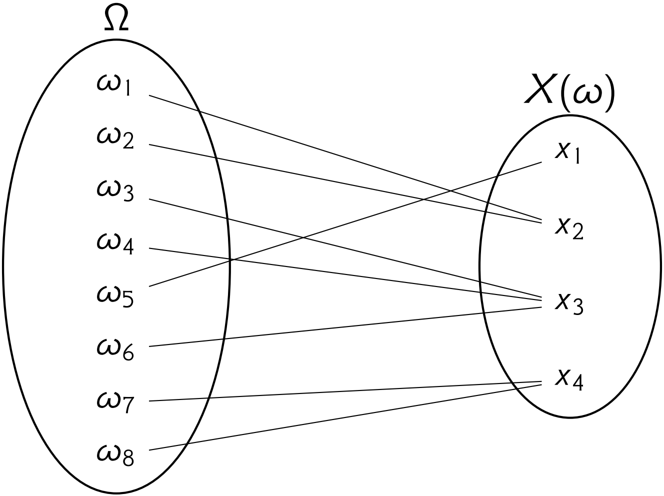
Ενότητα 2: Τυχαίες μεταβλητές

Περιεχόμενα

- Σε ένα πείραμα τύχης μπορούμε *να* αντιστοιχίσουμε σε κάθε δειγματικό σημείο *έναν* αριθμό χρησιμοποιώντας *έναν* προκαθορισμένο *κανόνα αντιστοίχησης.*
- Δηλαδή μπορούμε *να* ορίσουμε μια συνάρτηση X η οποία σε κάθε σημείο ω του δειγματικού χώρου Ω *να* αντιστοιχεί *έναν* πραγματικό αριθμό $X(\omega)$. Μία τέτοια συνάρτηση καλείται τυχαία μεταβλητή (random variable).



Η αντιστοιχία μεταξύ των στοιχειωδών ενδεχομένων και των τιμών της τυχαίας μεταβλητής X.

Ορισμός

Έστω το ζεύγος $(\Omega, \mathcal{F})$ που αποτελείται από τον δειγματικό χώρο και το χώρο ενδεχομένων. Έστω η συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Η συνάρτηση X θα ονομάζεται τυχαία μεταβλητή αν για κάθε σύνολο Borel, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ η

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}$$

ανήκει στην $\mathcal{F}$.

- Η τυχαία μεταβλητή δηλαδή είναι μια $\mathcal{F}$-μετρήσιμη συνάρτηση που παίρνει πραγματικές τιμές.
- Για την απεικόνιση $X^{-1}(\cdot)$ ισχύουν τα εξής
  - α) Αν $A \subset \mathbb{R}$ και $B \subset \mathbb{R}$ με $A \cap B = \emptyset$, τότε

$$[X^{-1}(A)] \cap [X^{-1}(B)] = \emptyset$$

  - β) Αν $A_j \subset \mathbb{R}$, $j \in I$, τότε

$$X^{-1}\left(\bigcup_{j\in I} A_j\right) = \bigcup_{j\in I} X^{-1}(A_j).$$

  - Αν $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ τότε οποιαδήποτε συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή.

- Τυχαία μεταβλητή
  Πιθανότητα: Αρχικός χώρος πιθανότητας → χώρος Borel
  - Η τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}$ μετέτρεψε το χώρο Borel$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ σε ένα χώρο πιθανότητας $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$ όπου η πιθανότητα P_X ορίζεται πάνω στη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ μέσω της παρακάτω σχέσης

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

-

$$P_X(\mathbb{R}) = P(X^{-1}(\mathbb{R})) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}) = 1.$$

Κατανομή τυχαίας μεταβλητής

Έστω η παρακάτω πιθανότητα

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Η πιθανότητα $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ ονομάζεται κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X.

Πρόταση:
Έστω ο χώρος $(\Omega, \mathcal{F})$, τότε η συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή ως προς το χώρο ενδεχομένων $\mathcal{F}$, αν και μόνο αν $x \in \mathbb{R}$ η $X^{-1}((-\infty, x])$ ανήκει στην $\mathcal{F}$. Δηλαδή αν

$$\begin{aligned} X^{-1}(-\infty, x]) &= \{\omega \in \Omega | X(\Omega) \in (-\infty, x]\} \\ &= \{\omega \in \Omega | X(\Omega) \leq x\} \\ &= \{X \leq x\} \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Συνάρτηση κατανομής τυχαίας μεταβλητής

Έστω X τυχαία μεταβλητή (διακριτή ή συνεχής). Η συνάρτηση $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ που ορίζεται ως $F_X = P_X(X \leq x)$ και η οποία εκφράζει την πιθανότητα να λάβει η τυχαία μεταβλητή X οποιαδήποτε τιμή μικρότερη ή ίση του x, ονομάζεται αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (cumulative probability distribution function-cdf) ή συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X.

Ισχύουν τα εξής:

- Η F_X είναι αύξουσα, δηλαδή αν $\alpha < \beta \Rightarrow F_X(\alpha) \leq F_X(\beta)$.
- Η F_X είναι δεξιά συνεχής
- $F_X(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
- $F_X(+\infty) = \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.

Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Έστω η τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Αν το σύνολο των τιμών της X, είναι πεπερασμένο ή απείρως αριθμήσιμο, τότε η μεταβλητή αυτή ονομάζεται διακριτή τυχαία μεταβλητή (discrete random variable).

Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή και $R(X)$ το πεδίο τιμών της. Μία συνάρτηση $P_X(x) = P(X = x)$ με πεδίο ορισμού τις τιμές της X και πεδίο τιμών τις πιθανότητες των τιμών αυτών, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$0 \leq P_X(x) \leq 1, \text{για κάθε } x \in R(X)$$
$$\sum_{x \in R(X)} P_X(x) = 1$$

καλείται συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) (probability mass function) της τυχαίας μεταβλητής X.
(Υπενθύμιση: $R(X) = \{x \in \mathbb{R} | x = X(\omega), \omega \in \Omega\}$)

Το σύνολο των ζευγών $\{x, P_X(x)\}$ ονομάζεται κατανομή πιθανότητας (probability distribution) της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X.

Σημείωση:

Το σύνολο T_X που αποτελείται αποκλειστικά από τιμές x_j της τυχαίας μεταβλητής που έχουν μη μηδενική πιθανότητα, δηλαδή από τα σημεία x_j για τα οποία ισχύει

$$P_x(\{x_j\}) = P(X = x_j) > 0,$$

ονομάζεται στήριξη της τυχαίας μεταβλητής X.

Η στήριξη T_X συνήθως ταυτίζεται με το σύνολο τιμών της τ.μ. X, $R(X)$.

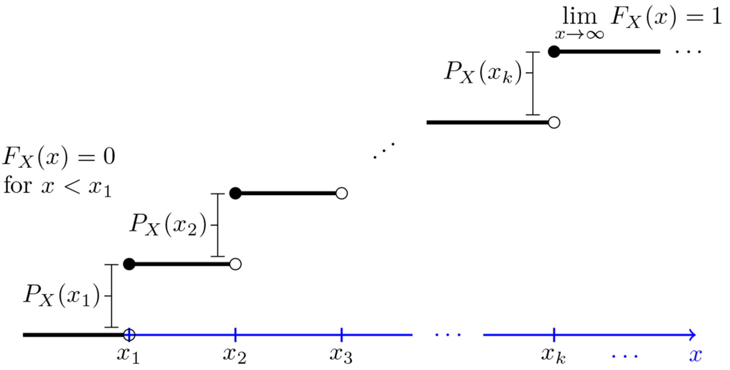
Αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας διακριτής τυχαίας μεταβλητής

Έστω η διακριτή τυχαία μεταβλητή X με τιμές $x_i, i = 1, 2, \ldots$. Τότε, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής δίνεται από τη σχέση

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P_X(x_i), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Σημείωση: Η συνάρτηση κατανομής F μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X είναι σταθερή κατά διαστήματα και αυξάνει μόνο με άλματα στα σημεία x_i. Δηλαδή

$$F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}) = P(X = x_i)$$



Σχήμα 1: Συνάρτηση κατανομής διακριτής τυχαίας μεταβλητής

Για $\alpha \leq \beta$ ισχύει ότι

$$P(\alpha < X \leq \beta) = F_X(\beta) - F_X(\alpha)$$

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Η τυχαία μεταβλητή Χ, με τιμές x, ονομάζεται συνεχής τυχαία μεταβλητή (continuous random variable) αν:

- το πεδίο τιμών της $X(\Omega)$ είναι οι πραγματικοί αριθμοί
- υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f(x)$ τέτοια ώστε $f(x) \geq 0$, για όλες τις τιμές x στο διάστημα $-\infty < x < \infty$
- για δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β με $\alpha < \beta$, ισχύει ότι

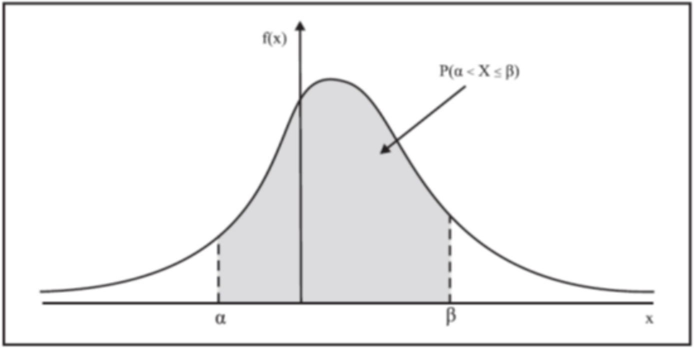
$$P(\alpha < X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f_X(x)dx.$$

Η συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density function-pdf) της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π) ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες

1) $f_X(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$



Σχήμα 2: Διάγραμμα Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας

Αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής, τότε η αθροιστική συνάρτηση κατανομής θα είναι

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

Για κάθε συνεχή τυχαία μεταβλητή X ισχύει ότι

$$f_X(x) = f(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = F'_X(x), \text{σχεδόν παντού}.$$

Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 & \forall\, x \in [0, 1] \\ 0 & \forall\, x \notin [0, 1] \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η πιθανότητα να λάβει η X τιμή

α) Μικρότερη από ή ίση με $x = 1/2$

β) Μεταξύ των $x = 1/3$ και $x = 1/2$.

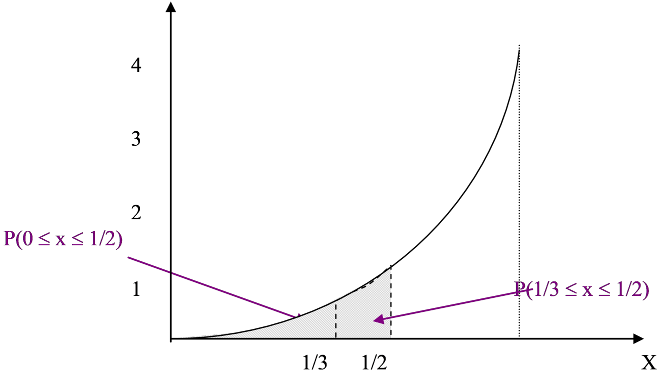
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) Είναι

$$P(0 \leq X \leq 1/2) = \int_0^{1/2} 4x^3 dx = \left[x^4 + c\right]_0^{1/2}$$
$$= \left[(1/2)^4 + c\right] - \left[0 + c\right] = 1/16$$

β) Είναι

$$P(1/3 \leq X \leq 1/2) = \int_{1/3}^{1/2} 4x^3 dx = \left[x^4 + c\right]_{1/3}^{1/2}$$
$$= \left[(1/2)^4 + c\right] - \left[(1/3)^4 + c\right] = 65/1296$$


4
3
2
1
P(0 ≤ x ≤ 1/2)
P(1/3 ≤ x ≤ 1/2)
1/3
1/2
X

Ενδεχόμενο	Αντίστοιχη πιθανότητα	Ενδεχόμενο	Αντίστοιχη πιθανότητα
$X \leq \beta$	$F(\beta)$	$\alpha < X \leq \beta$	$F(\beta) - F(\alpha)$
$X < \beta$	$F(\beta-)$	$\alpha < X < \beta$	$F(\beta-) - F(\alpha)$
$X > \alpha$	$1 - F(\alpha)$	$\alpha \leq X \leq \beta$	$F(\beta) - F(\alpha-)$
$X \geq \alpha$	$1 - F(\alpha-)$	$\alpha \leq X < \beta$	$F(\beta-) - F(\alpha-)$
$X = \alpha$	$F(\alpha) - F(\alpha-)$		