Χαρακτηριστική Συνάρτηση Πρόσθετα Παραδείγματα

Στατιστική ΙΙ — ΟΠΑ . Παραδείγματα 21–25

Υπενθύμιση ορισμού

Η **χαρακτηριστική συνάρτηση** της τ.μ. X ορίζεται ως

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}tX}\right], \quad t \in \mathbb{R},$$

όπου $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ η φανταστική μονάδα. Ισχύει:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\cos(tX)] + \mathrm{i}\,\mathbb{E}[\sin(tX)].$$

Εξαγωγή ροπών: $\mathbb{E}[X^r] = \frac{1}{\mathrm{i}^r}\,\varphi_X^{(r)}(0)$, εφόσον υπάρχει η r-οστή ροπή.

Παράδειγμα 21

Χαρακτηριστική Bernoulli — Εξαγωγή μέσης τιμής και διακύμανσης

Παράδειγμα 21: Χαρακτηριστική Bernoulli(p)

Μια επενδυτική πρόταση επιτυγχάνει (απόδοση $X = 1$) με πιθανότητα p ή αποτυγχάνει ($X = 0$) με πιθανότητα $1 - p$, όπου $0 < p < 1$.

(*′) Να βρεθεί η χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_X(t)$.
(*′) Να υπολογιστεί η $\mathbb{E}[X]$ μέσω της $\varphi_X(t)$.
(*′) Να υπολογιστεί η $\mathrm{Var}(X)$ μέσω της $\varphi_X(t)$.

Λύση

(α) Η $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ παίρνει τιμές $0, 1$. Από τον ορισμό:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}tX}\right] = e^{\mathrm{i}t\cdot 0}(1-p) + e^{\mathrm{i}t\cdot 1}\cdot p = (1-p) + p\,e^{\mathrm{i}t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(β) Παραγωγίζουμε ως προς t:

$$\varphi_X'(t) = \mathrm{i}\,p\,e^{\mathrm{i}t}.$$

Για $t = 0$:

$$\varphi_X'(0) = \mathrm{i}\,p.$$

Άρα:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\mathrm{i}}\,\varphi_X'(0) = \frac{\mathrm{i}p}{\mathrm{i}} = p. \quad \checkmark$$

(γ) Παραγωγίζουμε δεύτερη φορά:

$$\varphi_X''(t) = \mathrm{i}^2\,p\,e^{\mathrm{i}t} = -p\,e^{\mathrm{i}t}.$$

Για $t = 0$:

$$\varphi_X''(0) = -p.$$

Άρα η δεύτερη ροπή:

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{\mathrm{i}^2}\,\varphi_X''(0) = \frac{-p}{-1} = p.$$

Η διακύμανση:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2 = p - p^2 = p(1-p). \quad \checkmark$$

Επαλήθευση: Για $X \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$ είναι γνωστό ότι $\mathbb{E}[X] = p$ και $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$. ✓

Παράδειγμα 22

Χαρακτηριστική Poisson — Ορισμός και εξαγωγή μέσης τιμής

Παράδειγμα 22: Χαρακτηριστική Poisson(λ)

Ο αριθμός παραγγελιών X που λαμβάνει μια εταιρεία ανά ώρα ακολουθεί $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$, με

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(*′) Να βρεθεί η $\varphi_X(t)$.
(*′) Να υπολογιστεί η $\mathbb{E}[X]$ μέσω της $\varphi_X(t)$.
(*′) Για $\lambda = 4$, να γραφεί η $\varphi_X(t)$ ρητά.

Λύση

(α) Από τον ορισμό για διακριτή τ.μ.:

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\mathrm{i}tk} \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{\mathrm{i}t})^k}{k!}.$$

Αναγνωρίζουμε ανάπτυγμα MacLaurin της e^x:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{\mathrm{i}t})^k}{k!} = e^{\lambda e^{\mathrm{i}t}}.$$

Άρα:

$$\boxed{\varphi_X(t) = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda e^{\mathrm{i}t}} = e^{\lambda(e^{\mathrm{i}t}-1)}, \quad t \in \mathbb{R}.}$$

(β) Παραγωγίζουμε:

$$\varphi_X'(t) = e^{\lambda(e^{\mathrm{i}t}-1)} \cdot \lambda \cdot \mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}.$$

Για $t = 0$, $e^{\mathrm{i}\cdot 0} = 1$ και $e^{\lambda(1-1)} = 1$:

$$\varphi_X'(0) = 1 \cdot \lambda\mathrm{i} \cdot 1 = \mathrm{i}\lambda.$$

Άρα:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\mathrm{i}}\,\varphi_X'(0) = \frac{\mathrm{i}\lambda}{\mathrm{i}} = \lambda. \quad \checkmark$$

(γ) Για $\lambda = 4$:

$$\varphi_X(t) = e^{4(e^{\mathrm{i}t}-1)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Σχόλιο: Η $\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{\mathrm{i}t}-1)}$ υπάρχει για *κάθε* $t \in \mathbb{R}$, ενώ η αντίστοιχη ροπογεννήτρια $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$ υπάρχει μόνο για $t < \infty$ (ορισμένη παντού, αλλά μη φραγμένη). Αυτό είναι τυπικό πλεονέκτημα της χαρακτηριστικής συνάρτησης.

Παράδειγμα 23

Εξαγωγή μέσης τιμής και διακύμανσης από γνωστή χαρακτηριστική — $\mathrm{Exp}(\lambda)$

Παράδειγμα 23: Ροπές μέσω χαρακτηριστικής — $\mathrm{Exp}(\lambda)$

Ο χρόνος αναμονής X (σε λεπτά) σε ταμείο τράπεζας ακολουθεί $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ με χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Να υπολογιστούν η $\mathbb{E}[X]$ και η $\mathrm{Var}(X)$ **αποκλειστικά** μέσω παραγώγων της $\varphi_X(t)$.

Λύση

Πρώτη παράγωγος (κανόνας πηλίκου / αλυσίδας):

$$\varphi_X'(t) = \lambda \cdot \frac{\mathrm{i}}{(\lambda - \mathrm{i}t)^2}.$$

Για $t = 0$:

$$\varphi_X'(0) = \frac{\mathrm{i}\lambda}{\lambda^2} = \frac{\mathrm{i}}{\lambda}.$$

Άρα:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\mathrm{i}}\,\varphi_X'(0) = \frac{1}{\mathrm{i}} \cdot \frac{\mathrm{i}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}. \quad \checkmark$$

Δεύτερη παράγωγος:

$$\varphi_X''(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\mathrm{i}\lambda}{(\lambda - \mathrm{i}t)^2}\right] = \mathrm{i}\lambda \cdot \frac{2\mathrm{i}}{(\lambda - \mathrm{i}t)^3} = \frac{-2\lambda}{(\lambda - \mathrm{i}t)^3}.$$

Για $t = 0$:

$$\varphi_X''(0) = \frac{-2\lambda}{\lambda^3} = \frac{-2}{\lambda^2}.$$

Άρα η δεύτερη ροπή:

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{\mathrm{i}^2}\,\varphi_X''(0) = \frac{1}{-1}\cdot\frac{-2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}. \quad \checkmark$$

Διακύμανση:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \quad \checkmark$$

Επαλήθευση: Για $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ γνωρίζουμε $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$ και $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$. ✓
Σχόλιο: Η μέθοδος αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι γνωστή αλλά ο άμεσος υπολογισμός $\mathbb{E}[X^r] = \int x^r f(x)\,dx$ είναι δυσκολότερος.

Παράδειγμα 24

Αναγνώριση κατανομής μέσω Θεωρήματος Μοναδικότητας

Παράδειγμα 24: Αναγνώριση Διωνυμικής

Ένα ερευνητικό τμήμα παρατηρεί τον αριθμό X επιτυχημένων νέων προϊόντων σε μια σειρά $n = 5$ δοκιμών. Κάποιος ισχυρίζεται ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση του X είναι:

$$\varphi_X(t) = \big(0{,}3 + 0{,}7\,e^{\mathrm{i}t}\big)^5, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(*′) Να αναγνωριστεί η κατανομή του X χρησιμοποιώντας το θεώρημα μοναδικότητας.
(*′) Να επαληθευτεί υπολογίζοντας $\mathbb{E}[X]$ μέσω $\varphi_X'(0)$.
(*′) Να βρεθεί η $\mathrm{Var}(X)$ μέσω $\varphi_X''(0)$.

Λύση

(α) Αναγνώριση κατανομής.
Η χαρακτηριστική συνάρτηση της $\mathrm{Binomial}(n, p)$ είναι γνωστό ότι είναι:

$$\varphi(t) = \big(1 - p + p\,e^{\mathrm{i}t}\big)^n.$$

Η δοθείσα $\varphi_X(t) = (0{,}3 + 0{,}7\,e^{\mathrm{i}t})^5$ έχει τη μορφή αυτή με

$$n = 5, \quad p = 0{,}7, \quad 1 - p = 0{,}3.$$

Από το **θεώρημα μοναδικότητας** (η χαρακτηριστική συνάρτηση καθορίζει μοναδικά την κατανομή):

$$\boxed{X \sim \mathrm{Binomial}(5,\ 0{,}7).}$$

(β) Υπολογισμός $\mathbb{E}[X]$ μέσω $\varphi_X'(0)$.

Ορίζουμε $u(t) = 0{,}3 + 0{,}7e^{\mathrm{i}t}$, οπότε $\varphi_X(t) = [u(t)]^5$.

$$\varphi_X'(t) = 5\,[u(t)]^4 \cdot u'(t), \quad u'(t) = 0{,}7\,\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}t}.$$

Για $t = 0$: $u(0) = 1$, $u'(0) = 0{,}7\,\mathrm{i}$.

$$\varphi_X'(0) = 5 \cdot 1^4 \cdot 0{,}7\,\mathrm{i} = 3{,}5\,\mathrm{i}.$$

Άρα:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\varphi_X'(0)}{\mathrm{i}} = \frac{3{,}5\,\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = 3{,}5 = np = 5 \cdot 0{,}7. \quad \checkmark$$

(γ) Υπολογισμός $\mathrm{Var}(X)$ μέσω $\varphi_X''(0)$.

$$\varphi_X''(t) = 5\big[4\,[u(t)]^3(u'(t))^2 + [u(t)]^4\,u''(t)\big]\,.$$

Επίσης $u''(t) = 0{,}7\,\mathrm{i}^2\,e^{\mathrm{i}t} = -0{,}7\,e^{\mathrm{i}t}$, άρα $u''(0) = -0{,}7$.

$$\begin{aligned}\varphi_X''(0) &= 5\big[4 \cdot 1 \cdot (0{,}7\,\mathrm{i})^2 + 1 \cdot (-0{,}7)\big] \\ &= 5[4 \cdot (-0{,}49) + (-0{,}7)] = 5[-1{,}96 - 0{,}7] = 5 \cdot (-2{,}66) = -13{,}3.\end{aligned}$$

Δεύτερη ροπή:

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{\varphi_X''(0)}{\mathrm{i}^2} = \frac{-13{,}3}{-1} = 13{,}3.$$

Διακύμανση:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 13{,}3 - (3{,}5)^2 = 13{,}3 - 12{,}25 = 1{,}05.$$

Επαλήθευση: Για $X \sim B(5, 0{,}7)$: $\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 1{,}05$. ✓

Παράδειγμα 25

Γραμμικός συνδυασμός ανεξάρτητων κανονικών — Χαρτοφυλάκιο

Παράδειγμα 25: Κανονικότητα γραμ. συνδ. ανεξ. κανονικών

Οι ημερήσιες αποδόσεις (σε %) δύο μετοχών A και B είναι:

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \qquad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), \qquad X \perp Y.$$

Ένας επενδυτής σχηματίζει χαρτοφυλάκιο $Z = aX + bY$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(*′) Να βρεθεί η $\varphi_Z(t)$ και να αναγνωριστεί η κατανομή του Z.

(*′) Εφαρμογή: $\mu_1 = 0{,}8\%$, $\sigma_1^2 = 4$, $\mu_2 = 0{,}5\%$, $\sigma_2^2 = 9$, $a = 0{,}6$, $b = 0{,}4$. Να βρεθούν $\mathbb{E}[Z]$ και $\mathrm{Var}(Z)$.

(*′) Να υπολογιστεί η $P(Z > 1{,}2\%)$ για την εφαρμογή.

Λύση

(α) Εύρεση $\varphi_Z(t)$ και αναγνώριση κατανομής.
Η χαρακτηριστική συνάρτηση της $N(\mu, \sigma^2)$ είναι:

$$\varphi_{N(\mu,\sigma^2)}(t) = e^{\mathrm{i}\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

Επειδή $X \perp Y$ και $Z = aX + bY$, χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες:

$$\begin{aligned}\varphi_Z(t) &= \varphi_{aX+bY}(t) = \varphi_{aX}(t) \cdot \varphi_{bY}(t) \quad \text{(ανεξαρτησία)} \\ &= \varphi_X(at) \cdot \varphi_Y(bt) \quad \text{(γραμμικός μετασχηματισμός: } \varphi_{cW}(t) = \varphi_W(ct)\text{)} \\ &= e^{\mathrm{i}\mu_1(at) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(at)^2} \cdot e^{\mathrm{i}\mu_2(bt) - \frac{1}{2}\sigma_2^2(bt)^2} \\ &= e^{\mathrm{i}(a\mu_1 + b\mu_2)t - \frac{1}{2}(a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)t^2}.\end{aligned}$$

Αυτή είναι ακριβώς η χαρακτηριστική συνάρτηση της κατανομής $N(a\mu_1 + b\mu_2,\ a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$. Από το **θεώρημα μοναδικότητας**:

$$\boxed{Z = aX + bY \ \sim \ N\big(a\mu_1 + b\mu_2,\ a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2\big).}$$

(β) Εφαρμογή αριθμητικά.

$$\mathbb{E}[Z] = a\mu_1 + b\mu_2 = 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}48 + 0{,}20 = 0{,}68\%.$$

$$\mathrm{Var}(Z) = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 = (0{,}6)^2 \cdot 4 + (0{,}4)^2 \cdot 9 = 0{,}36 \cdot 4 + 0{,}16 \cdot 9 = 1{,}44 + 1{,}44 = 2{,}88.$$

Άρα $Z \sim N(0{,}68,\ 2{,}88)$, με τυπική απόκλιση $\sigma_Z = \sqrt{2{,}88} \approx 1{,}697\%$.
(γ) Υπολογισμός $P(Z > 1{,}2\%)$.
Τυποποιούμε:

$$P(Z > 1{,}2) = P\left(\frac{Z - 0{,}68}{1{,}697} > \frac{1{,}2 - 0{,}68}{1{,}697}\right) = P(W > 0{,}307)\,,$$

όπου $W \sim N(0,1)$. Άρα:

$$P(Z > 1{,}2) = 1 - \Phi(0{,}307) \approx 1 - 0{,}6207 = 0{,}3793 \approx 37{,}93\%.$$

Οικονομική ερμηνεία: Υπάρχει πιθανότητα περίπου 38% το χαρτοφυλάκιο να αποδώσει πάνω από 1,2% σε μια τυχαία ημέρα. Το θεώρημα μοναδικότητας μας επιτρέπει να αξιοποιήσουμε τις πίνακες της κανονικής — χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε εκ νέου τη συνάρτηση πυκνότητας του Z.

Γενίκευση

Το αποτέλεσμα επεκτείνεται αμέσως: αν $X_1, \ldots, X_n$ είναι *ανεξάρτητες* κανονικές τ.μ. και $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, τότε

$$\sum_{j=1}^{n} c_j X_j \sim N\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \mu_j, \sum_{j=1}^{n} c_j^2 \sigma_j^2\right).$$

Η απόδειξη είναι ακριβώς η ίδια: πολλαπλασιασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων και εφαρμογή του θεωρήματος μοναδικότητας.