Στατιστική ΙΙ

Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης, ΟΠΑ

tsomidisg@aueb.gr

Ενδεικτική Βιβλιογραφία:

1. Αρβανίτης Σ., Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων για την Οικονομική Επιστήμη,ΠΕΔΙΟ ΕΚΔΟΤΙΚΗ, 2023
2. Πιττής Ν., Πιθανοθεωρητική Θεμελίωση της Οικονομετρίας, UNIBOOKS IKE, 2017
3. Κοντογιάννης, Ι., και Τουμπής Σ., Στοιχεία Πιθανοτήτων Με Εφαρμογές στην Στατιστική και την Πληροφορική. Εκδόσεις Κάλλιπος, 2015, https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/2810/3/final_h.pdf
4. Hoel P., Port S., Stone C., Εισαγωγή στη θεωρία πιθανοτήτων, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2005
5. Mittelhammer, R. C., Mathematical statistics for economics and business, Springer, 2013.

Περιεχόμενα

Σκοπός μαθήματος

- Η εισαγωγή και περαιτέρω εμβάθυνση σε θέματα θεωρίας πιθανοτήτων
- Η εισαγωγή σε στοιχεία θεωρίας και εφαρμογές που σχετίζονται με το γνωστικό πεδίο της Μαθηματικής Στατιστικής και ειδικότερα της Εκτιμητικής.

Ενότητα 1: Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων

Εισαγωγή

- Τα πειράματα μπορούν να χωρισθούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες: τα αιτιοκρατικά (deterministic) και τα τυχαία (random).
- Έστω ένα πείραμα το αποτέλεσμα του οποίου επηρεάζεται από την τύχη. Ένα τέτοιο πείραμα καλείται πείραμα τύχης (random experiment), π.χ. η ρίψη ενός νομίσματος.
- Το χαρακτηριστικό ενός πειράματος τύχης είναι ότι, σε μία εκτέλεσή του, δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα που θα εμφανιστεί.
- Αιτιοκρατικά είναι τα πειράματα εκείνα όπου η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελούνται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα, για παράδειγμα ο τόκος που θα λάβουμε για καταθέσεις ύψους X με προκαθορισμένο επιτόκιο Y.

Στοιχεία θεωρίας συνόλων-Βασικές έννοιες

Σημείωση: Η Θεωρία Πιθανοτήτων χρησιμοποιεί έννοιες από τη θεωρία συνόλων.

- Ένα σύνολο (set) είναι μία καλώς ορισμένη συλλογή από στοιχεία.
- Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων που μπορούν να εμφανιστούν σε μία εκτέλεση ενός πειράματος τύχης καλείται δειγματικός χώρος (sample space) και (συνήθως) συμβολίζεται με Ω.
- Τα στοιχεία ενός δειγματικού χώρου Ω καλούνται δειγματικά σημεία ή δειγματοσημεία (sample points).
- Τα ενδεχόμενα (events) είναι κατάλληλα υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω

Ένα σύνολο που δεν περιέχει στοιχεία ονομάζεται κενό σύνολο και συμβολίζεται με $\emptyset$ (Σημ.: Το κενό σύνολο μπορεί να συμπεριληφθεί σαν στοιχείο ενός άλλου συνόλου π.χ. $\Gamma = \{\emptyset, B\}, B = \{1, 2, 3\}$)

Παράδειγμα:

- Το σύνολο $B =$ {Κυριακή,Δευτέρα,...,Σάββατο} των ημερών της εβδομάδας
- Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακέραιων αριθμών, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Ποια από τα παραπάνω σύνολα έχουν πεπερασμένο και ποια άπειρο πλήθος στοιχείων;

Ισότητα συνόλων:
Δύο σύνολα Α,Β θα λέγονται ίσα, $A = B$ εάν αποτελούνται ακριβώς από τα ίδια στοιχεία.

Παράδειγμα:

- Το σύνολο $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ είναι ίσο με το σύνολο $B = \{\beta, \gamma, \alpha\}$ (η διάταξη των στοιχείων δεν παίζει ρόλο)
- Το σύνολο $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ είναι ίσο με το σύνολο $B = \{\beta, \gamma, \alpha, \delta, \delta\}$ (η καταγραφή ενός στοιχείου περισσότερες από μια φορές δεν παίζει ρόλο)

Υποσύνολο συνόλου:
Ένα σύνολο A θα λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου B και θα συμβολίζεται $A \subseteq B$, όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B. Σε μια τέτοια περίπτωση θα λέμε ότι το B περιέχει το A.

Παρατηρήσεις:
Ο παραπάνω ορισμός δεν αποκλείει την περίπτωση $B \subseteq A$, δηλαδή μπορεί να ισχύει ταυτοχρόνως $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $A = B$.
Αν ισχύει $A \subseteq B$ και ταυτοχρόνως $A \neq B$, τότε λέμε ότι το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B και συμβολίζεται ως $A \subset B$. Επίσης θεωρούμε το $\emptyset$ ως υποσύνολο κάθε συνόλου.

Σημείωση:
Το σύνολο συνήθως ορίζεται με την περιγραφή μιας κοινής ιδιότητας των στοιχείων του, π.χ.
$A = \{x | x$ έχει την ιδιότητα $p\}$. Συμβολίζουμε με $x \in A$ όταν λέμε πως ένα στοιχείο του συνόλου ανήκει στο σύνολο και όταν λέμε πως δεν ανήκει τότε συμβολίζουμε με $x \notin A$

Δυναμοσύνολο (power set) συνόλου
Έστω το μη-κενό σύνολο Α, τότε το σύνολο όλων των δυνατών υποσυνόλων του Α (συμπεριλαμβανομένου και του $\emptyset$) ονομάζεται δυναμοσύνολο του Α και συμβολίζεται με $P(A)$.

Παράδειγμα:

- Έστω το σύνολο $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, τότε το δυναμοσύνολο του Α είναι το

$$P(A) = \{\{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}, \emptyset\}$$

- Έστω το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, τότε το δυναμοσύνολο του $\mathbb{N}$ είναι το

$$P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \ldots\}$$

- Έστω το σύνολο $S = \{\{\alpha\}, \{1\}\}$, τότε το δυναμοσύνολο του S είναι το

$$P(\{\{a\}, \{1\}\}) = \Big\{\emptyset, \{\{a\}\}, \{\{1\}\}, \{\{a\}, \{1\}\}\Big\},$$

Παρατήρηση:
Για ένα οποιοδήποτε σύνολο X με πεπερασμένο αριθμό στοιχείων n, ο αριθμός των στοιχείων του δυναμοσυνόλου του $P(X)$ είναι ίσος με 2^n.

Πράξεις Συνόλων I

Έστω τα σύνολα Α και Β, υποσύνολα του συνόλου αναφοράς Ω.

- Συμπλήρωμα συνόλου Α: A^c ή A'

$$A' = \{x | x \in \Omega \text{ και } x \notin A\}$$

- Τομή των συνόλων Α και Β:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ και } x \in B\}$$

- Ένωση των συνόλων Α και Β:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

- Διαφορά των συνόλων Α και Β: $A - B = A \cap B'$

$$A - B = \{x | x \in A \text{ και } x \notin B\}$$

Πράξεις Συνόλων ΙΙ

- Καρτεσιανό γινόμενο συνόλων
  Έστω δύο μη-κενά σύνολα Α και Β, τότε το καρτεσιανό γινόμενο των Α και Β συμβολίζεται με $A \times B$ και ορίζεται ως το σύνολο

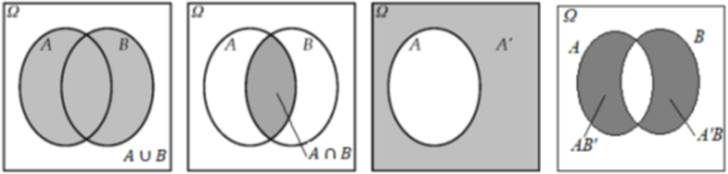
$$A \times B = \{(\alpha, \beta) | \alpha \in A, \beta \in B\}$$

Παρατηρήσεις:

- Το συμπλήρωμα του συνόλου Α ως προς το Ω μπορεί να γραφεί και ως $A' = \Omega - A$
- Γενίκευση του καρτεσιανού γινομένου στη περίπτωση n συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_1 \in A_1, \ldots, \alpha_n \in A_n\}$$

  Στην περίπτωση που $A_1 = A_2 = \ldots A_n = A$ τότε $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = A^n$



Ω
A
B
A ∪ B
Ω
A
B
A ∩ B
Ω
A
A′
Ω
A
B
AB′
A′B

Ιδιότητες των πράξεων συνόλων Ι

- Αντιμεταθετική Ιδιότητα:
  $A \cup B = B \cup A$ και $A \cap B = B \cap A$
- Προσεταιριστική Ιδιότητα:
  $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$,
  $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$.
- Επιμεριστική Ιδιότητα:
  $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$,
  $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.

Ιδιότητες των πράξεων συνόλων II

- Τύποι De Morgan:
  $(A \cup B)' = A' \cap B'$,
  $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

- Ιδιότητες αυτοδυναμίας
  $A \cup A = A$,
  $A \cap A = A$.
- Ιδιότητες Συμπληρώματος
  $A \cap A' = \emptyset, A \cup A' = \Omega, (A')' = A, \Omega^{'} = \emptyset, A \subset B \Rightarrow B' \subset A', A - B = A \cap B'$
- Ταυτοτικές Ιδιότητες
  $A \cap \Omega = A, A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \Omega = \Omega$

Παράδειγμα

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και τα σύνολα $A = \{1, 2\}, B = \{2, 4, 5\}, \Gamma = \{1, 5, 6\}$, Να βρείτε τα παρακάτω σύνολα:

- $A \cup B$
- $A \cap B$
- $A \cup \Gamma$
- $A \cap \Gamma$

Γενικεύσεις πράξεων ένωσις και τομής για αυθαίρετο αριθμό συνόλων

Έστω το σύνολο αναφοράς Ω και τα υποσύνολά του $A_1, \ldots, A_n$, τότε

- Η ένωση των συνόλων $A_1, \ldots, A_n$ είναι το σύνολο που περιέχει τα σημεία που ανήκουν σε τουλάχιστον ένα από τα $A_1, \ldots, A_n$:

$$A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

- Η τομή των συνόλων $A_1, \ldots, A_n$ είναι το σύνολο που περιέχει τα σημεία εκείνα που ανήκουν σε όλα τα σύνολα $A_1, \ldots, A_n$:

$$A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

- Όταν το πλήθος των συνόλων A_i δεν είναι πεπερασμένο τότε

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

Πληθάριθμος (cardinality) συνόλου:
Ο πληθάριθμος ενός συνόλου A είναι το πλήθος των στοιχείων του και συμβολίζεται $|A|$. Αν το σύνολο A είναι πεπερασμένο τότε το είναι $|A|$ φυσικός αριθμός. Για παράδειγμα ο πληθάριθμος του συνόλου $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ είναι $|A| = 6$.

Αριθμήσιμο-Υπεραριθμήσιμο σύνολο:
Ένα σύνολο A λέγεται αριθμήσιμο όταν είναι πεπερασμένο ή ισοδύναμο με το σύνολο των φυσικών αριθμών δηλαδή όταν $|A| \leq |\mathbb{N}|$. Αν το A δεν είναι αριθμήσιμο, τότε λέμε ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο.

Παράδειγμα:
Έστω τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $B = \{2, 4, 6, 8\}$.
Να βρεθεί ο πληθάριθμος των συνόλων $B, A \cup B, A \cap B$.

Απάντηση:
Είναι $|B| = 4$.
Αφού $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$, τότε $|A \cup B| = 7$.
Είναι $A \cap B = \{2, 4, 6\}$, τότε $|A \cap B| = 3$.

Ισότητα πληθάριθμων συνόλων
Δύο σύνολα A και B θα έχουν τον ίδιο πληθάριθμο αν όλα τα στοιχεία του ενός συνόλου μπορούν να αντιστοιχηθούν ένα προς ένα με όλα τα στοιχεία του άλλου. Σε αυτή τη περίπτωση λέμε ότι το σύνολο A είναι ισοδύναμο με το σύνολο B, $A \sim B$ ή $|A| = |B|$.

Σημείωση:
Ο πληθάριθμος του συνόλου των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, $|\mathbb{N}|$ ορίζεται ως ο πρώτος υπερπερασμένος πληθάριθμος και συμβολίζεται ως $\aleph_0$

Σχέση μεταξύ του πληθάριθμου ενός συνόλου και του πληθάριθμου του δυναμοσυνόλου του:

Ο πληθάριθμος του δυναμοσυνόλου $P(A)$ ενός οποιοδήποτε πεπερασμένου ή άπειρου συνόλου Α είναι μεγαλύτερος από τον πληθάριθμο του αρχικού συνόλου Α, δηλαδή ισχύει $|P(A)| > |A|$. Επίσης ισχύει

- Αν Α πεπερασμένο σύνολο, τότε $|P(A)| = 2^{|A|}$
- Αν $A = \mathbb{N}$, τότε $|P(= \mathbb{N})| = c = \aleph_1$

Παράδειγμα

- Άπειρα σύνολα με πληθάριθμο $\aleph_0$
  - Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$
  - Το σύνολο των ακεραίων αριθμών, $\mathbb{Z}$
  - Το σύνολο των ρητών αριθμών, $\mathbb{Q}$
- Άπειρα σύνολα με πληθάριθμο $\aleph_1$
  - Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$
  - Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$
  - Το δυναμοσύνολο των φυσικών αριθμών $P(\mathbb{N})$
  - Το σύνολο των κλειστών διαστημάτων $[\alpha, \beta]$
  - Το σύνολο των ανοικτών διαστημάτων (α, β)

Σ-άλγεβρα

Έστω Ω ένα σύνολο διάφορο του κενού. Μια κλάση $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του Ω ονομάζεται σ-άλγεβρα (υποσυνόλων του Ω) όταν ικανοποιεί τα παρακάτω:

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- Αν $A \in \mathcal{F}$ τότε $A' \in \mathcal{F}$
- Αν $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots \in \mathcal{F}$

Το ζεύγος $\Omega, \mathcal{F}$ καλείται μετρήσιμος χώρος.Τα στοιχεία της $\mathcal{F}$ καλούνται μετρήσιμα σύνολα.

Το δυναμοσύνολο του Ω (συλλογή όλων των υποσυνόλων) αποτελεί την μεγαλύτερη-άλγεβρα στο Ω. Το συμβολίζουμε ως 2^{Ω}.

"Εστω A μια συλλογή υποσυνόλων του Ω. Συμβολίζουμε με σ(A) την μικρότερη σ-άλγεβρα στο Ω η οποία περιέχει τη A.

Η σ-άλγεβρα Borel στο $\mathbb{R}$

Έστω ένα πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο το $\mathbb{R}$, δηλαδή $\Omega = \mathbb{R}$. Η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα ανοιχτά διαστήματα του R καλείται Borel.

$$\mathcal{B}(R) = \sigma(\{(a,b), -\infty \leq a \leq b \leq \infty\})$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύουν ισοδύναμα:

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(-\infty, x], x \in \mathbb{R}\})$
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(a,b]\})$
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{[a,b)\})$
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{[a,b]\})$

Παραδείγματα

- Έστω $\Omega \neq \emptyset$. Τότε η κλάση $P(\Omega)$ όλων των υποσυνόλων του Ω είναι η ευρύτερη σ-άλγεβρα . Επίσης η κλάση υποσυνόλων $\{\emptyset, \Omega\}$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα.
- Έστω $A \subset \Omega$ με $A \neq \Omega, \emptyset$, τότε η κλάση $\{\Omega, \emptyset, A, A'\}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω.

Χώροι Πιθανότητας

Αν για ένα πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο Ω και πεδίο ενδεχομένων $\mathcal{F}$ ισχύει ότι το δειγματικό σημείο είναι τέτοιο ώστε $\omega \in \mathcal{F}$ τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο συνέβη (occurs).

Τα ενδεχόμενα της μορφής ω καλούνται απλά ενδεχόμενα ενώ εκείνα που περιέχουν τουλάχιστον δύο δειγματικά σημεία καλούνται σύνθετα ενδεχόμενα.

Ένα υποσύνολο του δειγματικού χώρου ονομάζεται ενδεχόμενο.

Κλασικός ορισμός της πιθανότητας

Έστω ένα πείραμα τύχης με πεπερασμένο δειγματικό χώρο Ω με έστω Ν το πλήθος των δειγματικών σημείων (αποτελέσματα) τα οποία έχουν την ίδια ακριβώς «δυνατότητα» να συμβούν.Επίσης έστω ένα ενδεχόμενο Α του Ω, τότε η πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου Α ορίζεται ως εξής:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Τα στοιχεία του Α ονομάζονται ευνοϊκά αποτελέσματα ή ευνοϊκές περιπτώσεις για το Α.

$$P(A) = \frac{\text{Αριθμός ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{Σύνολο περιπτώσεων}}$$

Μέτρο Πιθανότητας

Η απεικόνιση P από τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ στο διάστημα $[0, 1]$ ονομάζεται μέτρο πιθανότητας εάν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- $P(A) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- Για τα αμοιβαίως αποκλειόμενα ενδεχόμενα $A_1, A_2, A_3, \dots$, ισχύει $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$.

Ένας χώρος πιθανότητας αποτελείται από τον δειγματικό χώρο Ω, την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ και το μέτρο πιθανότητας ή συνολοσυνάρτηση P και συμβολίζεται με $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Τα στοιχεία της σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ λέγονται ενδεχόμενα.

Ιδιότητες της πιθανότητας I

Για την πιθανότητα (σε δειγματικό χώρο Ω), ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες.

- $P(\emptyset) = 0$
- Για οποιαδήποτε ξένα ανά δύο ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ του συνόλου των ενδεχομένων του Ω,ισχύει

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$$

  (πεπερασμένη προσθετικότητα).
- Αν $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ είναι ένα αριθμησίμως άπειρο ενδεχόμενο του Ω τότε

$$P(A) = P(\{\alpha_1\}) + P(\{\alpha_2\}) + \ldots$$

Ιδιότητες της πιθανότητας II

- Αν $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ είναι ένα πεπερασμένο ενδεχόμενο του Ω τότε

$$P(A) = P(\{\alpha_1\}) + P(\{\alpha_2\}) + \cdots + P(\{\alpha_n\})$$

- $P(A \cap B) = P(A \text{ και } B) = P(A, B)$
  $P(A \cup B) = P(A \text{ ή } B)$
- Για ενδεχόμενο $A \in \mathcal{F}$ ισχύει $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$,
  (υποπροσθετική ιδιότητα ή ανισότητα Boole).
- Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$.

Λήμμα Borel-Cantelli

Έστω ο χώρος πιθανότητας $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ και μια ακολουθία ενδεχομένων $\{A_n\}, n \geq 1$ για την οποία ισχύει $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$. Τότε

$$P(\limsup A_n) = 0$$

Δειγματικοί χώροι

- Αν ο δειγματικός χώρος Ω περιέχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων τότε θα λέγεται πεπερασμένος δειγματικός χώρος
- Αν ο δειγματικός χώρος Ω περιέχει αριθμήσιμα άπειρα στοιχεία τότε θα λέγεται διακριτός δειγματικός χώρος
- Αν ο δειγματικός χώρος Ω περιέχει υπεραριθμήσιμο στοιχείων τότε θα λέγεται υπεραριθμήσιμος δειγματικός χώρος

Αν ο δειγματικός χώρος Ω είναι πεπερασμένος ή διακριτός τότε $P(\Omega) = \mathcal{F}$

Γενίκευση

Έστω μια κλάση ενδεχομένων $\{A_i, i \in I\}$,όπου το σύνολο I είναι ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών, π.χ. $I = \mathbb{N}$. Τότε τα ενδεχόμενα A_i της κλάσης $\{A_i,\ i \in I\}$ θα λέγονται ανεξάρτητα αν και μόνο αν για κάθε πεπερασμένη υποκλάση $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}\}$, $i_1, i_2, \ldots, i_m \in I$ δύο ή περισσότερων ενδεχομένων ($m \geq 2$) ισχύει ότι:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_m})$$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{m} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{m} P(A_{i_k}).$$

Ανεξάρτητες κλάσεις ενδεχομένων

Οι κλάσεις ενδεχομένων $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$ θα είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αν για κάθε επιλογή ενδεχομένων A_i από τις $\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι ανεξάρτητα.

Θεώρημα:
Αν οι κλάσεις ενδεχομένων $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και επίσης η κάθε μια εξ αυτών είναι π- κλάση, τότε και οι σ-άλγεβρες $\sigma(\mathcal{F}_1), \sigma(\mathcal{F}_2), \ldots, \sigma(\mathcal{F}_n)$ που παράγονται από τις $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$ είναι ανεξάρτητες.

Πρόταση:
Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και μια ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων $\{A_n\}_{n\geq 1}$ για την οποία ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$. Τότε θα έχουμε

$$P(limsup A_n) = 1.$$

Μηδέν-Ένα κριτήριο του Borel

Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και μια ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων $\{A_n\}_{n\geq 1}$. Τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P(lim\ sup\ A_n) = 0$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \Rightarrow P(lim\ sup\ A_n) = 1\,.$$

Δηλαδή, αν μας δοθεί μια ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων $\{A_n\}_{n\geq 1}$, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου $lim\ sup\ A_n$ μπορεί να πάρει μόνο τιμές 0 ή 1.

Δεσμευμένη πιθανότητα

Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος και B ένα ενδεχόμενο του Ω τέτοιο ώστε $P(B) > 0$. Για κάθε ενδεχόμενο A του Ω η δεσμευμένη πιθανότητα (conditional probability) του A δοθέντος του B δίνεται από την σχέση:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Η $P(A|B)$ λέγεται και εκ των υστέρων (a posteriori) πιθανότητα, ενώ η $P(A)$ εκ των προτέρων (a priori) πιθανότητα.

- Για κάθε ενδεχόμενο B με $P(B) > 0$ ισχύει $P(A|B) \geq 0$
- $P(\Omega|B) = 1$
- Αν $A_1, A_2, A_3, \cdots$ είναι ξένα ανά δύο ενδεχόμενα, τότε

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots |B) &= P(A_1|B) + P(A_2|B) + P(A_3|B) + \cdots \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B).
\end{aligned}
$$

Το Θεώρημα Συνέχειας

Μία πραγματική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής αν και μόνο αν για οποιαδήποτε συγκλίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{x_n\}_{n\geq 1}$, ισχύει $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$. Η συνάρτηση πιθανότητας P είναι μία συνεχής συνάρτηση.

Μονότονη ακολουθία ενδεχομένων:
Ορισμός:
Μία ακολουθία ενδεχομένων $\{A_n\}_{n\geq 1}$ λέγεται αύξουσα (φθίνουσα) αν $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots A_{n-1} \subseteq A_n$ ($A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots A_{n-1} \supseteq A_n$) και γράφουμε $\lim_{n\to\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ($\lim_{n\to\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$).

Θεώρημα Συνέχειας:
Αν η ακολουθία ενδεχομένων $\{A_n\}_{n\geq 1}$ είναι μονότονη, τότε $P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Θεώρημα Radon-Nikodym

Απόλυτη συνέχεια μέτρου πιθανότητας:
Έστω οι πιθανότητες $P, \bar{P}$ ορισμένες στο χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$, τότε θα λέμε ότι η $\bar{P}$ είναι απόλυτα συνεχής ως προς την P και θα συμβολίζεται ως $\bar{P} \ll P$ αν $\bar{P}(E) = 0$ όταν $P(E) = 0, E \in \mathcal{F}$.

Θεώρημα Radon-Nikodym
Έστω οι πιθανότητες $P, \bar{P}$ ορισμένες στο χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$, με την $\bar{P}$ να είναι απόλυτα συνεχής ως προς την P, δηλαδή ισχύει $\bar{P} \ll P$. Τότε υπάρχει μια μη αρνητική συνάρτηση $H : \Omega \to \mathbb{R}^+$, τέτοια ώστε

$$\bar{P}(A) = \int_A H \, dP,$$

για όλα τα ενδεχόμενα $A \in \mathcal{F}$.

Σημείωση: Η τυχαία μεταβλητή H ονομάζεται η παράγωγος Radon-Nikodym της $\bar{P}$ ως προς P ή αλλιώς η πυκνότητα της $\bar{P}$ ως προς P.

Στην περίπτωση της δεσμευμένης συνάρτησης πιθανότητας το θεώρημα σημαίνει ότι υπάρχει μια μη αρνητική συνάρτηση $H : \Omega \to \mathbb{R}^+$, τέτοια ώστε

$$\bar{P}(A|B) = \int_A H dP.$$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας (Total Probability Theorem).
Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας και $\{B_1, \ldots, B_n\}$ μια διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω. Αν υποθέσουμε ότι $P(B_i) > 0$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε για οποιοδήποτε ενδεχόμενο Α του δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι

$$\text{P(A)=} \sum_{i}^{n} P(A|B_i)P(B_i).$$

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Δύο ενδεχόμενα είναι στοχαστικά (ή στατιστικά) ανεξάρτητα (stochastically or statistically independent) αν και μόνο αν

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

Στην αντίθετη περίπτωση αν δηλαδή ισχύει ότι

$$P(A \cap B) \neq P(A)\, P(B)$$

τα ενδεχόμενα τότε καλούνται εξαρτημένα (dependent).

Τα ενδεχόμενα Α,Β και Γ είναι ανεξάρτητα αν όλες οι παρακάτω συνθήκες ισχύουν:

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A)\, P(B), \\
P(A \cap \Gamma) &= P(A)\, P(\Gamma), \\
P(B \cap \Gamma) &= P(B)\, P(\Gamma), \\
P(A \cap B \cap \Gamma) &= P(A)\, P(B)\, P(\Gamma).
\end{aligned}
$$

Παρατήρηση:

Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα τότε

- Τα ενδεχόμενα A και B' είναι ανεξάρτητα
- Τα ενδεχόμενα A' και B είναι ανεξάρτητα
- Τα ενδεχόμενα A' και B' είναι ανεξάρτητα

Θεώρημα Bayes

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας. Για οποιαδήποτε δύο ενδεχόμενα $A, B \in \mathcal{F}$ με $P(A) \neq 0$, τότε

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Γενικότερα, αν $B_1, B_2, B_3, \cdots$ ξένα ανά δύο μεταξύ τους ενδεχόμενα τέτοια ώστε $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega, i \neq j$ και $A \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$ κάποιο ενδεχόμενο, τότε

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_i^{\infty} P(A|B_i)P(B_i)}.$$

ή

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)P(A|B_n)}$$

Ποια είναι η διαφορά μεταξύ δεσμευμένης πιθανότητας και του κανόνα του Bayes;

Το Θεώρημα του Bayes προκύπτει από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας. Για παράδειγμα:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{για } P(B) > 0.$$

Αντίστοιχα, ισχύει:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad \text{για } P(A) > 0.$$

Επειδή $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$, λαμβάνουμε την τελική μορφή:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Το Θεώρημα του Bayes εφαρμόζεται σε διάφορους τομείς, όπως:

- **Ιατρική διάγνωση**: Υπολογισμός της πιθανότητας ύπαρξης μιας ασθένειας βάσει διαγνωστικών τεστ.
- **Ανάλυση δεδομένων**: Εκτίμηση πιθανοτήτων στην ανάλυση αγορών και στη χρηματοοικονομική μοντελοποίηση.
- **Ανίχνευση ανεπιθύμητων μηνυμάτων (spam filters)**:Υπολογισμός της πιθανότητας ένα email να είναι spam.