{i}\,\varphi'_X(0) = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{2} = \frac{1}{2}. \checkmark$$

17 Χαρακτηριστική Συνάρτηση Εκθετικής

Παράδειγμα 17: Χαρακτηριστική εκθετικής κατανομής

Η διάρκεια X (σε ώρες) μιας τηλεφωνικής κλήσης σε τηλεφωνικό κέντρο ακολουθεί $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ με $\lambda = 3$.

(α′) Να βρεθεί η χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_X(t)$.

(β′) Να γίνει σύγκριση με τη ροπογεννήτρια.

Λύση

(α) $f_X(x) = 3e^{-3x}$, $x > 0$.

$$\varphi_X(t) = \int_0^\infty e^{itx} \cdot 3e^{-3x}\, dx = 3\int_0^\infty e^{-(3-it)x}\, dx = \frac{3}{3-it}.$$

Η σύγκλιση εξασφαλίζεται αφού $\mathrm{Re}(3 - it) = 3 > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
Άρα: $\varphi_X(t) = \dfrac{3}{3-it} = \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$, $t \in \mathbb{R}$.

(β) Η ροπογεννήτρια: $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda-t}$, $t < \lambda$.
Παρατηρούμε ότι $\varphi_X(t) = M_X(it)$, δηλαδή η χαρακτηριστική προκύπτει αντικαθιστώντας $t \to it$ στη ροπογεννήτρια.

Παρατήρηση

Βασικό πλεονέκτημα: ενώ η $M_X(t)$ υπάρχει μόνο για $t < \lambda$, η $\varphi_X(t)$ υπάρχει για *κάθε* $t \in \mathbb{R}$. Αυτός είναι ο βασικός λόγος που η χαρακτηριστική συνάρτηση χρησιμοποιείται σε θεωρητικά αποτελέσματα (π.χ. Κεντρικό Οριακό Θεώρημα).

18 Χαρακτηριστική Συνάρτηση Αθροίσματος

Παράδειγμα 18: Χαρακτηριστική αθροίσματος ανεξάρτητων τ.μ.

Έστω $X_1 \sim \mathrm{Exp}(3)$ και $X_2 \sim \mathrm{Exp}(3)$ ανεξάρτητες (χρόνοι εξυπηρέτησης δύο διαδοχικών πελατών).
Ορίζουμε $S = X_1 + X_2$.

(α′) Να βρεθεί η $\varphi_S(t)$.

(β′) Να υπολογιστεί η $\mathbb{E}[S]$ μέσω της $\varphi_S(t)$.

Λύση

(α) Για ανεξάρτητες τ.μ.: $\varphi_S(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t)$.
Αφού $X_1, X_2 \sim \mathrm{Exp}(3)$:

$$\varphi_S(t) = \left(\frac{3}{3-it}\right)^2 = \frac{9}{(3-it)^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(β) Παραγωγίζουμε:

$$\varphi'_S(t) = \frac{18i}{(3-it)^3}.$$

$$\varphi'_S(0) = \frac{18i}{27} = \frac{2i}{3}.$$

$$\mathbb{E}[S] = \frac{1}{i}\,\varphi'_S(0) = \frac{1}{i} \cdot \frac{2i}{3} = \frac{2}{3}.$$

Επαλήθευση: $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. ✓

19 Χαρακτηριστική Γραμμικού Μετασχηματισμού

Παράδειγμα 19: φ_Y για $Y = \alpha + \beta X$

Έστω $X \sim N(0,1)$ (τυποποιημένη κανονική). Η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$.
Ορίζουμε $Y = \mu + \sigma X$ (γενική κανονική).

(α′) Να βρεθεί η $\varphi_Y(t)$.

(β′) Να δειχθεί ότι η $\varphi_Y(t)$ αντιστοιχεί στη $N(\mu, \sigma^2)$.

Λύση

(α) Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα: αν $Y = \alpha + \beta X$, τότε $\varphi_Y(t) = e^{i\alpha t}\varphi_X(\beta t)$.
Με $\alpha = \mu$, $\beta = \sigma$:

$$\varphi_Y(t) = e^{i\mu t} \cdot \varphi_X(\sigma t) = e^{i\mu t} \cdot e^{-\sigma^2 t^2/2} = e^{i\mu t - \sigma^2 t^2/2}.$$

(β) Η χαρακτηριστική συνάρτηση της $N(\mu, \sigma^2)$ είναι γνωστό ότι είναι $\varphi(t) = e^{i\mu t - \sigma^2 t^2/2}$, η οποία ταυτίζεται με αυτό που βρήκαμε. Από το θεώρημα μοναδικότητας, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. ✓

20 Συνθετική Άσκηση

Παράδειγμα 20: Ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο — Σύνθεση εννοιών

Σε μια ασφαλιστική εταιρεία, τα ποσά αποζημιώσεων $X_1, X_2, \ldots$ (σε χιλ. €) είναι ΑΤΙ τ.μ. με κοινή κατανομή Exp(λ), $\lambda > 0$. Ο μηνιαίος αριθμός αποζημιώσεων N είναι ανεξάρτητος από τα X_i και ακολουθεί γεωμετρική κατανομή:

$$P(N = n) = (1-p)^{n-1}p, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Το συνολικό μηνιαίο κόστος: $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

(α′) Να βρεθεί η MGF της N και να υπολογιστούν $\mathbb{E}[N]$, Var(N).

(β′) Να βρεθεί η MGF του S_N.

(γ′) Αν $p = 0{,}5$ και $\lambda = 1$, να υπολογιστούν $\mathbb{E}[S_N]$ και Var(S_N).

(δ′) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μοναδικότητας, να αναγνωριστεί η κατανομή του S_N.

(ε′) Να εφαρμοστεί η ανισότητα Chebyshev για να βρεθεί ένα άνω φράγμα στην πιθανότητα το μηνιαίο κόστος να υπερβεί τις 8 χιλ. €.

Λύση

(α) $N \sim \text{Geom}(p)$. Η MGF:

$$M_N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{tn} (1-p)^{n-1} p = \frac{pe^t}{1-qe^t}, \quad t < -\ln q,$$

όπου $q = 1 - p$.

$$\mathbb{E}[N] = \frac{1}{p}, \qquad \text{Var}(N) = \frac{q}{p^2}.$$

(β) Η MGF κάθε $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$: $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$, $t < \lambda$.
Για τυχαίο πλήθος όρων, η MGF του S_N δίνεται από σύνθεση:

$$M_{S_N}(t) = M_N\big(\ln M_X(t)\big).$$

Αντικαθιστούμε:

$$\ln M_X(t) = \ln \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

$$M_{S_N}(t) = \frac{p \cdot e^{\ln \frac{\lambda}{\lambda - t}}}{1 - q \cdot e^{\ln \frac{\lambda}{\lambda - t}}} = \frac{p \cdot \frac{\lambda}{\lambda - t}}{1 - q \cdot \frac{\lambda}{\lambda - t}} = \frac{p\lambda}{(\lambda - t) - q\lambda} = \frac{p\lambda}{p\lambda - t}, \quad t < p\lambda.$$

(γ) Με $p = 0{,}5$, $\lambda = 1$: $p\lambda = 0{,}5$.

$$M_{S_N}(t) = \frac{0{,}5}{0{,}5 - t}, \quad t < 0{,}5.$$

Παραγωγίζουμε:

$$M'_{S_N}(t) = \frac{0{,}5}{(0{,}5 - t)^2}, \qquad M''_{S_N}(t) = \frac{1}{(0{,}5 - t)^3}.$$

$$\mathbb{E}[S_N] = M'_{S_N}(0) = \frac{0{,}5}{0{,}25} = 2.$$

$$\mathbb{E}[S_N^2] = M''_{S_N}(0) = \frac{1}{0{,}125} = 8.$$

$$\text{Var}(S_N) = 8 - 4 = 4, \qquad \sigma_{S_N} = 2.$$

(δ) Η $M_{S_N}(t) = \frac{p\lambda}{p\lambda - t}$ αναγνωρίζεται ως η MGF εκθετικής κατανομής με παράμετρο $p\lambda$.
Από το θεώρημα μοναδικότητας: $S_N \sim \text{Exp}(p\lambda)$.
Για $p = 0{,}5$, $\lambda = 1$: $\boxed{S_N \sim \text{Exp}(0{,}5)}$, με $f_{S_N}(x) = 0{,}5\, e^{-0{,}5x}$, $x \geq 0$.

(ε) Εφαρμόζουμε Chebyshev: $P(|S_N - \mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$.
Με $\mu = 2$, $\sigma^2 = 4$. Θέλουμε $P(S_N \geq 8)$.
Αφού $S_N \geq 8 \Rightarrow |S_N - 2| \geq 6$ (θέτουμε $c = 6$):

$$P(S_N \geq 8) \leq P(|S_N - 2| \geq 6) \leq \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111.$$

Παρατήρηση

Επαλήθευση με ακριβή υπολογισμό: αφού $S_N \sim \text{Exp}(0{,}5)$,

$$P(S_N \geq 8) = e^{-0{,}5 \cdot 8} = e^{-4} \approx 0{,}0183.$$

Η Chebyshev δίνει $0{,}111$, δηλαδή ένα φράγμα πολύ χαλαρό αλλά πάντα ισχύον.
Αυτό δείχνει τη δύναμη αλλά και τον περιορισμό των ανισοτήτων.

Καλή μελέτη!