

Τυχαία Διανύσματα και Από Κοινού Κατανομές

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Διακριτά τυχαία διανύσματα

Συνεχή τυχαία διανύσματα

Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

Διδιάστατες διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Μέση τιμή και διασπορά συνάρτησης δύο τυχαίων μεταβλητών

Δεσμευμένες κατανομές και μέσες τιμές

Διδιάστατες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Μέση τιμή και διασπορά συνάρτησης δύο τυχαίων μεταβλητών

Δεσμευμένες κατανομές και μέσες τιμές

Τυχαίο διάνυσμα

Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και η συνάρτηση $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Τότε το $\mathbf{X}$ είναι ένα n -διάστατο τυχαίο διάνυσμα αν για κάθε σύνολο Borel, $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, ισχύει ότι

$$\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{B}) = \{\omega \in \Omega \mid \mathbf{X}(\omega) \in \mathbf{B}\}$$

ανήκει στο χώρο ενδεχομένων $\mathcal{F}$.

Παρατήρηση: Γενικά, το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ μπορούμε να το θεωρήσουμε ως μια n -άδα $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ τυχαίων μεταβλητών, όπου $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$

Σημείωση: Το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ μετατρέπει το χώρο Borel $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ σε ένα χώρο πιθανότητας $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P_{\mathbf{X}})$. Η πιθανότητα $P_{\mathbf{X}}$ ορίζεται πάνω στη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ μέσω της παρακάτω σχέσης

$$P_{\mathbf{X}}(\mathbf{B}) = P(\{\omega \in \Omega | \mathbf{X}(\omega) \in \mathbf{B}\}), \mathbf{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Συνάρτηση κατανομής

- ▶ Τυχαίο διάνυσμα: $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$
- ▶ $F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$
- ▶ $F_{\mathbf{X}}(x) = P_{\mathbf{X}}((-\infty, \mathbf{x}]), x \in \mathbb{R}^n$
- ▶ Η τιμή $F_{\mathbf{X}}(x)$ της συνάρτησης κατανομής $F_{\mathbf{X}}$ στο σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ έχει την παρακάτω ερμηνεία

$$F_{\mathbf{X}}(x) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$$

- ▶ Η συνάρτηση $F_{\mathbf{X}}$ ονομάζεται συνάρτηση κατανομής του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X}$ ή από κοινού συνάρτηση κατανομής των τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= P_{\mathbf{X}}((-\infty, \mathbf{x}]) = P(\{\omega \in \Omega | \mathbf{X}(\omega) \in (-\infty, \mathbf{x}]\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega | X_1(\omega) \leq x_1, X_2(\omega) \leq x_2, \dots, X_n(\omega) \leq x_n\}) \\ &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n). \end{aligned}$$

Διακριτό τυχαίο διάνυσμα

Ορισμός:

Ένα τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ θα λέγεται διακριτό αν το σύνολο των τιμών $R(\mathbf{X}) \subset \mathbb{R}^n$, του $\mathbf{X}$ είναι είτε πεπερασμένο είτε αριθμήσιμα άπειρο. Ισοδύναμα, το διάνυσμα $\mathbf{X}$ θα λέγεται διακριτό αν όλες οι συνιστώσες $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές.

Η στήριξη $T_{\mathbf{X}}$ του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X}$ είναι το υποσύνολο του $R(\mathbf{X})$ (ή αλλιώς $R_{\mathbf{X}}$) του οποίου τα στοιχεία έχουν μη μηδενική πιθανότητα, δηλαδή

$$T_{\mathbf{X}} = \{\mathbf{x}_j \in R_{\mathbf{X}} | P(\mathbf{X} = \mathbf{x}_j) > 0\}.$$

Από κοινού συνάρτηση πιθανότητας

Ορισμός:

Η συνάρτηση πιθανότητας ενός διακριτού τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι η συνάρτηση $f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ η οποία ορίζεται ως

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n),$$
$$\text{αν } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in T_{\mathbf{X}}$$

και ισχύει ότι

$$\sum_j f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j) = 1$$

Συνεχή τυχαία διανύσματα

Ορισμός:

Ένα τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ θα λέγεται συνεχές αν υπάρχει μια αρνητική, Borel-μετρήσιμη, συνάρτηση $f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, τέτοια ώστε

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{(-\infty, \mathbf{x}]} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Η $f_{\mathbf{X}}$ στην περίπτωση αυτή, ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του συνεχούς τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X}$ ή αλλιώς από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των συνεχών τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Παρατηρήσεις

- ▶ Το ολοκλήρωμα στην σχέση (1) είναι ένα ολοκλήρωμα Lebesgue-Stieltjes
- ▶ Η σχέση (1) γράφεται ως πολλαπλό ολοκλήρωμα Riemann ως εξής

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_n dt_{n-1} \dots dt_1$$



$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

- ▶ Είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1$$

- ▶ Το σύνολο $T_{\mathbf{X}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) > 0\}$ είναι η στήριξη του συνεχούς τυχαίου διανύσματος
- ▶ Οποιαδήποτε συνάρτηση $f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ είναι τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}^n} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κάποιου συνεχούς τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X}$

Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές I

Ορισμός

Έστω οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_n$ ορισμένες στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Τότε οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ θα λέγονται ανεξάρτητες αν για κάθε $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει ότι

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdot P(X_2 \in B_2) \cdot \dots \cdot P(X_n \in B_n).$$

Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές II

(Εναλλακτικά:)

Ορισμός

Έστω οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_n$ ορισμένες στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Τότε οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ θα λέγονται ανεξάρτητες αν για κάθε $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) = \\ P(X_1 \leq x_1) \cdot P(X_2 \leq x_2) \cdot \dots \cdot P(X_n \leq x_n).$$

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών και από κοινού συνάρτηση κατανομής

Θεώρημα:

Έστω οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_n$ ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Έστω ότι $F_{X_i}, i = 1, 2, \dots, n$ είναι οι μονοδιάστατες συναρτήσεις κατανομής των X_i και $F_{X_1, X_2, \dots, X_n}$ είναι η από κοινού συνάρτηση κατανομής των $X_1, X_2, \dots, X_n$. Τότε οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$$

για κάθε $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών και από κοινού σ.π. και σ.π.π.

Ορισμός (για διακριτές τ.μ.):

Έστω οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι διακριτές με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $f_{X_1, X_2, \dots, X_n}$, τότε οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$$

όπου $f_{X_i}, i = 1, 2, \dots, n$ είναι οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας των X_i .

Ορισμός (για συνεχείς τ.μ.):

Έστω οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι συνεχείς με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $f_{X_1, X_2, \dots, X_n}$ η οποία είναι συνεχής παντού. Τότε οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$$

όπου $f_{X_i}, i = 1, 2, \dots, n$ είναι οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των X_i .

Πολυδιάστατες διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Σύνολο τιμών της n -διάστατης τ.μ. $(X_1, X_2, \dots, X_n)$

$$R_{\mathbf{X}} = R_{X_1, X_2, \dots, X_n} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : X_1(\omega) = x_1, X_2(\omega) = x_2, \dots, X_n(\omega) = x_n \forall \omega \in \Omega\}$$

Ιδιότητες της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας

1)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \text{ για κάθε } (x_1, x_2, \dots, x_n) \notin R_{X_1, X_2, \dots, X_n}$$

2)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \text{ για κάθε } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_{X_1, X_2, \dots, X_n}$$

3)

$$\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_{X_1, X_2, \dots, X_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$

Υπολογισμός πιθανοτήτων

Για οποιοδήποτε $A \subseteq \mathbb{R}^n$ θα είναι

$$P\left(\left(X_1, X_2, \dots, X_n\right) \in A\right) = \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A \cap R_{X_1, X_2, \dots, X_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Από κοινού συνάρτηση κατανομής

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= F(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= \sum_{t_1 \leq x_1} \cdots \sum_{t_n \leq x_n} P(X_1 = t_1, X_2 = t_2, \dots, X_n = t_n), \\ &\quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Πολυδιάστατες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές I

Υπολογισμός πιθανοτήτων

Για οποιοδήποτε $A = A_1 \times A_2 \cdots \times A_n$ θα είναι

$$P\left(\left(X_1, X_2, \dots, X_n\right) \in A\right) = \int_{A_n} \int_{A_{n-1}} \cdots \int_{A_1} f_{X_1 X_2 \cdots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Ιδιότητες της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας

1)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in R$$

2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = 1$$

Διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X,Y)

Έστω X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στον ίδιο δειγματικό χώρο Ω , δηλαδή

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

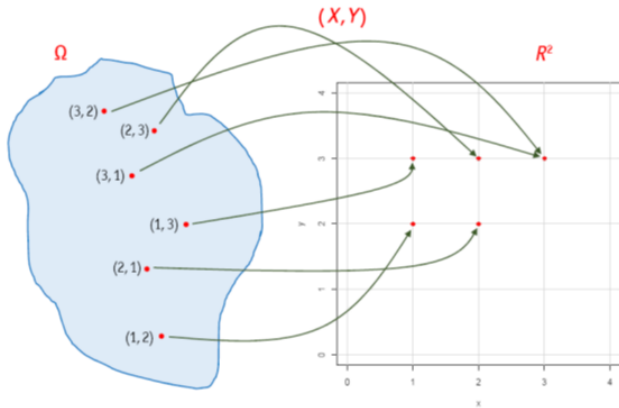
Με το συμβολισμό (X,Y) δηλώνουμε μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (two dimensional random variable)

$$(X,Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$$

με την οποία κάθε δειγματικό σημείο $\omega \in \Omega$ απεικονίζεται στο σημείο $(X(\omega), Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2$.

Δηλαδή:

$$\omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2$$



Ποιες είναι οι τιμές που παίρνει η διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) ;

Πως υπολογίζω τις πιθανότητες $P(X = x, Y = y)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

Από κοινού συνάρτησης πιθανότητας

Έστω X, Y δύο διακριτές τ.μ. ορισμένες στον δειγματικό χώρο Ω , τότε η συνάρτηση

$$f(x,y) = P_{XY}(x,y) = P(X = x, Y = y), (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

λέγεται από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (α.κ.σ.π.) των τ.μ. X και Y ή ή ισοδύναμα α.κ.σ.π. της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X, Y) .

Ιδιότητες της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας $f(x,y)$

1) $f(x,y) = 0$ για κάθε $(x,y) \notin R_{X,Y}$

2) $f(x,y) \geq 0$ για κάθε $(x,y) \in R_{X,Y}$

3) $\sum_{(x,y) \in R_{X,Y}} f(x,y) = 1$

Από κοινού συνάρτηση κατανομής $F(x,y)$ μιας διδιάστατης διακριτής τ.μ. (X,Y)

Ορισμός:

Η συνάρτηση $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ που ορίζεται ως

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{s \leq x} \sum_{t \leq y} f(s,t), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

ονομάζεται από κοινού (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y) .

Ιδιότητες της από κοινού συνάρτησης κατανομής

1) Αν $x_1 < x_2$, τότε $F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$ και αν $y_1 < y_2$, τότε $F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$.

2)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = F(-\infty, y) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = F(x, -\infty) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} F(x, y) = F(\infty, \infty) = 1$$

3) Η α.κ.σ.κ. F είναι δεξιά συνεχής ως προς κάθε μια από τις μεταβλητές x και y , δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x, y) = F(x_0, y) \text{ και } \lim_{y \rightarrow y_0^+} F(x, y) = F(x, y_0)$$

Περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας (marginal probability function)

Έστω (X, Y) μια διδιάστατη διακριτή τ.μ. με α.κ.σ.π. $f(x,y)$ και σύνολο τιμών $R_{X,Y}$. Η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας (marginal probability function) $f_X(x)$ της τυχαίας μεταβλητής X μπορεί να υπολογιστεί ως εξής

$$f_X(x) = P(X = x) = \sum_{y \in R_Y} f(x,y), \quad \text{για κάθε } x \in R_X$$

Ομοίως, η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας $f_Y(y)$ της τυχαίας μεταβλητής Y είναι

$$f_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{x \in R_X} f(x,y), \quad \text{για κάθε } y \in R_Y$$

	y_1	$\cdots$	y_n	$f_X(x)$
x_1	$f(x_1, y_1)$	$\cdots$	$f(x_1, y_j)$	$f_X(x_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	$f(x_i, y_1)$	$\cdots$	$f(x_i, y_j)$	$f_X(x_m)$
$f_Y(y)$	$f_Y(y_1)$	$\cdots$	$f_Y(y_n)$	1

Πίνακας 1: Από κοινού και περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας

Είναι

$$\sum_{j=1}^m f_X(x_j) = 1, \quad \sum_{i=1}^n f_Y(y_i) = 1$$

και

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(x_j, y_i) = 1.$$

Παράδειγμα

$X \setminus Y$	1	2	3	$P(X = x)$
1	0,10	0,20	0,10	$f_X(1)$
2	0,10	0,20	0,10	$f_X(2)$
3	0,05	0,05	0,10	$f_X(3)$

Είναι:

- ▶ $f_X(1) = P(X = 1) = \sum_{y=1}^3 f(1, y) =$
 $f(1, 1) + f(1, 2) + f(1, 3) = 0,10 + 0,20 + 0,10 = 0,40$
- ▶ $f_X(2) = P(X = 2) = \sum_{y=1}^3 f(2, y) =$
 $f(2, 1) + f(2, 2) + f(2, 3) = 0,10 + 0,20 + 0,10 = 0,40$
- ▶ $f_X(3) = P(X = 3) = \sum_{y=1}^3 f(3, y) =$
 $f(3, 1) + f(3, 2) + f(3, 3) = 0,05 + 0,05 + 0,10 = 0,20$

Παράδειγμα

$X \setminus Y$	1	2	3
1	0,10	0,20	0,10
2	0,10	0,20	0,10
3	0,05	0,05	0,10
$P(Y = y)$	$f_Y(1)$	$f_Y(2)$	$f_Y(3)$

Είναι:

- ▶ $f_Y(1) = P(Y = 1) = \sum_{x=1}^3 f(x, 1) =$
 $f(1, 1) + f(2, 1) + f(3, 1) = 0,10 + 0,10 + 0,05 = 0,25$
- ▶ $f_Y(2) = P(Y = 2) = \sum_{x=1}^3 f(x, 2) =$
 $f(1, 2) + f(2, 2) + f(3, 2) = 0,20 + 0,20 + 0,05 = 0,45$
- ▶ $f_Y(3) = P(Y = 3) = \sum_{x=1}^3 f(x, 3) = f(1, 3) + f(2, 3) +$
 $f(3, 3) = 0,10 + 0,10 + 0,10 = 0,30$

Περιθώρια συνάρτηση κατανομής

Έστω (X, Y) μια διδιάστατη διακριτή τ.μ. με α.κ.σ.κ. $F(x, y)$. Τότε οι συναρτήσεις κατανομής των τυχαίων μεταβλητών X και Y θα είναι

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) = F(x, \infty), \quad -\infty < x < \infty$$

και

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y) = F(\infty, y) \quad -\infty < y < \infty$$

αντίστοιχα.

Παράδειγμα:

Έστω οι τυχαίες μεταβλητές $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ και $Y \sim \text{Bernoulli}(q)$ οι οποίες είναι ανεξάρτητες με $0 < p, q < 1$.
Να βρείτε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας και την από κοινού συνάρτηση κατανομής για τις τυχαίες μεταβλητές X και Y .

Απάντηση:

Το από κοινού σύνολο τιμών των X και Y , R_{XY} , είναι

$$R_{XY} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

Αφού οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες θα έχουμε ότι

$$P_{XY}(i, j) = P_X(i)P_Y(j), \quad \text{για } i, j = 0, 1.$$

Επομένως υπολογίζουμε την από κοινού σ.π. ως εξής

$$P_{XY}(0, 0) = P_X(0)P_Y(0) = (1 - p)(1 - q),$$

$$P_{XY}(0, 1) = P_X(0)P_Y(1) = (1 - p)q,$$

$$P_{XY}(1, 0) = P_X(1)P_Y(0) = p(1 - q),$$

$$P_{XY}(1, 1) = P_X(1)P_Y(1) = pq.$$

Η από κοινού συνάρτηση κατανομής δίνεται από τη σχέση

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Διακρίνω τις παρακάτω περιπτώσεις

► Όταν $0 \leq X, Y \leq 1$

$$F_{XY}(x,y) = 0, \quad \text{αν } x < 0,$$

$$F_{XY}(x,y) = 0, \quad \text{αν } y < 0,$$

$$F_{XY}(x,y) = 1, \quad \text{αν } x \geq 1 \text{ αν } y \geq 1.$$

► Όταν $0 \leq x < 1$ και $y \geq 1$

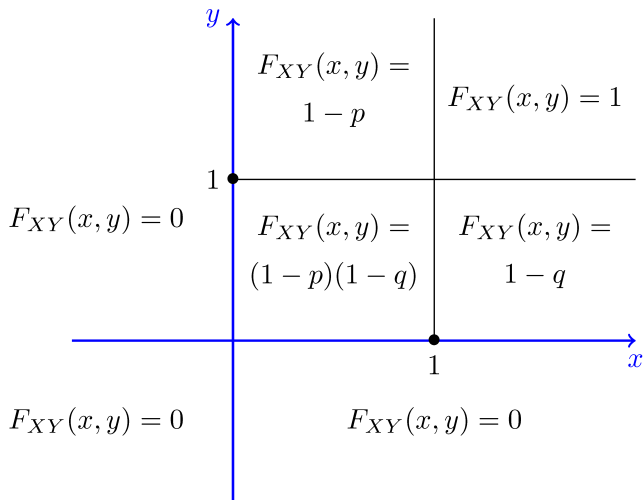
$$\begin{aligned} F_{XY}(x,y) &= P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= P(X = 0, y \leq 1) \\ &= P(X = 0) = 1 - p. \end{aligned}$$

- Όταν $0 \leq y < 1$ και $x \geq 1$

$$\begin{aligned} F_{XY}(x,y) &= P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= P(X \leq 1, y = 0) \\ &= P(Y = 0) = 1 - q. \end{aligned}$$

- Όταν $0 \leq x < 1$ και $0 \leq y < 1$

$$\begin{aligned} F_{XY}(x,y) &= P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= P(X = 0, y = 0) \\ &= P(X = 0)P(Y = 0) = (1 - p)(1 - q). \end{aligned}$$



Μέση τιμή συνάρτησης δύο τυχαίων μεταβλητών

Πως μπορεί να βρεθεί η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $g(X,Y) = X + Y$ και η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητή $W = \max(X,Y) = h(X,Y)$;

Έστω (X, Y) μια διδιάστατη διακριτή τ.μ. με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $f(x, y)$ και σύνολο τιμών $R_{X,Y}$. Επίσης, έστω $g(x, y)$ μια πραγματική συνάρτηση δύο τυχαίων μεταβλητών. Τότε η μέση τιμή της τ.μ. $g(X, Y)$ θα υπολογίζεται ως εξής

$$E[g(X, Y)] = \sum_{(x_i, y_j) \in R_{X,Y}} g(x_i, y_j) f_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Αν $g_1(X,Y)$ και $g_2(X,Y)$ είναι δύο συναρτήσεις της διδι-
άστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y) , τότε

$$E(g_1(X,Y) + g_2(X,Y)) = E(g_1(X,Y)) + E(g_2(X,Y))$$

(Απόδειξη;)

Έστω $g(y) = P(Y = y|X = x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$.

Για συγκεκριμένο $x \in R_X$ και $g(y) \geq 0, y \in R_Y$, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{y \in R_Y} g(y) &= \sum_{y \in R_Y} P(Y = y|X = x) = \sum_{y \in R_Y} \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \\ &= \frac{1}{f_X(x)} \left(\sum_{y \in R_Y} f(x,y) \right) = \frac{f_X(x)}{f_X(x)} = 1. \end{aligned}$$

Δηλαδή για συγκεκριμένο $x \in R_X$, για την συνάρτηση

$$g(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, y \in R_Y$$

ικανοποιούνται οι ιδιότητες

1)

$$g(y) \geq 0, y \in R_Y$$

2)

$$\sum_{y \in R_Y} g(y) = 1.$$

Επομένως η $g(y)$ μπορεί να αποτελέσει συνάρτηση πιθανότητας κάποιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής.

Η κατανομή αυτής της διακριτής τυχαίας μεταβλητής ονομάζεται δεσμευμένη κατανομή της τ.μ. Y δοθέντος ότι $X = x$ (δηλαδή $Y|X = x$) και τη συνάρτηση πιθανότητάς της τη συμβολίζουμε ως εξής

$$f_{Y|X}(y|x) = g(y) = \frac{f_X(x,y)}{f_X(x)}, y \in R_Y.$$

Δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας

Ορισμός:

Έστω (X, Y) μια διδιάστατη διακριτή τυχαία μεταβλητή με από κοινού συνάρτησης πιθανότητας $f(x, y)$ και περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x), f_Y(y)$. Τότε η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X δοθέντος ότι $Y = y$ ($X|Y = y$), ορίζεται ως

$$h(x) = f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \quad x \in R_X, f_Y(y) > 0.$$

Η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. Y δοθέντος ότι $X = x$ ($Y|X = x$), ορίζεται ως

$$g(y) = f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, y \in R_Y, f_X(x) > 0.$$

Δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής

- 1) Δεσμευμένη (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής για $X|Y = y$

$$\begin{aligned} F_{X|Y}(x|y) &= P(X \leq x|Y = y) = \sum_{s \leq x} P(X = s|Y = y) \\ &= \sum_{s \leq x} f_{X|Y}(s|y), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- 2) Δεσμευμένη (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής για $Y|X = x$

$$\begin{aligned} F_{Y|X}(y|x) &= P(Y \leq y|X = x) = \sum_{t \leq y} P(Y = t|X = x) \\ &= \sum_{t \leq y} f_{Y|X}(t|x), \quad y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Δεσμευμένη μέση τιμή

Δεσμευμένη μέση τιμή της $X|Y = y$

$$E[X|Y = y] = \sum_{x_i \in R_X} x_i P_{X|Y}(x_i|y).$$

Δεσμευμένη μέση τιμή της $Y|X = x$

$$E[Y|X = x] = \sum_{y_i \in R_Y} y_i P_{Y|X}(y_i|x).$$

Σημείωση: Οι συνήθεις ιδιότητες της μέσης τιμής για μια τ.μ. ισχύουν και με δέσμευση ως προς μια άλλη τυχαία μεταβλητή.

Ιδιότητες

1. $E[E(Y | X)] = E(Y)$
2. $E(Y + Z | X) = E(Y | X) + E(Z | X)$
3. $E(cY | X) = cE(Y | X)$
4. Αν $Y \geq 0$ τότε $E(Y | X) \geq 0$
5. Αν $Y \leq Z$ τότε $E(Y | X) \leq E(Z | X)$
6. $|E(Y | X)| \leq E(|Y| | X)$
7. $E[E(Z | X, Y) | X] = E(Z | X)$
8. $E[E(Z | X) | X, Y] = E(Z | X)$

Δεσμευμένη διακύμανση

Δεσμευμένη διακύμανση της $X|Y = y$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X|Y = y) &= E[(X - \mu_{X|Y}(y))^2 | Y = y] \\ &= E[X^2 | Y = y] - \mu_{X|Y}(y)^2.\end{aligned}$$

Δεσμευμένη διακύμανση της $Y|X = x$

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y|X = x) &= E[(Y - \mu_{Y|X}(x))^2 | X = x] \\ &= E[Y^2 | X = x] - \mu_{Y|X}(x)^2.\end{aligned}$$

Σχέση μεταξύ της μέσης τιμής της $E(Y|X)$ και της $E(Y)$

Έστω το διακριτό τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{Z} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{Z} = [X, Y]$ ορισμένο στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Υποθέτουμε ότι ισχύει $E(Y) < \infty$. Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} E(E(Y|X)) &= \sum_x E(Y|X=x) f_X(x) \\ &= \sum_x \left(\sum_y y f_{Y|X}(y|x) \right) f_X(x) \\ &= \sum_x \sum_y y f_{X,Y}(x,y) \\ &= \sum_y y \sum_x f_{X,Y}(x,y) \\ &= \sum_y y f_Y(y) = E(Y). \end{aligned}$$

Από κοινού συνάρτηση πυκνότητας μιας διδιάστατης συνεχούς τυχαίας μεταβλητής

Έστω X, Y δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές οι οποίες είναι ορισμένες στον ίδιο δειγματικό χώρο. Έστω ότι υπάρχει μία μη-αρνητική συνάρτηση δύο μεταβλητών $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ τέτοια ώστε για κάθε περιοχή $C \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ να ισχύει ότι

$$P((X, Y) \in C) = \iint_{(x,y) \in C} f_{XY}(x,y) dx dy$$

Η συνάρτηση $f(x,y)$ θα ονομάζεται από κοινού συνάρτηση πυκνότητας (α.κ.σ.π.) (joint probability density function) των τυχαίων μεταβλητών X και Y ή από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της διδιάστατης συνεχούς τυχαίας μεταβλητής (X, Y) .

Αν A και B είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$, τότε αν ορίσουμε $C = \{(x,y) : x \in A, y \in B\} = A \times B$, θα έχουμε

$$P((X,Y) \in C) = P((X \in A, Y \in B)) = \int_B \int_A f(x,y) dx dy$$

Επίσης, αν $A = (-\infty, \alpha]$ και $B = (-\infty, b]$, τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} P(\{X \in (-\infty, \alpha], Y \in (-\infty, b]\}) &= P(X \leq \alpha, Y \leq b) = \\ &= F(\alpha, b) = \int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^{\alpha} f(x,y) dx dy \end{aligned}$$

Ιδιότητες α.κ.σ.π. $f(x,y)$ μιας διδιάστατης συνεχούς τ.μ. (X,Y)

- 1) $f(x,y) \geq 0, x,y \in \mathbb{R}$
- 2) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = 1$

Από κοινού συνάρτηση κατανομής μιας διδιάστατης συνεχούς τ.μ. (X,Y)

Η συνάρτηση

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y), (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

ονομάζεται από κοινού (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής (α.κ.σ.κ.) της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y) .

Σχέση μεταξύ F και f μιας διδιάστατης συνεχούς τ.μ.
 (X,Y)

1)

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x,y) dx dy, (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

2) Για τα σημεία (x,y) όπου η f είναι συνεχής

$$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} F(x,y)$$

Περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Ορισμός:

Έστω (X,Y) είναι μια διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x,y)$, τότε οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X,Y είναι

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy, \quad \text{για κάθε } x,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx, \quad \text{για κάθε } y.$$

Περιθώρια συνάρτηση κατανομής

Για τις περιθώριες συναρτήσεις κατανομής των X, Y είναι

1)

$$F_X(x) = P(X \leq x, -\infty < Y < \infty) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx$$
$$\int_{-\infty}^x f_X(x) dx \quad \text{για κάθε } x$$

2)

$$F_Y(y) = P(-\infty < X < \infty, Y \leq y) = \int_{-\infty}^y \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy$$
$$\int_{-\infty}^y f_Y(y) dy \quad \text{για κάθε } y$$

Μέση τιμή συνάρτησης δύο τυχαίων μεταβλητών

Πρόταση:

Έστω (X,Y) μια διδιάστατη συνεχής τ. μ. με από κοινού σ.π.π. $f(x,y)$ και έστω $g(x,y)$ μια πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών τέτοια ώστε η τ.μ. $Z = g(X,Y)$ να είναι μια συνεχής τ.μ.. Τότε η μέση τιμή της τ.μ. $g(X,Y)$ είναι

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{XY}(x,y) dx dy$$

υπό την προϋπόθεση ότι το διπλό ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στο δεξιό μέλος συγκλίνει απόλυτα.

Πρόταση:

Αν $g_1(X,Y)$ και $g_2(X,Y)$ είναι δύο συναρτήσεις της διδι-
άστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y) , τότε θα έχουμε

$$E(g_1(X,Y) + g_2(X,Y)) = E(g_1(X,Y)) + E(g_2(X,Y))$$

Ορισμός:

Έστω (X, Y) μια διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή με από κοινού σ.π.π. $f(x, y)$ και περιθώριες σ.π.π $f_X(x)$ και $f_Y(y)$. Η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας για $X|Y = y$ και $f_Y(y) \neq 0$, ορίζεται ως

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Επίσης η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας για $Y|X = x$ είναι

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}, \quad y \in \mathbb{R}$$

(Γιατί οι $f_{X|Y}(x|y)$ και $f_{Y|X}(y|x)$ είναι πράγματι συναρτήσεις πυκνότητας;)

Δεσμευμένες κατανομές και πιθανότητα I

Δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\alpha < X < \beta | Y = y\}$ με $f_Y(y) \neq 0$

$$P(\alpha < X < \beta | Y = y) = \int_{\alpha}^{\beta} f_{X|Y}(x|y) dx$$

Ομοίως, όταν θέλουμε να υπολογίσουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\gamma < Y < \delta | X = x\}$ κάτω από τη συνθήκη ότι $f_X(x) \neq 0$.

Δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής

Η δεσμευμένη (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής της $X|Y = y$ και η οποία συμβολίζεται με $F_{X|Y}(x|y)$ δίνεται από τη σχέση

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x | Y = y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x|y) dx, \quad x \in \mathbb{R}$$

Ομοίως για $Y|X = x$ είναι

$$F_{Y|X}(y|x) = P(Y \leq y | X = x) = \int_{-\infty}^y f_{Y|X}(y|x) dy, \quad y \in \mathbb{R}$$

Ορισμός:

Οι συνεχείς τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν

$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$$

για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $f_X(x) > 0$.

Δεσμευμένη μέση τιμή

Δεσμευμένη μέση τιμή για $X|Y = y$

$$E[X|Y = y] = \mu_{X|Y=y} = \int_{-\infty}^{\infty} xf_{X|Y}(x|y)dx$$

Δεσμευμένη μέση τιμή για $Y|X = x$

$$E[Y|X = x] = \mu_{Y|X=x} = \int_{-\infty}^{\infty} yf_{Y|X}(y|x)dy$$

Οι συνήθεις ιδιότητες της μέσης τιμής ισχύουν και με δέσμευση ως προς μια άλλη τυχαία μεταβλητή

Δεσμευμένη διακύμανση

Η δεσμευμένη διακύμανση για $X|Y = y$ είναι

$$\text{Var}(X|Y = y) = E[X^2|Y = y] - (E[X|Y = y])^2$$

Η δεσμευμένη διακύμανση για $Y|X = x$ είναι

$$\text{Var}(Y|X = x) = E[Y^2|X = x] - (E[Y|X = x])^2$$

Σχέση δεσμευμένης και αδέσμευτης διακύμανσης:

$$\text{Var}(Y) = E[\text{Var}(Y|X)] + \text{Var}[E(Y|X)]$$

Ανισότητα Cauchy-Schwarz

Για δυο τυχαίες μεταβλητές X, Y θα έχουμε

$$|E[XY]| \leq \sqrt{E[X^2]E[Y^2]},$$

όπου η ισότητα ισχύει όταν $X = \alpha Y$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Συνδιακύμανση τυχαίων μεταβλητών

Για δύο τ.μ. X και Y , η συνδιακύμανση ορίζεται ως

$$\text{Cov}(X, Y) = \sigma_{XY} = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E[XY] - E(X)E(Y).$$

Επίσης είναι

$$\begin{aligned} E[(X - E(X))(Y - E(Y))] &= E[XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y)] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) \\ &\quad + E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Είναι

- ▶ $E(XY) = E(X)E(Y)$ αν και μόνο αν $\sigma_{XY} = 0$.
- ▶ $|\sigma_{XY}| \leq \sigma_X \sigma_Y$

Ιδιότητες συνδιακύμανσης

1. $Cov(X, X) = Var(X)$
2. Αν X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. τότε $Cov(X, Y) = 0$
3. $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
4. $Cov(aX, Y) = aCov(X, Y)$
5. $Cov(X + c, Y) = Cov(X, Y)$
6. $Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$
- 7.

$$Cov\left(\sum_{i=1}^m a_i X_i, \sum_{j=1}^n b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j Cov(X_i, Y_j).$$

Έστω η τ.μ. $Z = X + Y$, τότε

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z) &= \text{Cov}(Z, Z) \\ &= \text{Cov}(X + Y, X + Y) \\ &= \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, X) + \text{Cov}(Y, Y) \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y). \end{aligned}$$

Για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ θα έχουμε

$$\text{Var}(aX + bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) + 2ab\text{Cov}(X, Y) \quad (2)$$

Συντελεστής συσχέτισης

$$\rho_{XY} = \rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad -1 \leq \rho_{XY} \leq 1$$

Παρατηρήσεις

Έστω X, Y δυο τυχαίες μεταβλητές

1. $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$
2. Αν $\rho(X, Y) = 1$ τότε $Y = aX + b$, $a > 0$
3. Αν $\rho(X, Y) = -1$ τότε $Y = aX + b$, $a < 0$
4. $\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X, Y)$ για $a, c > 0$
5. Αν $\rho(X, Y) = 0$, τότε δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση (αυτό, όμως, δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχει άλλου είδους συσχέτιση μεταξύ των δύο τ.μ.)
6. Αν $\rho(X, Y) > 0$, τότε υπάρχει θετική γραμμική συσχέτιση
7. Αν $\rho(X, Y) < 0$, τότε υπάρχει αρνητική γραμμική συσχέτιση

Διάνυσμα μέσων

Έστω το $(n \times 1)$ διάνυσμα $\mathbf{X}$ το οποίο είναι ένα διάνυσμα στήλης

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

Η μέση τιμή του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X}$ είναι

$$\mu_{\mathbf{X}} = E(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$$

Πίνακας διακύμανσης I

Πίνακας διακύμανσης (variance matrix) $\text{Cov}(\mathbf{X})$, του τυχαίου $(n \times 1)$ διανύσματος $\mathbf{X}$:

$$\text{Cov}(\mathbf{X}) = E\{(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))'\} = E\{(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_X)(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_X)'\}$$

Οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\mathbf{X}) &= E \begin{bmatrix} (X_1 - \mu_1) \\ (X_2 - \mu_2) \\ \vdots \\ (X_n - \mu_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2) \cdots (X_n - \mu_n) \end{bmatrix} \\ &= E \begin{bmatrix} (X_1 - \mu_1)^2 & \cdots & (X_1 - \mu_1)(X_n - \mu_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_n - \mu_n)(X_1 - \mu_1) & \cdots & (X_n - \mu_n)^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Πίνακας διακύμανσης II

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} E(X_1 - \mu_1)^2 & \dots & E(X_1 - \mu_1)(X_n - \mu_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_n - \mu_n)(X_1 - \mu_1) & \dots & E(X_n - \mu_n)^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) & \dots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \text{Cov}(X_n, X_2) & \dots & \text{Var}(X_n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ο οποίος είναι ένας $(n \times n)$ πίνακας.

Πίνακας διακύμανσης-συνδιακύμανσης I

Πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων (variance-covariance matrix), $\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, μεταξύ του τυχαίου $(n \times 1)$ διανύσματος $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]'$ και του $(m \times 1)$ τυχαίου διανύσματος $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_m]'$, όπου τα n, m μπορεί να διαφέρουν:

$$\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = E\{(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))(\mathbf{Y} - E(\mathbf{Y}))'\} = E\{(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}})'\}$$

Οπότε θα έχουμε

$$\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = E \begin{bmatrix} (X_1 - \mu_1) \\ (X_2 - \mu_2) \\ \vdots \\ (X_n - \mu_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (Y_1 - \mu_1)(Y_2 - \mu_2) \cdots (Y_M - \mu_m) \end{bmatrix}$$

$$= E \begin{bmatrix} (X_1 - \mu_{X_1})(Y_1 - \mu_{Y_1}) & \cdots & (X_1 - \mu_{X_1})(Y_M - \mu_{Y_m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_n - \mu_{X_n})(Y_1 - \mu_{Y_1}) & \cdots & (X_n - \mu_{X_n})(Y_M - \mu_{Y_m}) \end{bmatrix}$$

Πίνακας διακύμανσης-συνδιακύμανσης II

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} E[(X_1 - \mu_{X_1})(Y_1 - \mu_{Y_1})] & \dots & E[(X_1 - \mu_{X_1})(Y_M - \mu_{Y_M})] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(X_n - \mu_{X_n})(Y_1 - \mu_{Y_1})] & \dots & E[(X_n - \mu_{X_n})(Y_M - \mu_{Y_M})] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \text{Cov}(X_1, Y_1) & \text{Cov}(X_1, Y_2) & \dots & \text{Cov}(X_1, Y_m) \\ \text{Cov}(X_2, Y_1) & \text{Cov}(X_2, Y_2) & \dots & \text{Cov}(X_2, Y_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, Y_1) & \text{Cov}(X_n, Y_2) & \dots & \text{Cov}(X_n, Y_m) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ο οποίος είναι ένας $(n \times m)$ πίνακας.

Θεώρημα:

Έστω $Y = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i = \boldsymbol{\alpha}' \mathbf{X}$ με $\alpha_i \in \mathbb{R}$, τότε

$$E(Y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i E(X_i) = \boldsymbol{\alpha}' E(\mathbf{X})$$

Θεώρημα:

Έστω $Y = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i = \boldsymbol{\alpha}' \mathbf{X}$ με $\alpha_i \in \mathbb{R}$, τότε

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_{X_i}^2 + 2 \sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j \sigma_{X_i X_j} = \boldsymbol{\alpha}' \mathbf{Cov}(\mathbf{X}) \boldsymbol{\alpha}$$

όπου $\mathbf{Cov}(\mathbf{X}) = E[(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))']$ ο πίνακας διακύμανσης του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X}$.

Θεώρημα:

Έστω $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$ όπου $\mathbf{A}$ είναι ένας $(k \times n)$ πίνακας με σταθερές και $\mathbf{X}$ ένα $(n \times 1)$ διάνυσμα με τυχαίες μεταβλητές. Τότε $E(\mathbf{Y}) = E(\mathbf{AX}) = \mathbf{A} E(\mathbf{X})$

Θεώρημα:

Έστω $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$ όπου $\mathbf{A}$ είναι ένας $(k \times n)$ πίνακας με σταθερές και $\mathbf{X}$ ένας $(n \times p)$ πίνακας με τυχαίες μεταβλητές. Τότε $E(\mathbf{Y}) = E(\mathbf{AX}) = \mathbf{A} E(\mathbf{X})$

Θεώρημα:

Έστω $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$ όπου $\mathbf{A}$ είναι ένας $(k \times n)$ πίνακας με σταθερές και $\mathbf{X}$ ένα $(n \times 1)$ διάνυσμα με τυχαίες μεταβλητές. Τότε $\mathbf{Cov}(\mathbf{Y}) = \mathbf{Cov}(\mathbf{AX}) = \mathbf{A Cov}(\mathbf{X}) \mathbf{A}'$