

# Θεωρήματα Πιθανοτήτων στην Οικονομία

Παραδείγματα με Οικονομικές Εφαρμογές

## Παράδειγμα 1: Θεώρημα Radon-Nikodym — Τιμολόγηση Δικαιώματος Bitcoin

### Οικονομικό Πλαίσιο

Στην Οικονομία εργαζόμαστε σε δύο διαφορετικούς «κόσμους» (μέτρα):

- **Πραγματικός Κόσμος ( $P$ ):** Παρατηρούμε τις πραγματικές ιστορικές τιμές και πιθανότητες.
- **Κόσμος Χωρίς Κίνδυνο ( $\tilde{P}$ ):** Οι τιμές προσαρμόζονται ώστε να αυξάνονται με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (risk-free rate).

Η **Παράγωγος Radon-Nikodym** αποτελεί τη «γέφυρα» μεταξύ των δύο κόσμων.

### Ρύθμιση Προβλήματος

#### 1. Μέτρο Πραγματικού Κόσμου ( $P$ ):

$$P(u) = 0,5 \quad P(d) = 0,5$$

#### 2. Μέτρο Χωρίς Κίνδυνο ( $\tilde{P}$ ):

$$\tilde{P}(u) = 0,3 \quad \tilde{P}(d) = 0,7$$

### Παραγωγή

**Εύρεση Παραγώγου Radon-Nikodym ( $H$ ) — χρησιμοποιούμε  $\tilde{P}(A) = H \cdot P(A)$ :**

Κατάσταση Ανόδου ( $u$ ):

$$0,3 = H(u) \cdot 0,5 \quad \implies \quad H(u) = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$$

Κατάσταση Καθόδου ( $d$ ):

$$0,7 = H(d) \cdot 0,5 \quad \implies \quad H(d) = \frac{0,7}{0,5} = 1,4$$

**Οικονομική Ερμηνεία:** Η συνάρτηση  $H$  λειτουργεί ως «βάρος». Η αγορά «ανησυχεί» για σενάριο πτώσης, οπότε η παράγωγος Radon-Nikodym ενισχύει την πιθανότητα καθόδου ( $1,4\times$ ) και μειώνει την πιθανότητα ανόδου ( $0,6\times$ ).

## Παράδειγμα 2: Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας – Πρόβλεψη Ύφεσης

### Οικονομικό Πλαίσιο

Ένας οικονομολόγος σε Κεντρική Τράπεζα υπολογίζει τη **συνολική πιθανότητα ύφεσης** ( $R$ ) για τον επόμενο χρόνο. Η ύφεση εξαρτάται από το επιτοκιακό περιβάλλον.

### Ρύθμιση Προβλήματος

**Κατανομή χώρου (αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα):**

$$P(B_1) = 0,20 \text{ (Υψηλά Επιτόκια)}, \quad P(B_2) = 0,50 \text{ (Σταθερά)}, \quad P(B_3) = 0,30 \text{ (Χαμηλά)}$$

**Δεσμευμένες πιθανότητες ύφεσης:**

$$P(R | B_1) = 0,40, \quad P(R | B_2) = 0,10, \quad P(R | B_3) = 0,05$$

### Παραγωγή

**Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**

$$\begin{aligned} P(R) &= \sum_{i=1}^3 P(R | B_i) P(B_i) \\ &= (0,40)(0,20) + (0,10)(0,50) + (0,05)(0,30) \\ &= 0,080 + 0,050 + 0,015 \\ &= \boxed{0,145 \quad (14,5\%)} \end{aligned}$$

**Οικονομική Ερμηνεία:** Αν και τα υψηλά επιτόκια αυξάνουν δραστικά τον κίνδυνο ύφεσης, η χαμηλή πιθανότητα εμφάνισής τους και η κυριαρχία σταθερών επιτοκίων στο μίγμα συμπιέζουν τη συνολική πιθανότητα στο 14,5%.

## Παράδειγμα 3: Θεώρημα Bayes – Πρόβλεψη Αθέτησης Δανείου

### Οικονομικό Πλαίσιο

Μια τράπεζα χρησιμοποιεί σήμα πιστωτικής υγείας ( $S$ ). Ζητείται η πιθανότητα αθέτησης ( $D$ ) δεδομένου ότι ο δανειολήπτης χαρακτηρίστηκε «Υψηλού Κινδύνου».

### Ρύθμιση Προβλήματος

#### Εκ των Προτέρων Πιθανότητες:

$$P(D) = 0,02, \quad P(D^c) = 0,98$$

#### Πιθανοφάνεια:

$$P(S | D) = 0,90 \quad (\text{σωστός εντοπισμός}), \quad P(S | D^c) = 0,05 \quad (\text{ψευδώς θετικό})$$

### Παραγωγή

#### Βήμα 1 – Ολική πιθανότητα σήματος $P(S)$ :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S | D) P(D) + P(S | D^c) P(D^c) \\ &= (0,90)(0,02) + (0,05)(0,98) = 0,018 + 0,049 = 0,067 \end{aligned}$$

#### Βήμα 2 – Εφαρμογή Θεωρήματος Bayes:

$$P(D | S) = \frac{P(S | D) P(D)}{P(S)} = \frac{0,90 \times 0,02}{0,067} = \frac{0,018}{0,067} \approx \boxed{0,2687 \quad (26,9\%)}$$

**Οικονομική Ερμηνεία – Παράδοξο της Βάσης:** Παρόλο που το σήμα εντοπίζει σωστά το 90% των αθετήσεων, αν σημάνει συναγερμό η πιθανότητα πραγματικής αθέτησης είναι μόλις 26,9%. Το τεράστιο πλήθος «καλών» δανειοληπτών (98%) δημιουργεί πολλούς ψευδώς θετικούς συναγερμούς, ακόμα και με χαμηλό σφάλμα 5%. Γι' αυτό οι τράπεζες συνδυάζουν το σήμα με επιπλέον ελέγχους.