Ροπές Τυχαίων Μεταβλητών και Χαρακτηριστικές Συναρτήσεις

Περιεχόμενα

Ροπές Τυχαίων Μεταβλητών

Οι ροπές μιας τυχαίας μεταβλητής αποτελούν βασικά χαρακτηριστικά της κατανομής της και παρέχουν πληροφορίες για τη θέση, τη διασπορά και το σχήμα της (π.χ. μέση τιμή, διακύμανση, συμμετρία, κύρτωση). Η r-οστή ροπή μιας τυχαίας μεταβλητής X ως προς την αρχή ορίζεται ως:

$$E[X^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x)dx \quad \text{(για συνεχή τ.μ.)}$$

$$E[X^r] = \sum_{x \in R_X} x^r P(X = x) \quad \text{(για διακριτή τ.μ.)}$$

Πρώτη ροπή (Μέση τιμή, $r = 1$):

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad \text{(για συνεχή τ.μ.)}$$

$$E[X] = \sum_{x \in R_X} x P(X = x) \quad \text{(για διακριτή τ.μ.)}$$

Δεύτερη ροπή ($r = 2$):

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx \quad \text{(για συνεχή τ.μ.)}$$

$$E[X^2] = \sum_{x \in R_X} x^2 P(X = x) \quad \text{(για διακριτή τ.μ.)}$$

Η διασπορά ορίζεται ως:

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Ροπογεννήτρια συνάρτηση

Έστω η τ.μ. X, η συνάρτηση

$$M_X(t) = M(t) = E\left[e^{tX}\right]$$

καλείται ροπογεννήτρια συνάρτηση (moment generating function (MGF)) της τ.μ. X, υπό την προϋπόθεση ότι η παραπάνω μέση τιμή υπάρχει σε μια περιοχή του t γύρω από το 0, δηλαδή ισχύει για $-\epsilon < t < \epsilon$, $\epsilon > 0$.

Είναι

$$M_X(t) = \begin{cases} \sum_{x \in R_X} e^{tX} f(x) & X \text{ διακριτή τ.μ.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx & X \text{ συνεχής τ.μ.} \end{cases}$$

Η ποσότητα $\int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f_X(x) dx$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f_X(x)$.

Παρατήρηση: Η ροπογεννήτρια δεν υπάρχει για κάθε $t \in \mathbb{R}$

Βασικές ιδιότητες ροπογεννήτριας συνάρτησης

Έστω η τ.μ. X με ροπογεννήτρια συνάρτηση $M(t)$ η οποία υπάρχει για $-\epsilon < t < \epsilon$, $\epsilon > 0$, τότε ισχύουν τα παρακάτω

$$\mu_r' = M^{(r)}(0) = E\left(X^r\right)$$
$$M(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{E\left(X^r\right)}{r!} t^r.$$

και ισχύει

$$E[X^r] = \frac{d^r}{dt^r} M_X(t)|_{t=0}.$$

Η ποσότητα $\mu_r' = E[X^r]$ ονομάζεται ροπή $r-$τάξεως.

Εύρεση μέσης τιμής και διακύμανσης μιας τ.μ. X με χρήση ροπογεννήτριας συνάρτησης:

- $E(X) = M^{'}(0) = \mu^{'}_1$
- $E(X^2) = M^{''}(0) = \mu^{'}_2$
- $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = M^{''}(0) - [M^{'}(0)]^2$

Έστω δύο τ.μ. X και Y με ροπογεννήτριες συναρτήσεις $M_X(t)$ και $M_Y(t)$ αντίστοιχα και ισχύει ότι $-\epsilon < t < \epsilon$, $\epsilon > 0$. Αν ισχύει ότι

$$M_X(t) = M_Y(t),\ -\epsilon < t < \epsilon,\ \epsilon > 0,$$

τότε οι τ.μ. X και Y ακολουθούν την ίδια κατανομή.

Έστω η τ.μ. X με ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_X(t)$ για την οποία ισχύει ότι $-\epsilon < t < \epsilon$, $\epsilon > 0$. Τότε η τ.μ.

$$Y = \alpha + \beta X, \; \alpha \neq 0$$

έχει ροπογεννήτρια η οποία δίνεται από τη παρακάτω σχέση

$$M_Y(t) = e^{\alpha t} M_X(\beta t) \quad \text{ισχύει για } |t| < \frac{\epsilon}{|\beta|}$$

Κεντρικές ροπές r τάξης

Η κεντρική ροπή r τάξης της τ.μ. X είναι η αναμενόμενη τιμή της συνάρτησης $(X-\mu)^r$, $r = 1, 2, 3, \ldots$, συμβολίζεται με μ_r και είναι

$$\mu_r = E((X-\mu)^r),\ r = 1, 2, 3, \ldots$$

Είναι

- $$\mu_1 = E((X-\mu)) = 0$$
- $$\mu_2 = E((X-\mu)^2) = Var(X) = \sigma_X^2$$

- Κεντρική ροπή τάξης r μιας διακριτής τ.μ. X

$$E((X-\mu)^r) = \sum_j (x_j - \mu_X)^r P(X = x)$$

- Κεντρική ροπή τάξης r μιας συνεχής τ.μ. X

$$E((X-\mu)^r) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^r f_X(x) dx.$$

Σχέση μεταξύ κεντρικών και αρχικών ροπών

Έστω ότι γνωρίζουμε τις r πρώτες αρχικές ροπές $\mu'_k = E(X^k)$ μιας τυχαίας μεταβλητής X με μέση τιμή $E(X) = \mu$. Τότε, η r-οστή κεντρική ροπή $\mu_r = E((X-\mu)^r)$ δίνεται από:

$$\begin{aligned}\mu_r &= E((X-\mu)^r)\\ &= \mu'_r - \binom{r}{1}\mu\mu'_{r-1} + \binom{r}{2}\mu^2\mu'_{r-2} - \cdots + (-1)^r\mu^r.\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα:

$$\mu_r = \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-\mu)^k\mu'_{r-k}.$$

Ανισότητα του Markov

Έστω μία μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή X και μία σταθερά $c > 0$, τότε για οποιαδήποτε τιμή του c, ισχύει ότι

$$P(X \geq c) \leq \frac{E(X)}{c}$$

Παράδειγμα

Έστω η τ.μ. X η οποία ακολουθεί την κατανομή Bernoulli με παράμετρο p, δηλαδή $X \sim Bernoulli(p)$. Στην περίπτωση που έχουμε ¨επιτυχία¨ είναι $P(X = 1) = p$ και στην περίπτωση που έχουμε ¨αποτυχία¨ $P(X = 0) = 1 - p = q$. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} M(t) = E(e^{tX}) &= e^{t \cdot 0} P(X = 0) + e^{t \cdot 1} P(X = 1) \\ &= q + p \cdot e^{t},\ t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ανισότητα του Chebyshev

Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μ και πεπερασμένη διασπορά σ^2, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό $c > 0$, θα ισχύει ότι

$$P(|X - \mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$$

Ροπογεννήτριες αθροισμάτων τυχαίων μεταβλητών

Πρόταση:
Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. με αντίστοιχες ροπογεννήτριες συναρτήσεις $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \ldots, M_{X_n}(t)$. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση του αθροίσματος

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

δίνεται από τη σχέση

$$M_{S_n}(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \ldots M_{X_n}(t)$$

Απόδειξη:
Έστω ότι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με αντίστοιχες ροπογεννήτριες συναρτήσεις

$$M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \ldots, M_{X_n}(t)$$

. Θέλουμε να δείξουμε ότι η ροπογεννήτρια του αθροίσματος

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

είναι

$$M_{S_n}(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \ldots M_{X_n}(t).$$

Από τον ορισμό της ροπογεννήτριας συνάρτησης έχουμε:

$$M_{S_n}(t) = \mathbb{E}[e^{tS_n}] = \mathbb{E}[e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}].$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της εκθετικής συνάρτησης, μπορούμε να γράψουμε:

$$M_{S_n}(t) = \mathbb{E}[e^{tX_1} e^{tX_2} \ldots e^{tX_n}].$$

Επειδή οι X_i είναι ανεξάρτητες, η προσδοκία του γινομένου ισούται με το γινόμενο των προσδοκιών:

$$M_{S_n}(t) = \mathbb{E}[e^{tX_1}]\mathbb{E}[e^{tX_2}]\ldots\mathbb{E}[e^{tX_n}].$$

Αντικαθιστώντας τις ροπογεννήτριες των X_i, προκύπτει:

$$M_{S_n}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\ldots M_{X_n}(t).$$

Συμπέρασμα: Η ροπογεννήτρια του αθροίσματος S_n είναι

$$M_{S_n}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\ldots M_{X_n}(t),$$

Πρόταση:
Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με κοινή ροπογεννήτρια $M_X(t)$. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση του αθροίσματος

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

δίνεται από τη σχέση

$$M_{S_n}(t) = (M_X(t))^n$$

Απόδειξη:
Έστω ότι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_X(t)$.

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

είναι

$$M_{S_n}(t) = (M_X(t))^n.$$

Από τον ορισμό της ροπογεννήτριας συνάρτησης έχουμε:

$$M_{S_n}(t) = \mathbb{E}[e^{tS_n}] = \mathbb{E}[e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}].$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της εκθετικής συνάρτησης, μπορούμε να γράψουμε:

$$M_{S_n}(t) = \mathbb{E}[e^{tX_1} e^{tX_2} \ldots e^{tX_n}].$$

Επειδή οι X_i είναι ανεξάρτητες, η αναμενόμενη τιμή του γινομένου ισούται με το γινόμενο των αναμενόμενων τιμών:

$$M_{S_n}(t) = \mathbb{E}[e^{tX_1}]\mathbb{E}[e^{tX_2}]\dots\mathbb{E}[e^{tX_n}].$$

Εφόσον οι X_i είναι ισόνομες, έχουν την ίδια ροπογεννήτρια, δηλαδή $M_X(t)$. Άρα:

$$M_{S_n}(t) = M_X(t)M_X(t)\dots M_X(t) = (M_X(t))^n.$$

Συμπέρασμα: Η ροπογεννήτρια του αθροίσματος S_n είναι $M_{S_n}(t) = (M_X(t))^n$.

Πρόταση:
Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. με αντίστοιχες ροπογεννήτριες συναρτήσεις $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \ldots, M_{X_n}(t)$. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση του αθροίσματος

$$S_n = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n$$

δίνεται από τη σχέση

$$M_{S_n}(t) = M_{X_1}(\alpha_1 t) M_{X_2}(\alpha_2 t) \ldots M_{X_n}(\alpha_n t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(\alpha_i t).$$

Απόδειξη:
Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με αντίστοιχες ροπογεννήτριες συναρτήσεις

$$M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \ldots, M_{X_n}(t).$$

Τότε, η ροπογεννήτρια συνάρτηση του αθροίσματος

$$S_n = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n$$

δίνεται από τη σχέση

$$M_{S_n}(t) = \mathbb{E}\left[e^{tS_n}\right] = \mathbb{E}\left[e^{t(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n)}\right].$$

Λόγω της ανεξαρτησίας των X_i, μπορούμε να γράψουμε:

$$M_{S_n}(t) = \mathbb{E}\left[e^{t\alpha_1 X_1}\right]\mathbb{E}\left[e^{t\alpha_2 X_2}\right]\ldots\mathbb{E}\left[e^{t\alpha_n X_n}\right].$$

Δηλαδή,

$$M_{S_n}(t) = M_{X_1}(\alpha_1 t) M_{X_2}(\alpha_2 t)\ldots M_{X_n}(\alpha_n t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(\alpha_i t).$$

Παράδειγμα

Σε ένα χαρτοφυλάκιο μιας ασφαλιστικής εταιρείας, τα μεγέθη των αποζημιώσεων $X_1, X_2, \ldots$ (σε χιλιάδες ευρώ) είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τμ με κοινή κατανομή την εκθετική με παράμετρο λ. Ο μηνιαίος αριθμός N των αποζημιώσεων που καταβάλλει η ασφαλιστική εταιρεία είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, ανεξάρτητη από τις τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots$, με συνάρτηση πιθανότητας:

$$f_N(n) = P(N = n) = (1-p)^{n-1} p, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(α) Να βρεθούν η μέση τιμή, η διακύμανση και η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής N.

(β) Να βρεθεί η ροπογεννήτρια του συνολικού ποσού των αποζημιώσεων S_N που καταβάλλει η ασφαλιστική εταιρεία σε ένα μήνα και να υπολογιστούν η μέση τιμή και η διακύμανση του.

(γ) Αν η $N \sim G(p)$, να δείξετε ότι $S_N \sim Exp(p\lambda)$.

Απάντηση

(α) Η τυχαία μεταβλητή N ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p, οπότε έχουμε:

$$\mathbb{E}[N] = \frac{1}{p}, \quad \text{και} \quad \text{Var}(N) = \frac{1-p}{p^2}$$

Η ροπογεννήτρια της N είναι:

$$M_N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{tn}(1-p)^{n-1}p = pe^t \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[(1-p)e^t\right]^n}_{\text{(1-p)}} = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t},$$

Δηλαδή:

$$M_N(t) = \frac{p\ \text{exp(t)}}{1-qe^t}, \quad \text{για} \quad |qe^t| < 1$$

(β) Το συνολικό ποσό των αποζημιώσεων είναι:

$$S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N, \quad X_i \sim Exp(\lambda)$$

Η ροπογεννήτρια της S_N είναι:

$$M_{S_N}(t) = E(e^{tS_N}) = E[M_X(t)^N] = M_N(\ln M_X(t))$$

όπου η ροπογεννήτρια της εκθετικής κατανομής είναι:

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση για $M_{S_N}(t)$:

$$M_{S_N}(t) = \frac{p}{1 - (1-p)\cdot\frac{\lambda}{\lambda - t}} = \frac{p(\lambda - t)}{\lambda - t - (1-p)\lambda}, \quad t < p\lambda$$

Μέση Τιμή και Διακύμανση του S_N

Για τη μέση τιμή, υπολογίζουμε την παράγωγο της ροπογεννήτριας:

$$M'_{S_N}(t) = \frac{p\cdot(\lambda - t) - p\cdot(\lambda - t - (1-p)\lambda)}{(\lambda - t - (1-p)\lambda)^2} = \frac{p\cdot(1-p)\lambda}{(\lambda - t - (1-p)\lambda)^2}$$

με $t < \lambda(1-q)$.
Επομένως, η μέση τιμή είναι:

$$\mathbb{E}[S_N] = M'_{S_N}(0) = \frac{1}{p\lambda}$$

Για τη διακύμανση, υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο της ροπογεννήτριας:

$$M''_{S_N}(t) = \frac{2p(1-p)\lambda(\lambda - t - (1-p)\lambda)}{(\lambda - t - (1-p)\lambda)^4}$$

Επομένως:

$$\mathbb{E}[S_N^2] = M''_{S_N}(0) + (\mathbb{E}[S_N])^2$$

Για τη διακύμανση, υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο:

$$M''_{S_N}(t) = p \cdot \frac{2q\lambda(\lambda - t - q\lambda)}{(\lambda - t - q\lambda)^4}$$

Οπότε:

$$E[S_N^2] = M''_{S_N}(0) + (E[S_N])^2$$

και

$$Var(S_N) = \frac{q}{p\lambda^2} + \frac{q}{p^2\lambda^2}$$

Αν η N ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p, τότε το συνολικό ποσό αποζημιώσεων S_N δίνεται από το άθροισμα εκθετικών τυχαίων μεταβλητών με ανεξάρτητο πλήθος όρων N.
Η ροπογεννήτρια του S_N είναι:

$$M_{S_N}(t) = E(e^{tS_N}) = E[M_X(t)^N] = M_N(\ln M_X(t))$$

όπου

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$$

και

$$M_N(t) = \frac{p}{1 - qe^t}, \quad |qe^t| < 1$$

Άρα:

$$M_{S_N}(t) = \frac{p}{1 - q\frac{\lambda}{\lambda - t}} = \frac{p(\lambda - t)}{\lambda - t - q\lambda}, \quad t < \lambda(1 - q)$$

που είναι η ροπογεννήτρια μιας εκθετικής κατανομής με παράμετρο $p\lambda$.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του S_N είναι:

$$f_{S_N}(x) = p\lambda e^{-p\lambda x}, \quad x \geq 0$$

δηλαδή το συνολικό ποσό αποζημιώσεων ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $p\lambda$.

Χρησιμότητα της Ροπογεννήτριας Συνάρτησης

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση έχει πολλές χρήσιμες εφαρμογές στη θεωρία πιθανοτήτων και στατιστικών:

- **Περιγραφή Κατανομής:** Η ροπογεννήτρια συνάρτηση προσφέρει μια πλήρη περιγραφή της κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής.
- **Αναγνώριση Κατανομών:** Χρησιμοποιείται για να αναγνωρίσουμε τη συγκεκριμένη κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής από τη μορφή της ροπογεννήτριας συνάρτησης.
- **Αναπαράσταση Συστήματος με Συνδυασμένες Τυχαίες Μεταβλητές:** Βοηθά στον υπολογισμό του συνολικού ποσού ή συνδυασμένων μεταβλητών από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές (π.χ., άθροισμα).

Πρακτικές Εφαρμογές:

- **Άθροισμα Ανεξάρτητων Τυχαίων Μεταβλητών:** Για τον υπολογισμό του συνολικού ποσού αποζημιώσεων σε ασφαλιστικά συστήματα ή την απόδοση ενός χαρτοφυλακίου.
- **Αναγνώριση και Σύγκριση Κατανομών:** Στη χρηματοοικονομική ανάλυση για την αναγνώριση κατανομών εσόδων ή κινδύνων.
- **Εφαρμογή στη Στατιστική Ανάλυση:** Χρησιμοποιείται στην εκτίμηση παραμέτρων και τη διαχείριση κινδύνου σε μοντέλα χρηματοοικονομικών ή ασφαλιστικών προϊόντων.

Πιθανογεννήτρια συνάρτηση

Έστω X μία διακριτή τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει μη-αρνητικές ακέραιες τιμές, δηλαδή $R_X \subseteq \{0, 1, 2, \ldots\}$. Η πιθανογεννήτρια $G_X(t)$ (probability generating function) μιας τυχαίας μεταβλητής X, ορίζεται ως:

$$G_X(t) = E\left(t^X\right) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X = x)\, t^X,$$

Η πιθανογεννήτρια μιας τ.μ. υπάρχει πάντα για $-1 \leq t \leq 1$.

Βασικές ιδιότητες πιθανογεννήτριας συνάρτησης

Έστω X μια διακριτή τ.μ. με $R_X \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$ και πιθανογεννήτρια συνάρτηση $G_X(t)$. Τότε ισχύει ότι

$$P(X = r) = \frac{1}{r!} \left. \frac{d^r G_X(t)}{dt^r} \right|_{t=0} = \frac{1}{r!} G_X^{(r)}(0)$$

και

$$\begin{aligned} \mu_{(r)} &= E[(X)_r] = E[(X(X-1)(X-2)\dots(X-r+1)] \\ &= \left[\frac{d^r}{dt^r} G_X(t)\right]_{t=1} \\ &= G_X^{(r)}(1), \; r = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ισχύει ότι

- $M(0) = 1$
- $G_X(1) = 1$
- $M(\ln t) = G_X(t)$
- $G_X(0) = P(X = 0)$
- $G_X(e^t) = M(t)$

Εύρεση μέσης τιμής και διακύμανσης μιας τ.μ. X με χρήση πιθανογεννήτριας συνάρτησης.

$$\begin{aligned} E(X) = G'(1) &= \mu_{(1)} \\ G''(1) &= E(X(X-1)) = \mu_{(2)} \\ G''(1) + G'(1) &= E(X(X-1)) + E(X) = E(X^2) \\ V(X) &= E(X^2) - E^2(X) = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2 \end{aligned}$$

Έστω δύο τ.μ. X και Y με πιθανογεννήτριες συναρτήσεις $G_X(t)$ και $G_Y(t)$ αντίστοιχα. Τότε αν είναι

$$G_X(t) = G_Y(t)$$

οι τ.μ. X και Y ακολουθούν την ίδια κατανομή.
Έστω μια τ.μ. X με πιθανογεννήτρια συνάρτηση $G_X(t)$, τότε η τ.μ.

$$Y = \alpha + \beta X,\ \beta \neq 0$$

έχει πιθανογεννήτρια που δίνεται από τον τύπο

$$G_Y(t) = t^{\alpha} G_X(t^{\beta})$$

(Σημείωση: Πρέπει α και β να είναι ακέραιοι)

Χαρακτηριστικές Συναρτήσεις

Η χαρακτηριστική συνάρτηση (characteristic function) μιας τ.μ. είναι μία μιγαδική συνάρτηση. Αν X είναι τ.μ., τότε η χαρακτηριστική της συνάρτηση ορίζεται ως εξής:

$$\varphi_X(t) = \varphi(t) = E(e^{itX}),\ t \in R$$

όπου $i = \sqrt{-1}$ είναι η φανταστική μονάδα.

Υπενθύμιση: $M_X(t) = E(e^{tX})$

Κάθε μιγαδικός αριθμός z μπορεί να γραφεί στη μορφή $z = a + i \cdot b$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και ορίζουμε ένα αριθμό $i \notin \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $i^2 = -1$. Στη συνέχεια μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο

$$\mathbb{C} = \{a + i \cdot b : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Τα στοιχεία του συνόλου αυτού ονομάζονται μιγαδικοί αριθμοί. Για ένα μιγαδικό αριθμό $z = a + i \cdot b$ ονομάζουμε a το πραγματικό του μέρος και b το φανταστικό του μέρος.

Ισχύει ότι

$$e^{it} = cos(t) + i \cdot sin(t) \text{ και } |e^{it}| = \sqrt{cos^2(t) + sin^2(t)} = 1, \; t \in \mathbb{R}$$

Έστω μια τ.μ. X και μία πραγματική σταθερά t, τότε $|e^{it}| = 1$. Επομένως η συνάρτηση e^{itX} έχει πεπερασμένη μέση τιμή και η χαρακτηριστική συνάρτηση της X, φ_X, είναι καλά ορισμένη.
Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ είναι

$$|\varphi_X(t)| = |E(e^{itX})| \leq E|e^{itX}| = E(1) = 1.$$

Συμπέρασμα: Η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι πεπερασμένη για κάθε t.

Σημείωση: Ισχύει ότι $|E(X)| \leq E|X|$.

Ορισμός

Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος και μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}$, τότε μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ως

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = E[cos(tX)] + iE[sin(tX)],\ t \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση φ_X ονομάζεται χαρακτηριστική συνάρτηση της τ.μ. X.

Αν η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x), x = 0, 1, 2, \ldots$ η χαρακτηριστική της συνάρτηση θα δίνεται ως εξής

$$\varphi_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} f_X(x)$$

Αν η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ η χαρακτηριστική της συνάρτηση θα δίνεται ως εξής

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)$$

Η συνάρτηση $\varphi_X(t)$ σε αυτή την περίπτωση είναι γνωστή ως μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f_X(x)$.

Παρατηρήσεις:

- Η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής X χαρακτηρίζει μονοσήμαντα την κατανομή της X
- Η ροπογεννήτρια σε αντίθεση με την χαρακτηριστική συνάρτηση δεν υπάρχει πάντα.
- $\varphi(0) = 1$
- $|\varphi(t)| \leq 1,\ t \in R$
- Η $\varphi(t)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής
- Η συνάρτηση κατανομής αλλά και η συνάρτηση πιθανότητας (ή πυκνότητας) μιας τ.μ. προκύπτουν από την χαρακτηριστική της συνάρτηση μέσω τύπων αντιστροφής
- Έστω η τ.μ. $Y = \alpha + \beta X$, τότε

$$\varphi_Y(t) = e^{i\alpha X}\varphi_X(bt).$$

Ροπές και χαρακτηριστική συνάρτηση

Θεώρημα:

Αν η χαρακτηριστική συνάρτηση φ_X μιας τ.μ. X έχει παράγωγο τάξης r στο $t = 0$, τότε

- αν το r είναι άρτιος, τότε υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ όλες οι ροπές της X μέχρι την τάξη r
- αν το r είναι περιττός, τότε υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ όλες οι ροπές της X μέχρι την τάξη $r - 1$

Θεώρημα:

Αν για την τυχαία μεταβλητή X, η οποία έχει συνάρτηση κατανομής F_X, υπάρχει η ροπή τάξης r, τότε οι πρώτοι r παράγωγοι της χαρακτηριστικής συνάρτησης υπάρχουν, είναι συνεχείς στον $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$\frac{d^r \varphi_X(t)}{dt^r} \equiv \varphi_X^{(r)}(t) = i^r \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{itx} dF_X(x).$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση για οποιαδήποτε τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση του t και r φορές συνεχώς παραγωγίσιμη αν υπάρχει η $E(X^r)$.Επίσης αν ισχύει $E(X^r) \in \mathbb{R}$, τότε θα έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}^r \varphi_X(t)}{\mathrm{d}t^r}\Big|_{t=0} \equiv \varphi_X^{(r)}(0) = i^r \int_{\mathbb{R}} x^r dF_X(x) = i^r E(X^r),$$

ή

$$E(X^r) = i^{-r} \varphi_X^{(r)}(0).$$

ή

$$E(X^r) = (-1)^r i^r \frac{\mathrm{d}^r \varphi_X(t)}{\mathrm{d}t^r}\Big|_{t=0}.$$

Θεώρημα:

Δυο συναρτήσεις κατανομής ταυτίζονται αν και μόνο αν οι αντίστοιχες χαρακτηριστικές τους συναρτήσεις ταυτίζονται. Δηλαδή

$$F_X(x) = F_Y(x), \forall x \in \mathbb{R} \iff \varphi_X(t) = \varphi_Y(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

Θεώρημα:

Έστω $\varphi_X(t)$ και $F_X(x)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση και η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. Χ. Τότε για όλα τα σημεία α,β με $\alpha < \beta$ και $T > 0$ ισχύει

$$\frac{F_X(\beta)+F_X(\beta^-)}{2}-\frac{F_X(\alpha)+F_X(\alpha^-)}{2} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-it\alpha}-e^{-it\beta}}{it}\varphi_X(t)dt$$

Με τη βοήθειά της χαρακτηριστικής συνάρτησης μπορούμε *να* υπολογίσουμε τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. Χ. Έστω η διακριτή τ.μ. Χ, τότε ισχύει ο τύπος αντιστροφής

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itX} \varphi_X(x) dt$$

Έστω X μία τυχαία μεταβλητή της οποίας η χαρακτηριστική συνάρτηση φ_X είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή είναι τέτοια ώστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(t)| dt$$

είναι πεπερασμένο. Τότε αποδεικνύεται ότι η X είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με σ.π.π. που δίνεται από τον τύπο αντιστροφής

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itX} \varphi_X(x) dt$$

Θεώρημα Μοναδικότητας

Η χαρακτηριστική συνάρτηση φ_X μιας τυχαίας μεταβλητής X χαρακτηρίζει μονοσήμαντα την κατανομή της X.

Πρόταση:

Έστω $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Ορίζουμε την τ.μ. $Y = X_1 + X_2$ και επομένως η χαρακτηριστική συνάρτηση της Y είναι $\varphi_Y = \varphi_{X_1}\varphi_{X_2}$, δηλαδή

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t), \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Η παραπάνω πρόταση ισχύει ανάλογα και για το άθροισμα n τυχαίων μεταβλητών.

Παράδειγμα:

Έστω η τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια συνάρτηση για την τ.μ. X και πως από αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και τη διακύμανση της;

Απάντηση:
Η ροπογεννήτρια συνάρτηση για την τ.μ. X υπολογίζεται ως εξής

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \int_0^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx = \int_0^{\infty} e^{tx} e^{-x} dx \\
&= \int_0^{\infty} e^{(t-1)x} dx = \frac{e^{(t-1)x}}{t-1}\Big|_{t=0} \\
&= 0 - \frac{1}{t-1} = (1-t)^{-1} \text{ για } t < 1
\end{aligned}
$$

Η μέση τιμή για την τ.μ. X θα είναι

$$
\mu = \mu_1' = \frac{dM_X(0)}{dt} = (1-0)^{-2} = 1.
$$

Η διακύμανση για την τ.μ. X δίνεται από τη σχέση

$$
\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 = \mu_2' - (\mu_1')^2.
$$

Είναι

$$\mu_2^{'} = \frac{d^2 M_X(0)}{dt^2} = 2(1-0)^{-3} = 2.$$

Επομένως $\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 = \mu_2^{'} - (\mu_1^{'})^2 = 1.$

Παράδειγμα:

Έστω ότι η τ.μ. X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, τότε να βρεθεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της τ.μ. X.

Απάντηση:

Αφού $X \sim Exp(\lambda)$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X θα είναι

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= E[e^{itX}] \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{itx} dx \\
&= \left[\frac{\lambda}{it - \lambda} e^{(it-\lambda)x} \right]_0^\infty \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - it}.
\end{aligned}$$