

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΙΙ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Έστω ένα πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο Ω και σ -πεδίο ενδεχομένων \mathcal{F} . Έστω δύο ενδεχόμενα A, B για τα οποία ισχύει $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Να βρεθούν οι παρακάτω πιθανότητες:

- α) Τουλάχιστον ένα ενδεχόμενο συμβαίνει.
- β) Μόνο το ενδεχόμενο A συμβαίνει.
- γ) Ούτε το ενδεχόμενο A συμβαίνει, ούτε το ενδεχόμενο B συμβαίνει.
- δ) Το πολύ ένα από τα δύο ενδεχόμενα συμβαίνει.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

- α) Είναι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

- β) Είναι

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

- γ) Είναι

$$P(A \cup B') = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

- δ)

ΑΣΚΗΣΗ 2

Αν $A, B, \Gamma \subseteq \Omega$ είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα, τότε να αποδείξετε ότι

$$\alpha) P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(AB) - P(A\Gamma) - P(B\Gamma) + P(AB\Gamma)$$

$$\beta) P(A'B'\Gamma') = 1 - P(A) - P(B) - P(\Gamma) + P(AB) + P(A\Gamma) + P(B\Gamma) - P(AB\Gamma)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) Με βάση τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων θα έχουμε

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup \Gamma) &= P((A \cup B) \cup \Gamma) = P(A \cup B) + P(\Gamma) - P(A \cap B \cap \Gamma) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) + P(\Gamma) - P((A\Gamma) \cup (B\Gamma)) \end{aligned}$$

Επειδή

$$P((A\Gamma) \cup (B\Gamma)) = P(A\Gamma) + P(B\Gamma) - P(AB\Gamma)$$

τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup \Gamma) &= P(A) + P(B) - P(AB) + P(\Gamma) - P((A\Gamma) \cup (B\Gamma)) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) + P(\Gamma) - [P(A\Gamma) + P(B\Gamma) - P(AB\Gamma)] \\ &= P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(AB) - P(A\Gamma) - P(B\Gamma) + P(AB\Gamma). \end{aligned}$$

β) Είναι

$$\begin{aligned} P(A'B'\Gamma') &= P(A \cup B \cup \Gamma)' = 1 - P(A \cup B \cup \Gamma) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(AB) - P(A\Gamma) - P(B\Gamma) + P(AB\Gamma)] \\ &= 1 - P(A) - P(B) - P(\Gamma) + P(AB) + P(A\Gamma) + P(B\Gamma) - P(AB\Gamma). \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε τέσσερις άσσους στη σειρά από μια τράπουλα υποθέτοντας ότι το χαρτί που τραβήξαμε δεν το επανατοποθετούμε στη τράπουλα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Η πιθανότητα να τραβήξουμε τέσσερις άσσους στη σειρά από μια τράπουλα 52 φύλλων, χωρίς επανατοποθέτηση, μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

- Η πιθανότητα να τραβήξουμε τον πρώτο άσο είναι $\frac{4}{52}$.

- Αφού τραβήξουμε έναν άσσο, έχουν απομείνει μόνο 3 άσσοι και 51 φύλλα συνολικά. Επομένως, η πιθανότητα να τραβήξουμε έναν δεύτερο άσσο είναι $\frac{3}{51}$.
- Αφού τραβήξουμε δύο άσσους, έχουν απομείνει 2 άσσοι και 50 φύλλα συνολικά. Η πιθανότητα να τραβήξουμε έναν τρίτο άσσο είναι $\frac{2}{50}$.
- Αφού τραβήξουμε τρεις άσσους, έχει απομείνει μόνο 1 άσσο και 49 φύλλα συνολικά. Η πιθανότητα να τραβήξουμε έναν τέταρτο άσσο είναι $\frac{1}{49}$.

Επομένως, η πιθανότητα να τραβήξουμε τέσσερις άσσους στη σειρά είναι:

$$P(\text{τέσσερις άσσοι στη σειρά}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} = \frac{24}{6497400} = \frac{1}{270725} \approx 0.00000369$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Σε ένα κτήριο έχει εγκατασταθεί ένα σύστημα συναγερμού. Σύμφωνα με τις προδιαγραφές του κατασκευαστή, όταν παρουσιασθεί κατάσταση έκτακτης ανάγκης ο συναγερμός χτυπά με πιθανότητα 0,90, ενώ χτυπά και όταν δεν παρουσιάζεται κατάσταση έκτακτης ανάγκης με πιθανότητα 0,01. Επίσης, από παλιότερα δεδομένα έχει εκτιμηθεί ότι η πιθανότητα να παρουσιασθεί στο κτήριο κατάσταση έκτακτης ανάγκης είναι 0,002. Αν ο συναγερμός μόλις χτύπησε, ποια είναι η πιθανότητα να έχει πράγματι παρουσιασθεί κατάσταση έκτακτης ανάγκης;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Έστω τα παρακάτω τα ενδεχόμενα:

A: Ο συναγερμός χτυπάει

B: Στο κτήριο έχει παρουσιασθεί κατάσταση έκτακτης ανάγκης.

Δίνεται ότι $P(B) = 0.002$, δηλαδή, είναι γνωστή η εκ των προτέρων πιθανότητα $P(B)$ να παρουσιασθεί κατάσταση έκτακτης ανάγκης και ζητείται να υπολογίσουμε την εκ των υστέρων πιθανότητα $P(B|A)$, δηλαδή την πιθανότητα να έχει παρουσιασθεί κατάσταση έκτακτης ανάγκης δοθέντος ότι χτύπησε ο συναγερμός στο κτήριο. Επίσης έχουμε ότι $P(A|B) = 0.90$ και $P(A|B') = 0.01$.

Από το θεώρημα του Bayes έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(B | A) &= \frac{P(A | B)P(B)}{\sum_{i=1}^n P(A | B)P(B)} = \frac{P(A | B)P(B)}{P(A|B)\Pi(B) + \Pi(A|B')P(B')} \\ &= \frac{0,90 \cdot 0.002}{0,90 \cdot 0.002 + 0.1 \cdot 0.998} \end{aligned}$$

Δηλαδή, η πιθανότητα να χτύπησε ο συναγερμός επειδή υπάρχει κατάσταση έκτακτης ανάγκης, είναι 15.28%.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Στο πλαίσιο του ποιοτικού ελέγχου σε ένα εργοστάσιο, κάθε εξάρτημα που παράγει το εργοστάσιο ελέγχεται. Ένα εξάρτημα αποστέλλεται σε ένα κατάστημα λιανικής μόνο εάν περάσει από έλεγχο. Η πιθανότητα ένα εξάρτημα να είναι ελαττωματικό είναι 0,02. Η πιθανότητα ένα εξάρτημα ενώ είναι ελαττωματικό να περάσει από τον έλεγχο είναι 0,05. Ποια είναι η πιθανότητα ένα εξάρτημα να είναι ελαττωματικό και να αποσταλεί σε κατάστημα λιανικής;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Έστω D το γεγονός ένα εξάρτημα να είναι ελαττωματικό και έστω B το γεγονός ότι το εξάρτημα περνάει τον έλεγχο. Γνωρίζουμε ότι $P(D) = 0.2$ και $P(B|D) = 0.05$. Επίσης $B \cap D$ είναι το γεγονός ένα εξάρτημα να είναι ελαττωματικό και να περάσει από τον έλεγχο. Τότε θα έχουμε

$$P(B \cap D) = P(B|D)P(D) = 0.05 \cdot 0.02 = 0.001.$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Μια εταιρεία διαχειρίζεται τρία διαφορετικά αμοιβαία κεφάλαια. Έστω A_i το γεγονός στο οποίο αυξάνεται το $i, i = 1, 2, 3$ αμοιβαίο κεφάλαιο σε αξία σε μια δεδομένη ημέρα. Οι πιθανότητες διαφόρων γεγονότων που σχετίζονται στα αμοιβαία κεφάλαια δίνονται ως εξής:

$$P(A_1) = 0.55, P(A_2) = 0.5, P(A_3) = 0.45, P(A_1 \cup A_2) = 0.82 \\ P(A_1 \cup A_3) = 0.7525, P(A_2 \cup A_3) = 0.78, P(A_2 \cap A_3 | A_1) = 0.2$$

- α) Είναι τα γεγονότα A_1, A_2, A_3 ανά ζεύγη ανεξάρτητα;
- β) Είναι ανεξάρτητα τα γεγονότα A_1, A_2 και A_3 ;
- γ) Ποια είναι η πιθανότητα τα αμοιβαία κεφάλαια 1 και 2 να αυξήσουν και τα δύο την αξία τους, δεδομένου ότι στο αμοιβαίο κεφάλαιο 3 αυξάνεται η αξία του; Είναι αυτή η πιθανότητα διαφορετική από την μη δεσμευμένη πιθανότητα ότι τα κεφάλαια 1 και 2 αυξάνονται σε αξία;
- δ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι τουλάχιστον ένα αμοιβαίο κεφάλαιο θα αυξηθεί σε αξία μια δεδομένη ημέρα;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) Είναι

$$P(A'_1 \cap A'_2) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = 1 - 0.82 = 0.18$$

και $P(A'_1)P(A'_2) = 0.45 \times 0.4 = 0.18$

$$P(A'_1 \cap A'_3) = 1 - P(A_1 \cup A_3) = 1 - 0.7525 = 0.2475$$

και $P(A'_1)P(A'_3) = 0.45 \times 0.55 = 0.2475$

$$P(A'_2 \cap A'_3) = 1 - P(A_2 \cup A_3) = 1 - 0.78 = 0.22$$

και $P(A'_2)P(A'_3) = 0.4 \times 0.55 = 0.22$

Επομένως θα ισχύει ότι τα ενδεχόμενα A'_1 , A'_2 , A'_3 είναι ανεξάρτητα ανά δύο μεταξύ τους καθώς και ότι (βλέπε διαφάνειες *Lecture_1* σελ. 51) τα ενδεχόμενα A_1 , A_2 , A_3 είναι ανεξάρτητα ανά δύο μεταξύ τους το οποίο είναι το ζητούμενο.

β) Είναι

$$P(A_2 \cap A_3 | A_1) = 0.2$$

και

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cup A_3) = 0.6 + 0.45 - 0.78 = 0.27$$

Επομένως

$$P(A_2 \cap A_3 | A_1) \neq P(A_2 \cap A_3)$$

δηλαδή οι δεσμευμένες και μη δεσμευμένες πιθανότητες είναι διαφορετικές άρα τα ενδεχόμενα δεν είναι ανεξάρτητα.

γ) Η πιθανότητα τα αμοιβαία κεφάλαια 1 και 2 να αυξήσουν και τα δύο την αξία τους, δεδομένου ότι στο αμοιβαίο κεφάλαιο 3 αυξάνεται η αξία του υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 | A_3) &= \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{P(A_2 \cap A_3 | A_1)P(A_1)}{P(A_3)} \\ &= \frac{0.2 \times 0.55}{0.45} = 0.244 \end{aligned}$$

Η μη δεσμευμένη πιθανότητα ότι τα κεφάλαια 1 και 2 αυξάνονται σε αξία είναι $P(A_1 \cap A_2) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = 1 - 0.82 = 0.18$. Είναι

$$P(A_1 \cap A_2 | A_3) \neq P(A_1 \cap A_2).$$

δ) Είναι

$$\begin{aligned}P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) \\&\quad - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\&= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - [P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)] \\&\quad - [P(A_1) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_3)] - [P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3)] \\&\quad + P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\&= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) + P(A_1 \cup A_2) + P(A_2 \cup A_3) - P(A_1 \cup A_3) \\&\quad - P(A_1) - P(A_2) - P(A_3) \\&= 0.11 + 0.82 + 0.78 + 0.7525 - 0.55 - 0.6 - 0.45 = 0.8625\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Η ZAP Electric Co. κατασκευάζει διακόπτες ηλεκτρικού κυκλώματος. Οι διακόπτες κυκλώματος παράγονται σε δύο διαφορετικές γραμμές συναρμολόγησης στο εργοστάσιο της εταιρείας. Η γραμμή συναρμολόγησης I είναι εξαιρετικά αυτοματοποιημένη και παράγει το 85% της παραγωγής του εργοστασίου. Η γραμμή συναρμολόγησης II χρησιμοποιεί παλαιότερη τεχνολογία και παράγει το 15% της παραγωγής του εργοστασίου. Η πιθανότητα ότι ένας διακόπτης που κατασκευάζεται στη γραμμή συναρμολόγησης I είναι ελαττωματικός είναι ίση με 0.04 ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα για τη γραμμή συναρμολόγησης II είναι 0.01. Επίσης η εταιρεία χρησιμοποιεί μια συσκευή ελέγχου για τον προσδιορισμό του εάν ένας διακόπτης είναι ελαττωματικός. Ξέρουμε ότι

$$P(A|B) = P(A'|B') = 0.985,$$

όπου A είναι το γεγονός που η συσκευή ελέγχου υποδεικνύει ότι ένας διακόπτης είναι ελαττωματικός και B είναι το γεγονός που ο διακόπτης είναι πραγματικά ελαττωματικός.

- 1) Εάν ένας διακόπτης κυκλώματος επιλέγεται τυχαία από έναν κάδο που περιέχει την παραγωγή μιας ημέρας και ο διακόπτης είναι πραγματικά ελαττωματικός, ποια είναι η πιθανότητα ότι κατασκευάστηκε στη γραμμή συναρμολόγησης II;
- 2) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η συσκευή ελέγχου υποδεικνύει ότι ένας διακόπτης κυκλώματος δεν είναι ελαττωματικός, δεδομένου ότι ο διακόπτης κυκλώματος είναι πραγματικά ελαττωματικός;
- 3) Εάν η συσκευή ελέγχου εφαρμόζεται σε διακόπτες κυκλώματος που παράγονται στη γραμμή συναρμολόγησης I, ποια είναι η πιθανότητα ότι ένας

διακόπτης κυκλώματος είναι πραγματικά ελαττωματικός, δεδομένου ότι η συσκευή ελέγχου υποδεικνύει ότι ο διακόπτης είναι ελαττωματικός; Θα λέγατε ότι αυτή είναι μια καλή συσκευή ελέγχου;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Από τα δεδομένα του προβλήματος είναι

$$P(B|I) = 0.04, P(B|II) = 0.01$$

και

$$P(II) = 1 - P(I) = 1 - 0.85 = 0.15.$$

1) Η πιθανότητα ότι κατασκευάστηκε στη γραμμή συναρμολόγησης II με βάση τον κανόνα του Bayes, είναι

$$\begin{aligned} P(II|B) &= \frac{P(B|II)P(II)}{P(B|II)P(II) + P(B|I)P(I)} \\ &= \frac{0.01 \times 0.15}{0.01 \times 0.15 + 0.04 \times 0.85} \\ &= 0.4225. \end{aligned}$$

2) Η πιθανότητα ότι η συσκευή ελέγχου υποδεικνύει ότι ένας διακόπτης κυκλώματος δεν είναι ελαττωματικός, δεδομένου ότι ο διακόπτης κυκλώματος είναι πραγματικά ελαττωματικός είναι

$$P(A'|B) = 1 - P(A|B) = 1 - 0.985$$

3) Η πιθανότητα ότι ένας διακόπτης είναι πράγματι ελαττωματικός, δεδομένου ότι η συσκευή ελέγχου υποδεικνύει ότι ο διακόπτης είναι ελαττωματικός με βάση τον κανόνα του Bayes, είναι

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')} \\ &= \frac{0.985 \times 0.04}{0.985 \times 0.04 + 0.015 \times 0.96} \\ &= 0.73234. \end{aligned}$$

Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα συμπεραίνουμε ότι η συσκευή ελέγχου δεν είναι τόσο ακριβής.