Ασκήσεις: Αναμενόμενη Τιμή και Διακύμανση

Στατιστική ΙΙ — Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης, ΟΠΑ

Διάλεξη 3

---

1 Αναμενόμενη Τιμή Διακριτής Τ.Μ.

Παράδειγμα 1: Αναμενόμενο κέρδος επένδυσης

Ένας επενδυτής εξετάζει ένα χρηματοοικονομικό προϊόν. Το καθαρό κέρδος X (σε χιλ. €) ακολουθεί την εξής κατανομή:

x_i	-2	0	3	5
$P(X = x_i)$	0,10	0,30	0,40	0,20

(α′) Να υπολογιστεί η αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}(X)$.

(β′) Να ερμηνευθεί οικονομικά το αποτέλεσμα.

(γ′) Αν η αρχική επένδυση είναι 1 000 € και το πραγματικό κέρδος δίνεται από $Y = 1000 + 1000X$, να υπολογιστεί η $\mathbb{E}(Y)$.

Λύση

(α) Από τον ορισμό:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i P(X = x_i) = (-2)(0{,}10) + (0)(0{,}30) + (3)(0{,}40) + (5)(0{,}20)$$

$$= -0{,}20 + 0 + 1{,}20 + 1{,}00 = 2{,}00 \text{ (χιλ. €)}$$

(β) Κατά μέσο όρο, αν ο επενδυτής επαναλάμβανε αυτή την επένδυση πολλές φορές, θα αναμενόταν κέρδος 2 000 € ανά επένδυση.

(γ) Χρησιμοποιούμε τη γραμμικότητα: $\mathbb{E}(Y) = 1000 + 1000\,\mathbb{E}(X) = 1000 + 1000 \cdot 2 = 3000$ €.

2 Βασικές Ιδιότητες Αναμενόμενης Τιμής

Παράδειγμα 2: Γραμμικότητα

Ένα νοικοκυριό έχει δύο πηγές εισοδήματος. Ο μισθός X έχει $\mathbb{E}(X) = 1\,500$ € και ο φόρος ακίνητης περιουσίας Y έχει $\mathbb{E}(Y) = 200$ €. Το διαθέσιμο εισόδημα υπολογίζεται ως

$$D = X - Y + 300,$$

όπου 300 € είναι ένα πάγιο κοινωνικό επίδομα.

Να υπολογιστεί η αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}(D)$.

Λύση

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες γραμμικότητας:

$$\mathbb{E}(D) = \mathbb{E}(X - Y + 300) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) + 300 = 1500 - 200 + 300 = 1600 \text{ €}.$$

Χρησιμοποιήθηκαν οι ιδιότητες: $\mathbb{E}(c) = c$, $\mathbb{E}(cX) = c\,\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$.

3 Αναμενόμενη Τιμή Συνεχούς Τ.Μ.

Παράδειγμα 3: Χρόνος αναμονής

Ο χρόνος αναμονής X (σε λεπτά) ενός πελάτη σε τράπεζα ακολουθεί συνεχή κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(4-x), & 0 \le x \le 4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α′) Να επαληθευτεί ότι η f_X είναι έγκυρη σ.π.π.

(β′) Να υπολογιστεί η αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}(X)$.

Λύση

(α) Ελέγχουμε: $f_X(x) \ge 0$ για κάθε x (προφανώς, αφού $4 - x \ge 0$ στο $[0, 4]$) και

$$\int_0^4 \frac{1}{8}(4-x)\,dx = \frac{1}{8}\left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{1}{8}(16-8) = 1. \quad \checkmark$$

(β)

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^4 x \cdot \frac{1}{8}(4-x)\,dx = \frac{1}{8}\int_0^4 (4x - x^2)\,dx = \frac{1}{8}\left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$= \frac{1}{8}\left(32 - \frac{64}{3}\right) = \frac{1}{8}\cdot\frac{32}{3} = \frac{4}{3} \approx 1{,}33 \text{ λεπτά}.$$

4 Έλεγχος Ύπαρξης Αναμενόμενης Τιμής

Παράδειγμα 4: Ύπαρξη $\mathbb{E}(X)$

Έστω η τ.μ. X με σ.π.π.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}, & x \ge 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

Να εξεταστεί αν υπάρχει η $\mathbb{E}(X)$.

Λύση

Πρέπει να ελέγξουμε αν $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. Επειδή $X \geq 1 > 0$:

$$\mathbb{E}(|X|) = \mathbb{E}(X) = \int_1^\infty x \cdot \frac{2}{x^3}\, dx = 2\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = 2\left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 2(0+1) = 2 < \infty.$$

Άρα η αναμενόμενη τιμή υπάρχει και $\mathbb{E}(X) = 2$.

Παρατήρηση

Αντίθετα, η κατανομή Cauchy με $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ δεν έχει αναμενόμενη τιμή, διότι $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)\, dx = +\infty$. Αυτό δείχνει ότι η ύπαρξη της $\mathbb{E}(X)$ δεν είναι αυτονόητη.

5 Αναμενόμενη Τιμή Συνάρτησης $g(X)$

Παράδειγμα 5 (Διακριτή): Κέρδος ως συνάρτηση ζήτησης

Η ημερήσια ζήτηση X ενός προϊόντος λαμβάνει τιμές στο $\{0, 1, 2, 3\}$ με πιθανότητες:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,1	0,3	0,4	0,2

Το κέρδος ανά ημέρα (σε €) δίνεται από $g(X) = 50X - 10X^2 + 20$. Να βρεθεί η $\mathbb{E}[g(X)]$.

Λύση

Υπολογίζουμε τις τιμές $g(x_i)$ πρώτα:

x	0	1	2	3
$g(x)$	20	60	60	20
$P(X = x)$	0,1	0,3	0,4	0,2

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_j g(x_j)\, P(X = x_j) = 20(0{,}1) + 60(0{,}3) + 60(0{,}4) + 20(0{,}2) = 2 + 18 + 24 + 4 = 48\text{ €}.$$

Παράδειγμα 6 (Συνεχής): Αναμενόμενη τιμή $g(X) = X^2$

Έστω X με σ.π.π. $f_X(x) = 2x$, $0 \leq x \leq 1$. Να υπολογιστεί η $\mathbb{E}(X^2)$.

Λύση

Θέτουμε $g(x) = x^2$:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 2x \, dx = 2 \int_0^1 x^3 \, dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

6 Γραμμικότητα $\mathbb{E}[\sum g_i(X)]$

Παράδειγμα 7: Άθροισμα συναρτήσεων

Έστω $X \sim U(0,1)$ (ομοιόμορφη στο $[0,1]$, δηλ. $f_X(x) = 1$ για $x \in [0,1]$), και ορίζουμε

$$g_1(X) = 3X, \quad g_2(X) = X^2, \quad g_3(X) = -2X + 5.$$

Να υπολογιστεί η $\mathbb{E}[g_1(X) + g_2(X) + g_3(X)]$.

Λύση

Από τη γραμμικότητα:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{3} g_i(X)\right] = \mathbb{E}[g_1(X)] + \mathbb{E}[g_2(X)] + \mathbb{E}[g_3(X)].$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά. Για $X \sim U(0,1)$: $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g_1(X)] &= 3\,\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}, \\ \mathbb{E}[g_2(X)] &= \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{3}, \\ \mathbb{E}[g_3(X)] &= -2\,\mathbb{E}(X) + 5 = -1 + 5 = 4. \end{aligned}$$

Άρα:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{3} g_i(X)\right] = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} + 4 = \frac{9+2+24}{6} = \frac{35}{6} \approx 5{,}83.$$

7 Διακύμανση Τυχαίας Μεταβλητής

Παράδειγμα 8 (Διακριτή): Κέρδος μετοχής

Η ημερήσια απόδοση X (σε %) μιας μετοχής έχει την εξής κατανομή:

x_i	-3	1	5
$P(X = x_i)$	0,25	0,50	0,25

Να υπολογιστούν η $\mathbb{E}(X)$, η $\mathrm{Var}(X)$ και η τυπική απόκλιση σ_X.

Λύση

Αναμενόμενη τιμή:

$$\mathbb{E}(X) = (-3)(0{,}25) + (1)(0{,}50) + (5)(0{,}25) = -0{,}75 + 0{,}50 + 1{,}25 = 1{,}00\%.$$

$\mathbb{E}(X^2)$**:**

$$\mathbb{E}(X^2) = 9(0{,}25) + 1(0{,}50) + 25(0{,}25) = 2{,}25 + 0{,}50 + 6{,}25 = 9{,}00.$$

Διακύμανση (μέσω εναλλακτικού τύπου):

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = 9{,}00 - 1{,}00 = 8{,}00.$$

Τυπική απόκλιση: $\sigma_X = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83\%$.

Παράδειγμα 9 (Συνεχής): Διακύμανση

Έστω η σ.π.π. $f_X(x) = 2x$, $0 \le x \le 1$. Να υπολογιστεί η $\text{Var}(X)$.

Λύση

Υπολογίζουμε πρώτα $\mathbb{E}(X)$ και $\mathbb{E}(X^2)$:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x \cdot 2x\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx = \frac{2}{3},$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 2x\,dx = 2\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{2}.$$

Άρα:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18} \approx 0{,}056.$$

8 Ιδιότητες Διακύμανσης

Παράδειγμα 10: Γραμμικός μετασχηματισμός

Η θερμοκρασία X (σε °C) μιας πόλης έχει $\mathbb{E}(X) = 20$ και $\text{Var}(X) = 9$.
Η μετατροπή σε Fahrenheit δίνεται από $Y = \frac{9}{5}X + 32$.

(α′) Να υπολογιστεί η $\mathbb{E}(Y)$.

(β′) Να υπολογιστεί η $\text{Var}(Y)$.

(γ′) Να υπολογιστεί η τυπική απόκλιση σ_Y.

Λύση

(α) $\mathbb{E}(Y) = \frac{9}{5}\mathbb{E}(X) + 32 = \frac{9}{5} \cdot 20 + 32 = 36 + 32 = 68$ °F.
(β) $\text{Var}(Y) = \text{Var}(\frac{9}{5}X + 32) = \left(\frac{9}{5}\right)^2 \text{Var}(X) = \frac{81}{25} \cdot 9 = \frac{729}{25} = 29{,}16$.
(γ) $\sigma_Y = \sqrt{29{,}16} = \frac{27}{5} = 5{,}40$ °F.

Παρατήρηση

Η πρόσθεση σταθεράς $(+32)$ μετατοπίζει τη μέση τιμή αλλά δεν αλλάζει τη διασπορά. Μόνο ο πολλαπλασιαστικός συντελεστής $(9/5)$ επηρεάζει τη διακύμανση, και μάλιστα υψωμένος στο τετράγωνο.

9 Συντελεστής Ασυμμετρίας (Skewness)

Παράδειγμα 11: Υπολογισμός γ_3

Η ετήσια απόδοση X ενός αμοιβαίου κεφαλαίου (σε %) έχει:

x_i	-5	0	5	20
$P(X = x_i)$	0,20	0,30	0,30	0,20

Να υπολογιστεί ο συντελεστής ασυμμετρίας γ_3 και να ερμηνευθεί.

Λύση

Βήμα 1: Υπολογίζουμε $\mu = \mathbb{E}(X)$.

$$\mu = (-5)(0{,}2) + (0)(0{,}3) + (5)(0{,}3) + (20)(0{,}2) = -1 + 0 + 1{,}5 + 4 = 4{,}5\%.$$

Βήμα 2: Υπολογίζουμε $\mathbb{E}(X^2)$ και σ^2:

$$\mathbb{E}(X^2) = 25(0{,}2) + 0(0{,}3) + 25(0{,}3) + 400(0{,}2) = 5 + 0 + 7{,}5 + 80 = 92{,}5.$$

$$\sigma^2 = 92{,}5 - 4{,}5^2 = 92{,}5 - 20{,}25 = 72{,}25, \quad \sigma = 8{,}5.$$

Βήμα 3: Υπολογίζουμε $\mu_3 = \mathbb{E}\big[(X-\mu)^3\big]$:

$$\mu_3 = (-9{,}5)^3(0{,}2) + (-4{,}5)^3(0{,}3) + (0{,}5)^3(0{,}3) + (15{,}5)^3(0{,}2)$$

$$= (-857{,}375)(0{,}2) + (-91{,}125)(0{,}3) + (0{,}125)(0{,}3) + (3723{,}875)(0{,}2)$$

$$= -171{,}475 - 27{,}338 + 0{,}038 + 744{,}775 = 546{,}00.$$

Βήμα 4:

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{546{,}00}{8{,}5^3} = \frac{546{,}00}{614{,}125} \approx 0{,}889.$$

Ερμηνεία: $\gamma_3 > 0$, άρα η κατανομή είναι **θετικά ασύμμετρη** (δεξιά ουρά μεγαλύτερη). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μικρή πιθανότητα εξαιρετικά υψηλών αποδόσεων (20%), που "τραβάει" τη μέση τιμή δεξιά σε σχέση με τη διάμεσο.

10 Συντελεστής Κύρτωσης (Kurtosis)

Παράδειγμα 12: Υπολογισμός γ_4

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του Παραδείγματος 11 ($\mu = 4{,}5$, $\sigma = 8{,}5$), να υπολογιστεί ο συντελεστής κύρτωσης γ_4 και να χαρακτηριστεί η κατανομή.

Λύση

Υπολογίζουμε $\mu_4 = \mathbb{E}\big[(X-\mu)^4\big]$:

$$\mu_4 = (-9{,}5)^4(0{,}2) + (-4{,}5)^4(0{,}3) + (0{,}5)^4(0{,}3) + (15{,}5)^4(0{,}2)$$

$$= (8145{,}06)(0{,}2) + (410{,}06)(0{,}3) + (0{,}0625)(0{,}3) + (57720{,}06)(0{,}2)$$

$$= 1629{,}01 + 123{,}02 + 0{,}02 + 11544{,}01 = 13296{,}06.$$

$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{13296{,}06}{8{,}5^4} = \frac{13296{,}06}{5220{,}06} \approx 2{,}55.$$

Ερμηνεία: $\gamma_4 < 3$, άρα η κατανομή είναι **πλατύκυρτη**: έχει ελαφρύτερες ουρές και πιο "επίπεδη" κορυφή σε σύγκριση με την κανονική κατανομή.

11 Ανισότητα Jensen

Παράδειγμα 13: Αποστροφή κινδύνου

Ένας καταναλωτής με συνάρτηση χρησιμότητας $u(w) = \ln(w)$ (κοίλη) ξεκινά με πλούτο $w_0 = 100\,€$ και αντιμετωπίζει ένα στοίχημα:

$$W = \begin{cases} 150, & \text{με πιθανότητα } 0{,}5 \\ 50, & \text{με πιθανότητα } 0{,}5 \end{cases}$$

(α′) Να υπολογιστεί η $\mathbb{E}(W)$ και η $u(\mathbb{E}(W))$.

(β′) Να υπολογιστεί η $\mathbb{E}[u(W)]$.

(γ′) Τι προβλέπει η ανισότητα Jensen; Θα αποδεχθεί ο καταναλωτής το στοίχημα;

Λύση

(α)

$$\mathbb{E}(W) = 150(0{,}5) + 50(0{,}5) = 100, \quad u(\mathbb{E}(W)) = \ln(100) \approx 4{,}605.$$

(β)

$$\mathbb{E}[u(W)] = \ln(150)(0{,}5) + \ln(50)(0{,}5) = \frac{5{,}011 + 3{,}912}{2} = 4{,}461.$$

(γ) Η $u(w) = \ln(w)$ είναι κοίλη ($u''(w) = -1/w^2 < 0$), οπότε η ανισότητα Jensen δίνει:

$$u(\mathbb{E}(W)) \geq \mathbb{E}[u(W)] \implies 4{,}605 \geq 4{,}461. \quad \checkmark$$

Ο καταναλωτής προτιμά τον σίγουρο πλούτο 100 € ($u = 4{,}605$) από το στοίχημα ($\mathbb{E}[u] = 4{,}461$). Αυτό είναι η κλασική **αποστροφή κινδύνου** (risk aversion) στα οικονομικά.

Παράδειγμα 14: Jensen με κυρτή συνάρτηση

Έστω $X \sim U(1,3)$. Θέτουμε $g(x) = x^2$ (κυρτή, αφού $g''(x) = 2 > 0$).
Να επαληθευτεί ότι $g(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}[g(X)]$.

Λύση

Για $X \sim U(1,3)$: $\mathbb{E}(X) = 2$ και $\mathbb{E}(X^2) = \int_1^3 x^2 \cdot \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{1}{6}(27-1) = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$.

$$g(\mathbb{E}(X)) = 2^2 = 4, \qquad \mathbb{E}[g(X)] = \frac{13}{3} \approx 4{,}33.$$

Πράγματι: $4 \leq 4{,}33$, δηλ. $g(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}[g(X)]$, σύμφωνα με τη Jensen. ✓

12 Έλεγχος Κυρτότητας / Κοιλότητας

Παράδειγμα 15

Να εξεταστεί αν οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες:

(α′) $g(x) = e^x$

(β′) $g(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$

(γ′) $g(x) = x^4$

Λύση

(α) $g'(x) = e^x$, $g''(x) = e^x > 0 \Rightarrow$ **κυρτή**. Jensen: $e^{\mathbb{E}(X)} \leq \mathbb{E}(e^X)$.
(β) $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $g''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}} < 0 \Rightarrow$ **κοίλη**. Jensen: $\sqrt{\mathbb{E}(X)} \geq \mathbb{E}(\sqrt{X})$.
(γ) $g'(x) = 4x^3$, $g''(x) = 12x^2 \geq 0 \Rightarrow$ **κυρτή**. Jensen: $[\mathbb{E}(X)]^4 \leq \mathbb{E}(X^4)$.

13 Αναμενόμενη Τιμή vs. Μέση Τιμή Δείγματος

Παράδειγμα 16

Μια εταιρεία γνωρίζει ότι η θεωρητική κατανομή του ημερήσιου αριθμού παραγγελιών X έχει $\mathbb{E}(X) = 120$.
Σε ένα δείγμα $n = 5$ ημερών παρατηρήθηκαν: $105,\ 130,\ 118,\ 125,\ 112$.

(α′) Να υπολογιστεί η δειγματική μέση τιμή $\bar{X}$.

(β′) Να εξηγηθεί η σχέση μεταξύ $\mathbb{E}(X)$ και $\bar{X}$.

Λύση

(α)

$$\bar{X} = \frac{1}{5}(105 + 130 + 118 + 125 + 112) = \frac{590}{5} = 118{,}0.$$

(β) Η **αναμενόμενη τιμή** $\mathbb{E}(X) = 120$ είναι θεωρητική παράμετρος, υπολογισμένη από την κατανομή του X.
Η **μέση τιμή δείγματος** $\bar{X} = 118$ υπολογίζεται από τα δεδομένα και αποτελεί *εκτίμηση* της $\mathbb{E}(X)$.
Η απόκλιση (118 vs. 120) οφείλεται στη δειγματική διακύμανση. Καθώς αυξάνεται το n, ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών εγγυάται ότι $\bar{X} \to \mathbb{E}(X)$.

14 Συνθετική Άσκηση

Παράδειγμα 17: Συνδυαστική εφαρμογή

Ο μηνιαίος μισθός X (σε χιλ. €) νεοπροσλαμβανομένων οικονομολόγων ακολουθεί συνεχή κατανομή με σ.π.π.:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α′) Να επαληθευτεί ότι η f_X είναι έγκυρη σ.π.π.

(β′) Να υπολογιστεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ και να υπολογιστεί η $P(0{,}5 \le X \le 1{,}5)$.

(γ′) Ο εργοδότης προσφέρει πρόγραμμα bonus. Η πιθανότητα να λάβει bonus ένας εργαζόμενος εξαρτάται από τον μισθό του: αν $X > 1$ (χιλ. €) τότε $P(B \mid X > 1) = 0{,}70$, ενώ αν $X \le 1$ τότε $P(B \mid X \le 1) = 0{,}20$. Αν ένας εργαζόμενος *έλαβε* bonus, ποια είναι η πιθανότητα ο μισθός του να ήταν μεγαλύτερος από 1 000 €; (Εφαρμογή θεωρήματος Bayes.)

(δ′) Να υπολογιστεί η $\mathbb{E}(X)$.

(ε′) Να υπολογιστεί η $\mathrm{Var}(X)$.

(ϛ′) Αν ο εργοδότης επιβάλλει φόρο $T = 0{,}20X + 0{,}05$, ποια είναι η $\mathbb{E}(T)$ και η $\mathrm{Var}(T)$;

(ζ′) Μέσω Jensen, να δειχθεί ότι $\mathbb{E}(\ln X) < \ln(\mathbb{E}(X))$.

Λύση

(α) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3}{8}x^2\,dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{3} = 1.$ ✓

(β) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής ορίζεται ως $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- Αν $x < 0$: $F_X(x) = 0$.

- Αν $0 \le x \le 2$:

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{3}{8}t^2\,dt = \frac{3}{8}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^x = \frac{x^3}{8}.$$

- Αν $x > 2$: $F_X(x) = 1$.

Συνοπτικά:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x^3}{8}, & 0 \le x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Επαλήθευση: $F_X(0) = 0$, $F_X(2) = 8/8 = 1$. ✓
Υπολογίζουμε:

$$P(0{,}5 \le X \le 1{,}5) = F_X(1{,}5) - F_X(0{,}5) = \frac{1{,}5^3}{8} - \frac{0{,}5^3}{8} = \frac{3{,}375 - 0{,}125}{8} = \frac{3{,}25}{8} = 0{,}40625.$$

(γ) Ζητάμε $P(X > 1 \mid B)$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bayes:

$$P(X > 1 \mid B) = \frac{P(B \mid X > 1)\,P(X > 1)}{P(B)}.$$

Βήμα 1: Υπολογίζουμε τις πιθανότητες $P(X > 1)$ και $P(X \le 1)$ μέσω της CDF:

$$P(X \le 1) = F_X(1) = \frac{1^3}{8} = \frac{1}{8} = 0{,}125, \qquad P(X > 1) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875.$$

Βήμα 2: Υπολογίζουμε την ολική πιθανότητα $P(B)$ (Νόμος Ολικής Πιθανότητας):

$$P(B) = P(B \mid X > 1)\,P(X > 1) + P(B \mid X \le 1)\,P(X \le 1)$$

$$= 0{,}70 \cdot 0{,}875 + 0{,}20 \cdot 0{,}125 = 0{,}6125 + 0{,}025 = 0{,}6375.$$

Βήμα 3: Εφαρμογή Bayes:

$$P(X > 1 \mid B) = \frac{0{,}70 \times 0{,}875}{0{,}6375} = \frac{0{,}6125}{0{,}6375} \approx 0{,}961.$$

Ερμηνεία: Αν γνωρίζουμε ότι ένας εργαζόμενος έλαβε bonus, η πιθανότητα ότι ο μισθός του υπερβαίνει τα 1 000 € είναι περίπου $96{,}1\%$ — αισθητά υψηλότερη από την *a priori* πιθανότητα $P(X > 1) = 87{,}5\%$. Το bonus λειτουργεί ως “ένδειξη” υψηλού μισθού, ενημερώνοντας τις αρχικές μας πεποιθήσεις.
(δ)

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{3}{8}x^2\,dx = \frac{3}{8}\int_0^2 x^3\,dx = \frac{3}{8}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{3}{8}\cdot 4 = \frac{3}{2} = 1{,}5 \text{ (χιλ. €)}.$$

(ε)

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{3}{8}\int_0^2 x^4\,dx = \frac{3}{8}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{3}{8}\cdot\frac{32}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4.$$

$$\text{Var}(X) = 2{,}4 - 1{,}5^2 = 2{,}4 - 2{,}25 = 0{,}15.$$

(στ) $\mathbb{E}(T) = 0{,}20\,\mathbb{E}(X) + 0{,}05 = 0{,}20 \cdot 1{,}5 + 0{,}05 = 0{,}35$ (χιλ. € = 350 €).
$\text{Var}(T) = 0{,}20^2 \cdot \text{Var}(X) = 0{,}04 \cdot 0{,}15 = 0{,}006$.
(ζ) Η $g(x) = \ln(x)$ είναι κοίλη ($g''(x) = -1/x^2 < 0$), οπότε η Jensen δίνει:

$$\mathbb{E}[\ln(X)] \le \ln(\mathbb{E}(X)) = \ln(1{,}5) \approx 0{,}405.$$

Επαλήθευση: $\mathbb{E}[\ln X] = \frac{3}{8}\int_0^2 x^2 \ln x\,dx$. Με ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\int_0^2 x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9} \approx 1{,}959 - 0{,}889 = 1{,}070.$$

Άρα $\mathbb{E}[\ln X] = \frac{3}{8}\cdot 1{,}070 \approx 0{,}401 < 0{,}405 = \ln(1{,}5)$. ✓

Καλή μελέτη!