

Εκτιμητική

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

Μέθοδος των Ροπών

Η Γενικευμένη Μέθοδος των Ροπών

Ιδιότητες εκτιμητή GMM

- ▶ Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την σημειακή εκτίμηση
- ▶ Ο εκτιμητής σημείου (σημειακός εκτιμητής) είναι η τιμή ενός στατιστικού μεγέθους ενός δείγματος που χρησιμοποιείται απευθείας ως προσέγγιση της αντίστοιχης παραμέτρου του πληθυσμού.

- ▶ Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε μια παράμετρο θ μιας τυχαία μεταβλητή X .
- ▶ Μια συνάρτηση των παρατηρήσεων του δείγματος που δίνει εκτιμήσεις της παραμέτρου θ του πληθυσμού, ονομάζεται εκτιμητής.
- ▶ Η διαφορά μεταξύ της τιμής του εκτιμητή για ένα δεδομένο δείγμα και της αληθινής τιμής της παραμέτρου στον πληθυσμό ονομάζεται σφάλμα δειγματοληψίας
- ▶ Η διαφορά της προσδοκώμενης τιμής και της αληθινής τιμής της παραμέτρου θ ονομάζεται σφάλμα μεροληψίας.
- ▶ Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE) ενός εκτιμητή είναι μέτρο της διασποράς των τιμών του γύρω από την αληθινή τιμή της παραμέτρου θ .

Με ποια κριτήρια θα επιλέξουμε τον εκτιμητή;

Τα κριτήρια βασίζονται σε ορισμένες ιδιότητες των εκτιμητών:

- ▶ Ιδιότητες μικρών δειγμάτων.
- ▶ Ιδιότητες μεγάλων δειγμάτων ή ασυμπτωτικές ιδιότητες.

Ιδιότητες μικρών δειγμάτων-Ιδιότητες εκτιμητών

- ▶ Ένας αμερόληπτος εκτιμητής (unbiased estimator) μιας παραμέτρου ενός πληθυσμού είναι ένας εκτιμητής η αναμενόμενη τιμή του οποίου ισούται με την τιμή της παραμέτρου του πληθυσμού.
- ▶ Ένας αμερόληπτος εκτιμητής λέγεται ότι είναι συνεπής (consistent), αν η διαφορά μεταξύ της τιμής του εκτιμητή και της τιμής της παραμέτρου (πληθυσμιακής) μειώνεται όσο μεγαλώνει το μέγεθος του δείγματος.
- ▶ Εάν υπάρχουν δύο αμερόληπτοι εκτιμητές μιας παραμέτρου, αυτός που έχει την μικρότερη διακύμανση λέγεται ότι είναι σχετικά αποδοτικός (relative efficient).

Αμεροληψία:

Ένας εκτιμητής $\hat{\theta}$ είναι αμερόληπτος αν $E(\hat{\theta}) = \theta$

Εάν ο εκτιμητής $\hat{\theta}$ δεν είναι αμερόληπτος τότε είναι μεροληπτικός με σφάλμα μεροληψίας

$$bias(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

- ▶ Αν $bias(\hat{\theta}) > 0$, τότε ο εκτιμητής $\hat{\theta}$ υπερεκτιμά την παράμετρο θ
- ▶ Αν $bias(\hat{\theta}) < 0$, τότε ο εκτιμητής $\hat{\theta}$ υποεκτιμά την παράμετρο θ

Αποτελεσματικότητα:

Ένας εκτιμητής $\hat{\theta}$ λέγεται αποτελεσματικός εκτιμητής της παραμέτρου θ εάν είναι αμερόληπτος και έχει τη μικρότερη διακύμανση μεταξύ όλων των αμερόληπτων εκτιμητών της θ .

Σχετική αποτελεσματικότητα (Relative Efficiency) του εκτιμητή $\hat{\theta}_1$ ως προς τον εκτιμητή $\hat{\theta}_2$:

$$RE = \frac{Var(\hat{\theta}_1)}{Var(\hat{\theta}_2)}$$

Συνέπεια (consistency) :

Μια εκτιμήτρια (μια στατιστική συνάρτηση) $\hat{\theta}_n$ είναι μια συνεπής εκτιμήτρια μιας παραμέτρου θ του πληθυσμού (consistent estimator) αν για μια οποιαδήποτε πολύ μικρή θετική τιμή ϵ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \epsilon) = 1$$

Το οποίο σημαίνει ότι με πιθανότητα 1 (δηλαδή τελικά ή σχεδόν με βεβαιότητα (almost surely)), μια συνεπής εκτιμήτρια της παραμέτρου θα δώσει μια εκτίμηση πάρα πολύ κοντά στην πραγματική τιμή της παραμέτρου (με απόκλιση $\pm \epsilon$) όταν το n είναι μεγάλο.

Ανισότητα Cramer-Rao

Κάτω από αρκετά γενικές συνθήκες, η διακύμανση ενός αμερόληπτου εκτιμητή $\hat{\theta}$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq [I(\theta)]^{-1}$$

όπου

$$I = -E \left[\left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial^2 \theta} \right) \right]$$

ονομάζεται η πληροφορία του δείγματος.

Εκτιμητής με ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα:

$$MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = Var(\hat{\theta}) + bias(\hat{\theta})^2$$

Επάρκεια:

Έστω η τ.μ. $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ με συνάρτηση πιθανότητας (ή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας) $f(x, \theta)$ και $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ είναι μια στατιστική συνάρτηση της τ.μ. X . Τότε λέμε ότι η T είναι στατιστικά επαρκής για το θ εάν η δεσμευμένη κατανομή της X , δοθέντος ότι $T = t$, είναι ανεξάρτητη του θ , για όλες τις τιμές του t για τις οποίες ορίζεται η δεσμευμένη κατανομή.

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | T = t, \theta) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | T = t)$$

Ασυμπτωτικές Ιδιότητες

Ασυμπτωτική αμεροληψία:

Ο εκτιμητής $\hat{\theta}_n$ είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτος αν το σφάλμα μεροληψίας του τείνει στο μηδέν καθώς $n \rightarrow \infty$, δηλαδή θα έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [E(\hat{\theta}_n) - \theta] = 0.$$

ή αλλιώς

$$E(\hat{\theta}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta$$

Συνέπεια:

Ο εκτιμητής $\hat{\theta}$ είναι συνεπής εκτιμητής του θ αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \epsilon) = 0, \text{ για κάθε } \epsilon > 0.$$

Ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα:

Ένας εκτιμητής $\hat{\theta}$ της παραμέτρου θ , η ασυμπτωτική κατανομή του οποίου έχει πεπερασμένο μέσο και πεπερασμένη διακύμανση, ονομάζεται ασυμπτωτικά αποτελεσματικός (asymptotically efficient), αν είναι συνεπής και η διακύμανση της ασυμπτωτικής του κατανομής είναι μικρότερη από τη διακύμανση της ασυμπτωτικής κατανομής οποιουδήποτε άλλου συνεπή εκτιμητή

Ασυμπτωτική κανονικότητα:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_\theta^2)$$

Μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας

Η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood-ML) αποτελεί μία τεχνική σημειακής εκτιμήσεως για μία άγνωστη παράμετρο θ ή γενικότερα για μία άγνωστη τιμή $g(\theta)$.

(Στην ανάλυση μας υποθέτουμε ότι η κατανομή που ακολουθούν τα δεδομένα μας είναι η κανονική, αλλά όμως μπορούμε να θεωρήσουμε και άλλες κατανομές, όπως είναι η t-student.)

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν διάφορες μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό σημειακών εκτιμητριών. Οι κυριότερες από τις μεθόδους αυτές είναι:

- ▶ Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων (method of least squares-LS)
- ▶ Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας (method of maximum likelihood estimation-MLE)
- ▶ Μέθοδος των ροπών (method of moments)
- ▶ Γενικευμένη μέθοδος των ροπών (Generalized method of moments-GMM)

Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ από πληθυσμό το οποίο έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x_i; \theta)$. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας (likelihood) ορίζεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} L(\theta) &= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n; \theta) \\ &= f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \cdots f(x_n; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta). \end{aligned}$$

Ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας (ΕΜΠ) $\hat{\theta}$ είναι η τιμή του θ η οποία μεγιστοποιεί την συνάρτηση πιθανοφάνειας.

και ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας (log-likelihood) ορίζεται ως εξής

$$l(\theta) = \log L(\theta) = \log \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i; \theta).$$

Ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας έχει την ιδιότητα ότι η τιμή του θ που μεγιστοποιεί την $l(\theta)$ μεγιστοποιεί και την $L(\theta)$.

Πως υπολογίζεται ο ΕΜΠ;

- ▶ Μέσω της συνθήκης πρώτης τάξης, δηλαδή λύνουμε ως προς θ την εξίσωση (ή το σύστημα)

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0,$$

Συμπληρωματικά θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2} < 0,$$

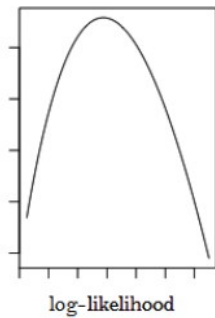
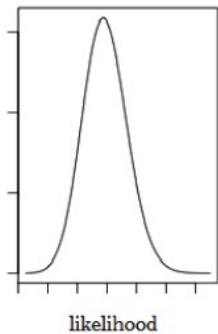
- ▶ Κατά την εύρεση του μέγιστου της πιθανοφάνειας $L(\theta)$ υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις:
 - Να μην υπάρχει πεπερασμένο μέγιστο.
 - Να υπάρχει ακριβώς μια μέγιστη τιμή.
 - Να υπάρχουν περισσότερες από μια μέγιστες τιμές.

Ορισμός

Μία εκτιμήτρια $\hat{\theta}$ θα καλείται εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας (MLE) της παραμέτρου (ή των παραμέτρων) θ αν ισχύει ότι

$$L(\hat{\theta}) = \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta) = \sup f(X_1, X_2, \dots, X_N; \theta).$$

Η ΕΜΠ του θ είναι η τιμή του εκείνη για την οποία το ενδεχόμενο X έχει τη μεγαλύτερη δυνατή πιθανότητα κάτω από το συγκεκριμένο υπόδειγμα.



Παράδειγμα I

Έστω ότι $X_1, X_2, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από ένα πληθυσμό που ακολουθεί την Γεωμετρική κατανομή με παράμετρο θ . Να υπολογιστεί ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας για την άγνωστη παράμετρο θ .

Απάντηση:

Επειδή $X_i \sim \text{Geometric}(\theta)$ τότε

$$P_{X_i}(x; \theta) = (1 - \theta)^{x-1} \theta.$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας θα είναι

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) &= P_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) \\ &= P_{X_1}(x_1; \theta) P_{X_2}(x_2; \theta) \cdots P_{X_n}(x_n; \theta) \\ &= (1 - \theta)^{[\sum_{i=1}^n x_i - n]} \theta^n. \end{aligned}$$

Παράδειγμα II

και η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \left(\sum_{i=1}^n x_i - n \right) \ln(1 - \theta) + n \ln \theta.$$

Επομένως

$$\frac{d \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)}{d\theta} = \left(\sum_{i=1}^n x_i - n \right) \cdot \frac{-1}{1 - \theta} + \frac{n}{\theta}.$$

Ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας θα είναι η λύση της εξίσωσης

$$\begin{aligned} \frac{d \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)}{d\theta} &= 0 \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i - n \right) \cdot \frac{-1}{1 - \theta} + \frac{n}{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Παράδειγμα III

Άρα

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}.$$

- ▶ Οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας (ΕΜΠ) έχουν τη μικρότερη απόκλιση στην κατηγορία των συνεπών και ασυμπτωτικά κανονικών εκτιμητών. Το μειονέκτημα είναι ότι χρειαζόμαστε πλήρη περιγραφή της διαδικασίας από την οποία προέρχονται τα δεδομένα (data generating process-DGP) και σωστό προσδιορισμό.
- ▶ Η μέθοδος των ροπών βασίζεται στην αρχή ότι μια πληθυσμιακή ροπή μπορεί να εκτιμηθεί από την αντίστοιχη δειγματική ροπή.

Μέθοδος των Ροπών (Method of Moments) I

Η διαδικασία της μεθόδου των ροπών είναι η εξής:

1. Υπολογίζω τις (πληθυσμιακές) ροπές μέχρι την r τάξη (μ'_r) ανάλογα με τον αριθμό των παραμέτρων που θέλω να εκτιμήσω ($r = 1, 2, \dots$)

Διακριτή κατανομή:

$$\mu'_r = E(X^r) = \sum_{i=1}^n x^r P(X = x)$$

Συνεχής κατανομή:

$$\mu'_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx$$

Μέθοδος των Ροπών (Method of Moments) II

2. Υπολογίζω τις δειγματικές ροπές μέχρι την r τάξη που υπολόγισα στις πληθυσμιακές ροπές:

$$m_r = E(X^r) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^r}{n}.$$

3. Εξισώνω τις πληθυσμιακές ροπές r τάξης με τις αντίστοιχες δειγματικές.

$$\mu'_r = m_r.$$

Έχουμε τόσες ροπές (εξισώσεις) όσο είναι και ο αριθμός των παραμέτρων που θέλουμε να εκτιμήσουμε

Παράδειγμα: I

Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους μ και σ^2 της κανονικής κατανομής με τη μέθοδο των ροπών. Είναι

$$\mu'_1 = E(X) = \mu \quad \text{και} \quad \mu'_2 = E(X^2)$$

Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \dots, X_n$. Οι αντίστοιχες δειγματικές ροπές θα είναι

$$m_1 = E(X) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad \text{και} \quad m_2 = E(X^2) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}.$$

Επομένως,

$$\mu = \bar{X} \quad \text{και} \quad \sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = \mu'_2 - \mu^2 \Rightarrow \mu^2 + \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

Παράδειγμα: II

Λύνοντας το σύστημα αυτών των εξισώσεων ως προς μ και σ^2 , έχουμε

$$\hat{\mu} = \bar{X} \text{ και}$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \hat{\mu}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + n\bar{X}^2 - 2n\bar{X}^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i - \bar{X} \right)^2\end{aligned}$$

Άσκηση 1 |

Έστω ένα τυχαίο δείγμα $X_1, \dots, X_n$ από μια κατανομή με σ.π.π. $f(x; \alpha, \beta)$. Να βρεθούν οι εκτιμήτριες ροπών των παραμέτρων α, β υποθέτωντας ότι $E(X_i) = \alpha - \beta$ και $\text{Var}(X_i) = 4\alpha\beta$, $\alpha, \beta > 0$.

Απάντηση: Θέλουμε να εκτιμήσουμε τις δύο άγνωστες παραμέτρους της κατανομής και επομένως θα πάρουμε δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους για τις ροπές. Για τη 1η ροπή θα είναι $m_1 = \mu'_1$ και για τη 2η $m_2 = \mu'_2$. Επομένως

$$m_1 = \mu'_1 \Leftrightarrow m_1 = E(X_i) \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \alpha - \beta \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \beta.$$

Άσκηση 1 II

$$m_2 = \mu'_2 \Leftrightarrow m_2 = E(X_i^2) \Leftrightarrow m_2 = \text{Var}(X_i) + E(X_i)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 4\alpha\beta + (\alpha - \beta)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = (\alpha + \beta)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} = \alpha + \beta \Leftrightarrow$$

$$2\beta = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

και επομένως

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

- ▶ Η Μέθοδος των ροπών μπορεί να εφαρμοστεί όταν ο αριθμός των συνθηκών στις ροπές είναι ίσος με τον αριθμό των υπό εκτίμηση παραμέτρων.
- ▶ Αν είναι περισσότερες οι συνθήκες από τις παραμέτρους για εκτίμηση τότε το σύστημα των εξισώσεων δεν μπορεί να λυθεί.
- ▶ Η περίπτωση όπου ο αριθμός των συνθηκών είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των παραμέτρων ονομάζεται υπερταυτοποίηση (overidentification).

Γενικευμένη Μέθοδος των Ροπών

- ▶ Η Γενικευμένη μέθοδος των ροπών (Generalized Method of Moments-GMM) επιλέγει τις παραμέτρους οι οποίες ελαχιστοποιούν μια τετραγωνική μορφή των συνθηκών στις ροπές. Ανήκει στη κατηγορία των εκτιμητών ελάχιστης απόστασης (minimum distance estimators).
- ▶ Η Γενικευμένη μέθοδος των ροπών ισούται με την μέθοδο των ροπών όταν ο αριθμός των συνθηκών στις ροπές είναι ίσος με τον αριθμό των υπό εκτίμηση παραμέτρων.

- ▶ Η γενικευμένη μέθοδος ροπών είναι κατάλληλη σε περιπτώσεις όπου πχ το οικονομικό μοντέλο είναι περίπλοκο ή όταν θέλουμε να αποφύγουμε τις υπολογιστικές δυσκολίες με την MLE.
- ▶ Με την GMM οι συνθήκες ροπών επιλύονται κατά προσέγγιση.

Ο εκτιμητής GMM I

Έστω ότι οι ροπές είναι $m(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i(\theta)$.

Ο εκτιμητής GMM για την παράμετρο θ θα είναι τέτοιος ώστε να ελαχιστοποιείται η τετραγωνική απόσταση του διανύσματος των δειγματικών ροπών από τις θεωρητικές τιμές τους. Δηλαδή να βρεθεί το θ που ελαχιστοποιεί

$$\min_{\theta} Q(\theta) = \min_{\theta} m(\theta)'W^{-1}m(\theta) \quad (1)$$

ή αλλιώς

$$\hat{\theta}^{GMM} = \arg \min_{\theta} m(\theta)'W^{-1}m(\theta) \quad (2)$$

όπου W είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας.

Ο εκτιμητής GMM II

Πληθυσμιακή συνθήκη ροπών

$$E[m(x_i, \theta_0)] = 0, \forall i \in T \quad (3)$$

Οι εκτιμήσεις για τον εκτιμητή GMM βασίζονται στις εμπειρικές ροπές

$$m_i = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T m(x_i, \theta_0). \quad (4)$$

- ▶ Ο πίνακας W είναι ένας συνεπής εκτιμητής για τον πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων του διανύσματος $\sqrt{n}m$.
- ▶ Ο πίνακας W είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας αν και μόνο αν $\lim_{n \rightarrow \infty} m(\theta) = \mathbf{0}$, τότε ο εκτιμητής GMM του θ είναι συνεπής.
- ▶ Η ασυμπτωτική κατανομή του εκτιμητή $\hat{\theta}^{GMM}$ είναι

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}^{GMM} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, V).$$

Η ασυμπτωτική διακύμανση V είναι

$$V = (DWD')^{-1},$$

όπου

$$D = E\left(\frac{\partial m(\theta)}{\partial \theta'}\right).$$

Μπορούμε να βρούμε τον εκτιμητή λύνοντας τις K εξισώσεις

$$\frac{\partial Q(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial (m(\theta)' W^{-1} m(\theta))}{\partial \theta} = 0$$

Ιδιότητες εκτιμητή GMM

Κάτω από γενικές συνθήκες για ένα δοσμένο πίνακα στάθμισης (weighted matrix) W ο εκτιμητής GMM είναι

- ▶ Συνεπής
- ▶ Ασυμπτωτικά κανονικός

Άσκηση 1

Υποθέτουμε ότι οι παρακάτω απώλειες σε χιλιάδες δολάρια παρατηρούνται από μια κατανομή Γάμμα:

200, 300, 350, 400

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την κατανομή Γάμμα είναι

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}, \quad x, \theta, \alpha > 0.$$

Δεδομένου ότι $E(x) = \alpha\theta$ και $E(X^2) = \alpha(\alpha + 1)\theta^2$, να υπολογιστεί η παράμετρος α με τη μέθοδο των ροπών.

Απάντηση I

Η δειγματική πρώτη και δεύτερη ροπή υπολογίζονται ως εξής:

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{4}(200 + 300 + 350 + 400) = 325$$

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{1}{4}(200^2 + 300^2 + 350^2 + 400^2) = 113750.$$

Για να εφαρμόσω τη μέθοδο των ροπών εξισώνω τις πληθυσμιακές με τις δειγματικές ροπές:

$$\mu'_1 = E(X) = m_1$$

$$\mu'_2 = E(X^2) = m_2$$

Απάντηση II

Είναι

$$\begin{cases} E(X) = m_1 \\ E(X^2) = m_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\theta = 325 \\ \alpha(\alpha+1)\theta^2 = 113750 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 325/\theta \\ \alpha(\alpha+1)\theta^2 = 113750 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = 325/\alpha \\ \alpha(\alpha+1)(\frac{325}{\alpha})^2 = 113750 \end{cases}$$

Είναι

$$\alpha(\alpha+1)\frac{105625}{\alpha^2} = 113750 \Leftrightarrow \frac{\alpha+1}{\alpha} = 1,0769$$
$$\Leftrightarrow 1 = 0,0769\alpha \Leftrightarrow \alpha = 13.$$

Άσκηση 2

Δίνονται οι παρακάτω απαιτήσεις σε εκατοντάδες δολάρια

4, 5, 21, 99, 421

Υποθέτοντας ότι προέρχονται από κατανομή Pareto να υπολογιστούν με τη μέθοδο των ροπών οι παράμετροι α, θ της κατανομής. (Σημείωση: Δίνεται ότι η συνάρτηση κατανομής είναι

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{\theta + x} \right)^\alpha, \text{ για } x \geq 0$$

και ότι $E[(X + \theta)^k] = \frac{\alpha \theta^k}{\alpha - k}$.

Απάντηση Ι

Αρχικά θα υπολογίσουμε τις πρώτες δύο ροπές από τη σχέση $E[(X + \theta)^k] = \frac{\alpha\theta^k}{\alpha - k}$.

Για τη 1η ροπή ($k = 1$) είναι:

$$E(X) = E(X + \theta) - \theta = \frac{\alpha\theta}{\alpha - 1} - \theta = \frac{\alpha\theta - \theta(\alpha - 1)}{\alpha - 1} = \frac{\theta}{\alpha - 1}.$$

Απάντηση II

Για τη 2η ροπή ($k = 2$) είναι:

$$\begin{aligned}E[(X + \theta)^2] &= \frac{\alpha\theta^2}{\alpha - 2} \Leftrightarrow E[X^2 + \theta^2 + 2\theta X] = \frac{\alpha\theta^2}{\alpha - 2} \\ \Leftrightarrow E(X^2) + \theta^2 + 2\theta E(X) &= \frac{\alpha\theta^2}{\alpha - 2} \Leftrightarrow E(X^2) = \frac{\alpha\theta^2}{\alpha - 2} - \theta^2 - 2\theta E(X) \\ \Rightarrow E(X^2) &= \frac{\alpha\theta^2}{\alpha - 2} - \theta^2 - 2\theta \frac{\theta}{\alpha - 1} \\ &= \frac{\alpha\theta^2(\alpha - 1) - \theta^2(\alpha - 1)(\alpha - 2) - 2\theta^2(\alpha - 2)}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} \\ &= \frac{2\theta^2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}.\end{aligned}$$

Απάντηση III

Στη συνέχεια για να εφαρμόσω τη μέθοδο των ροπών εξισώνω τις πληθυσμιακές με τις δειγματικές ροπές:

$$\begin{cases} E(X) = m_1 \\ E(X^2) = m_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\theta}{\alpha-1} = \bar{x} = 110 \\ \frac{2\theta^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} = \frac{4^2+5^2+21^2+99^2+421^2}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\theta}{\alpha-1} = 110 \\ \frac{2\theta^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} = 37504,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = 110(\alpha-1) \\ \frac{2[110(\alpha-1)]^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} = 37504,8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta = 110(\alpha-1) \\ \frac{2*110^2(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} = 37504,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = 110(\alpha-1) \\ \frac{(\alpha-1)}{(\alpha-2)} = \frac{37504,8}{2*110^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta = 310,08 \\ \alpha = 3,819. \end{cases}$$

Άσκηση 3

Έστω τυχαίο δείγμα $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ από απαιτήσεις μιας ασφαλιστικής εταιρείας για το οποίο δίνονται τα εξής:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 3860 \text{ και } \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 4.574.802.$$

Επίσης το τυχαίο δείγμα προέρχεται από πληθυσμό που ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή με παραμέτρους μ και σ . Να υπολογιστούν με τη μέθοδο των ροπών οι παράμετροι μ και σ .

Απάντηση 1

Για την λογαριθμοκανονική κατανομή ξέρουμε ότι η πρώτη και η δεύτερη πληθυσμιακή ροπή δίνονται από τις σχέσεις

$$E(X) = \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2) \text{ και } E(X^2) = \exp(2\mu + 2\sigma^2)$$

αντίστοιχα. Είναι

$$\begin{cases} E(X) = \exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2}) = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{n} = \frac{3860}{10} = 386 \\ E(X^2) = \exp(2\mu + 2\sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{n} = \frac{4.574.802}{10} = 457.480,2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln[\exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2})] = \ln(386) = 5,95 \\ \ln[\exp(2\mu + 2\sigma^2)] = \ln(457.480,2) = 13,033 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu + \frac{\sigma^2}{2} = 5,95 \\ 2\mu + 2\sigma^2 = 13,033 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 5,95 - \frac{\sigma^2}{2} \\ 2(5,95 - \frac{\sigma^2}{2}) + 2\sigma^2 = 13,033 \end{cases}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mu = 5,95 - \frac{\sigma^2}{2} \\ 2(5,95 - \frac{\sigma^2}{2}) + 2\sigma^2 = 13,033 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 5,95 - \frac{\sigma^2}{2} \\ 11,9 + \sigma^2 = 13,033 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 5,39 \\ \sigma^2 = 1,133 \end{cases} \end{aligned}$$

Επιπλέον βιβλιογραφία:

- 1) Pishro-Nik, H. (2016). Introduction to probability, statistics, and random processes.
- 2) Larsen, R. J., & Marx, M. L. (2005). An introduction to mathematical statistics. Hoboken, NJ: Prentice Hall.
- 3) Παπαδόπουλος Γ.Κ. (2015). Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική. Εκδόσεις Gutenberg
- 4) Πανάρετος Ι. & Ξεκαλάκη Ε. (2000): Εισαγωγή στη Στατιστική Σκέψη, τόμος II (Εκτιμητική και Έλεγχοι Υποθέσεων)
<http://www2.stat-athens.aueb.gr/~jpan/statistiki-skepsi-II/Index.html>