Φυλλάδιο Ασκήσεων 7

Άσκηση 1

Υποθέτουμε ότι η X είναι μία διωνυμική τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση μάζας πιθανότητας:

$$f(x) = P(X=k) = P_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad , k=0,1,2,\dots,n$$

α) Βρείτε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_X(t)$.
β) Βρείτε τη διακύμανση της X.

Λύση

α) Εξ' ορισμού, η ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_X(t)$ μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί την διωνυμική κατανομή μπορεί να βρεθεί ως εξής:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} \quad (1)$$

Για να υπολογίσουμε το παραπάνω άθροισμα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το διωνυμικό ανάπτυγμα το οποίο δίνεται από:

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$$

Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα για $x = pe^t$ και $y = 1-p$ στη σχέση (1), καταλήγουμε να πάρουμε μία έκφραση κλειστής μορφής για τη ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_X(t)$. Άρα, αφού το άθροισμα $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pe^t)^k(1-p)^{n-k}$ που υπάρχει στη σχέση (1) μπορεί να γραφεί, μέσω του διωνυμικού αναπτύγματος, ως εξής:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(pe^{t}\right)^{k}(1-p)^{n-k}=\left(pe^{t}+1-p\right)^{n}$$ ώστε

η ροπογεννήτρια συνάρτηση εκφράζεται ως:

$$\mathcal{M}_X(t)=\left(pe^{t}+1-p\right)^{n}$$

β) Για να βρούμε τη διακύμανση της X πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης, οι οποίες υπολογίζονται παίρνοντας τις δύο πρώτες παραγώγους της ροπογεννήτριας συνάρτησης $\mathcal{M}_X(t)$ για $t=0$.
Επομένως, η ροπή 1ης τάξης $E(X)$ υπολογίζεται ως εξής:

Βήμα 1: Αρχικά, παίρνουμε την 1η παράγωγο της $M_X(t)$.
$$\mathcal{M}_X^{(1)}(t)=\mathcal{M}_X'(t)=n\cdot\left(pe^{t}+1-p\right)^{n-1}\cdot pe^{t}$$

Βήμα 2: Στη συνέχεια, θέτουμε $t=0$ ώστε να πάρουμε την ροπή 1ης τάξης, δηλαδή την αναμενόμενη (ή μέση) αξία της τυχαίας μεταβλητής X.
Άρα,

$$E(X)=\mathcal{M}_X^{(1)}(0)=n\cdot p$$

Αντίστοιχα, ακολουθούμε τα δύο παραπάνω βήματα για να βρούμε την ροπή 2ης τάξης $E(X^2)$ που δίνεται από την 2η παράγωγο της $M_X(t)$ για $t=0$. Άρα,

$$\mathcal{M}_X^{(2)}(t)=\mathcal{M}_X''(t)=n\cdot(n-1)\left(pe^{t}+1-p\right)^{n-2}\cdot pe^{t}\cdot pe^{t}+n\left(pe^{t}+1-p\right)^{n-1}\cdot pe^{t}$$
κι θέτοντας $\boxed{t=0}$, έχουμε:
$$E(X^2)=\mathcal{M}_X^{(2)}(0)=n(n-1)\cdot 1p\cdot p+n\cdot 1\cdot p=n(n-1)p^2+np$$

Άρα, η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 =$$
$$= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 =$$
$$= np - np^2 = np(1-p)$$

Άσκηση 2

Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει μία γεωμετρική συνάρτηση μάζας πιθανότητας:

$$p_X(k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \quad , k = 1, 2, 3, \dots$$

α) Βρείτε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της X.
β) Βρείτε την αναμενόμενη τιμή της X.

Λύση

α) Αφού η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, η ροπογεννήτρια συνάρτησή της $M_X(t)$ δίνεται από:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} \cdot p_X(k) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} (1-p)^{k-1} \cdot p =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} \frac{(1-p)^k}{1-p} \cdot p = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} (1-p)^k =$$
$$= \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} [(1-p)e^t]^k \quad (1)$$

Το άθροισμα, στην σχέση (1), είναι πεπερασμένο δηλαδή η σειρά συγκλίνει μόνο αν $(1-p)e^t < 1$ ή ισοδύναμα

$$e^t < \frac{1}{1-p} \Rightarrow \ln e^t < \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) \Rightarrow t < \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)$$

<u>Υπενθύμιση!!</u> $\sum_{k=0}^{\infty} \delta^k = \frac{1}{1-\delta}$, αν $|\delta| < 1$, όπου $\delta = [(1-p)e^t]$ στην συγκεκριμένη άσκηση

Άρα, η σχέση ① μπορεί να γραφτεί ως:

$$M_x(t) = \frac{p}{1-p}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left[(1-p)e^t\right]^k - \left[(1-p)e^t\right]^0\right] =$$

$$= \frac{p}{1-p}\left[\frac{1}{1-[(1-p)e^t]} - 1\right] = \frac{p}{1-p}\left[\frac{(1-p)e^t}{1-[(1-p)e^t]}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_x(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} = pe^t\left[1-(1-p)e^t\right]^{-1}$$

β) Για να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή της X, παίρνουμε την πρώτη παράγωγο της ροπογεννήτριας συνάρτησης $M_x(t)$, που εξήχθη από το υποερώτημα (α), για $t=0$.

$$E(X) = M_x^{(1)}(t)\Big|_{t=0} =$$

$$= pe^t\left[1-(1-p)e^t\right]^{-1} + (-1)\cdot\left[1-(1-p)e^t\right]^{-2}\left[-(1-p)e^t\right]\cdot pe^t\Big|_{t=0} =$$

$$= pe^t\left[1-(1-p)e^t\right]^{-1} + \left[1-(1-p)e^t\right]^{-2}\left[(1-p)e^t\right]\cdot pe^t\Big|_{t=0} =$$

$$= p\cdot e^0\left[1-(1-p)e^0\right]^{-1} + \left[1-(1-p)e^0\right]^{-2}\left[(1-p)e^0\right]\cdot pe^0 =$$

$$= p\cdot\frac{1}{p} + p^{-2}\cdot(1-p)\cdot p = 1 + \frac{1}{p^2}\cdot(1-p)p =$$

$$= 1 + \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p}$$

Φυλλάδιο Ασκήσεων 8

Άσκηση 1

Θεώρημα: Έστω X και Y τυχαίες μεταβλητές με από κοινού (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής $F_{X,Y}$. Υποθέτουμε ότι $\alpha \leq b$ και $c \leq d$, $\alpha, b, c, d \in \mathbb{R}$. Τότε, να δείξετε ότι:

$$P(\alpha < X \leq b, c < Y \leq d) = F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(\alpha,d) - F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(a,c)$$

Απόδειξη

Αρχικά, σύμφωνα με τη θεωρία ξέρουμε ότι η από κοινού συνάρτηση κατανομής δύο τυχαίων μεταβλητών X, Y είναι:
$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα $P(\alpha < X \leq b, c < Y \leq d)$ μπορεί να γραφτεί ως:

① $P(\alpha < X \leq b, c < Y \leq d) = P(X \leq b, Y \leq d) - P(X \leq b, Y \leq d$, και είτε $X \leq \alpha$ ή $Y \leq c)$

Από τον προσθετικό νόμο για δύο μεταβλητές περιπτώσεις έχουμε:

② $P(X \leq b, Y \leq d$, και είτε $X \leq \alpha$ ή $Y \leq c) = P(X \leq b, Y \leq c) + P(X \leq \alpha, Y \leq d) - P(X \leq \alpha, Y \leq c)$

Συνδυάζοντας τις ① και ②, παίρνουμε:

$$P(\alpha < X \leq b, c < Y \leq d) = P(X \leq b, Y \leq d) - P(X \leq \alpha, Y \leq d) - P(X \leq b, Y \leq c) + P(X \leq \alpha, Y \leq c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\alpha < X \leq b, c < Y \leq d) = F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(\alpha,d) - F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(a,c)$$

Άσκηση 2

Έστω η διακριτή δισδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X,Y) με σύνολο δυνατών τιμών $S=\{1,2\}\times\{1,2,3\}$ και από κοινού συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας:

$$p(x,y) = f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{45}(x+3y) \; , \; (x,y)\in S$$

α) Δείξτε ότι η $p(x,y)$ είναι καλώς ορισμένη από κοινού συνάρτηση πιθανότητας.

β) Βρείτε τις οριακές (ή περιθωριακές, ισοδύναμα) συναρτήσεις μάζας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y.

Λύση

α) Γενικά, μία συνάρτηση για να είναι καλώς ορισμένη από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

i) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \; , \; \forall (x,y)\in S$

ii) $\sum_x \sum_y f_{X,Y}(x,y) = 1$

Επομένως, στην συγκεκριμένη άσκηση, η συνάρτηση $p(x,y)=f_{X,Y}(x,y)$ για να είναι καλώς ορισμένη από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας πρέπει να ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες.

Άρα,

i) $p(x,y) = f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{45}(x+3y)$ πρέπει να είναι μεγαλύτερη από 0, δηλαδή $f_{X,Y}(x,y)\geq 0$, για κάθε δυνατό συνδυασμό των x και y. Παρατηρούμε ότι οι δυνατές τιμές που παίρνει η τυχαία μεταβλητή X είναι $\{1,2\}$ και η Y είναι $\{1,2,3\}$. Οι δυνατές τιμές, επομένως, της δισδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y) είναι αυστηρά θετικές άρα $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{45}(x+3y) > 0$ για $\forall (x,y)\in S$

ii) $\sum_{x=1}^{2}\sum_{y=1}^{3} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{x=1}^{2}\sum_{y=1}^{3} \frac{1}{45}(x+3y) = \frac{1}{45}\sum_{x=1}^{2}\sum_{y=1}^{3}(x+3y) =$

$= \frac{1}{45}\sum_{x=1}^{2}\left[x+3+x+6+x+9\right] = \frac{1}{45}\sum_{x=1}^{2}(3x+18) =$

$= \frac{1}{45}\left[3+18+6+18\right] = \frac{45}{45} = 1$

Επομένως, παρατηρούμε ότι η $p(x,y) = f_{X,Y}(x,y)$ ικανοποιεί και τις δύο συνθήκες, δηλαδή είναι καλώς ορισμένη από κοινού συνάρτηση πιθανότητας.

β) Αρχικά, βρίσκουμε την οριακή (περιθωριακή) συνάρτηση μάζας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X.

$f_X(x) = \sum_{y=1}^{3} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{y=1}^{3}\frac{1}{45}(x+3y) = \frac{1}{45}\sum_{y=1}^{3}(x+3y) =$

$= \frac{1}{45}\left[x+3+x+6+x+9\right] = \frac{1}{45}\left[3x+18\right] = \frac{x+6}{15} =$

$= \begin{cases} \frac{7}{15}, & x=1 \\ \frac{8}{15}, & x=2 \end{cases}$

Έπειτα, βρίσκουμε την οριακή συνάρτηση μάζας πιθανότητας της Y

$f_Y(y) = \sum_{x=1}^{2} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{x=1}^{2}\frac{1}{45}(x+3y) = \frac{1}{45}\sum_{x=1}^{2}(x+3y) =$

$= \frac{1}{45}\left[1+3y+2+3y\right] = \frac{3+6y}{45} = \frac{2y+1}{15} =$

$= \begin{cases} \frac{3}{15}, & y=1 \\ \frac{5}{15}, & y=2 \\ \frac{7}{15}, & y=3 \end{cases}$

Μπορούμε να συνοψίσουμε τις παραπάνω πιθανότητες στον ακόλουθο πίνακα:

	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$	$f_X(x)$
$X=1$	$\frac{4}{45}$	$\frac{7}{45}$	$\frac{10}{45}$	$\frac{21}{45} = \frac{7}{15}$
$X=2$	$\frac{5}{45}$	$8/45$	$11/45$	$\frac{24}{45} = \frac{8}{15}$
$f_Y(y)$	$\frac{9}{45} = \frac{3}{15}$	$\frac{15}{45} = \frac{5}{15}$	$\frac{21}{45} = 7/15$	1

Παρατηρούμε ότι η οριακή συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x)$ της τυχαίας μεταβλητής X μπορεί να ληφθεί αν υπολογίσουμε τα αθροίσματα ανά γραμμή του πίνακα, ενώ η οριακή συνάρτηση πιθανότητας $f_Y(y)$ της τυχαίας μεταβλητής Y μπορεί να ληφθεί αν υπολογίσουμε τα αθροίσματα ανά στήλη του πίνακα.

Άσκηση 3

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της δισδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y) δίνεται από τον τύπο:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & , x,y \in (0,+\infty) \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

α) $P(X>1, Y<1)$

β) $P(X<Y)$

γ) $P(X<\alpha)$

Λύση

α) $$P(X>1, Y<1) = P(X>1 \cap Y<1) = \int_0^1 \int_1^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \int_1^{+\infty} 2e^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy = 2\int_0^1 e^{-2y} \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx\,dy =$$

$$= 2\cdot \int_0^1 e^{-2y} \left[e^{-x}\right]_1^{+\infty} dy = 2\int_0^1 e^{-2y}\left[0+e^{-1}\right]dy =$$

$$= 2\cdot \int_0^1 e^{-2y}\cdot \frac{1}{e}\,dy = \frac{2}{e}\int_0^1 e^{-2y}dy = \frac{2}{e}\left[-\frac{1}{2}e^{-2y}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{e}\left[-\frac{1}{2}e^{-2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{2}{e}\left[-\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{e^3} + \frac{1}{e} = e^{-1} - e^{-3} = e^{-1}\left(1-e^{-2}\right)$$

β) $P(X<Y) = \iint_{\{(x,y):\, x<y\}} f(x,y)\, dx\, dy =$

$= \int_0^{+\infty}\int_0^{y} 2e^{-x}e^{-2y}\, dx\, dy = 2\int_0^{+\infty} e^{-2y}\int_0^{y} e^{-x}\, dx\, dy =$

$= 2\int_0^{+\infty} e^{-2y}\left[-e^{-x}\right]_0^{y} dy = 2\int_0^{+\infty} e^{-2y}\left(-e^{-y}+1\right) dy =$

$= 2\int_0^{+\infty}\left(e^{-2y}-e^{-3y}\right) dy = 2\int_0^{+\infty} e^{-2y} dy - 2\int_0^{+\infty} e^{-3y} dy =$

$= 2\left[-\frac{1}{2}e^{-2y}\right]_0^{+\infty} - 2\left[-\frac{1}{3}e^{-3y}\right]_0^{+\infty} =$

$= 2\left(0+\frac{1}{2}\right) - 2\left(0+\frac{1}{3}\right) = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

γ) $P(X<a) = \int_0^{\alpha}\int_0^{+\infty} f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^{\alpha}\int_0^{+\infty} 2e^{-2y}e^{-x}\, dy\, dx =$

$= 2\int_0^{\alpha} e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-2y} dy\, dx = 2\int_0^{\alpha} e^{-x}\left[-\frac{1}{2}e^{-2y}\right]_0^{+\infty} dx =$

$= 2\int_0^{\alpha} e^{-x}\left(0+\frac{1}{2}\right) dx = \int_0^{\alpha} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{\alpha} = -e^{-\alpha}+1 =$

$= 1-e^{-\alpha}$

Ισοδύναμα, μπορούμε να υπολογίσαμε την $P(X<a)$ χρησιμοποιώντας την οριακή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X, αφού πρώτα την εξάγουμε. Άρα,

$f_X(x) = \int_0^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy = \int_0^{+\infty} 2e^{-x}e^{-2y} dy = 2e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-2y} dy =$

$= 2e^{-x}\left[-\frac{1}{2}e^{-2y}\right]_0^{+\infty} = 2e^{-x}\left(0+\frac{1}{2}\right) = e^{-x}$

άρα

$P(X<\alpha) = \int_0^{\alpha} f_X(x)\, dx = \int_0^{\alpha} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{\alpha} = 1-e^{-\alpha}$

Άσκηση 4

Έστω X και Y διακριτές τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{32} & , \text{για } x=1,2 \ , y=1,2,3,4 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

Ποια είναι η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της Y δεδομένου ότι $X=x$;

Λύση

Η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της Y δεδομένου ότι $X=x$ δίνεται από τη θεωρία ως εξής:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

Επομένως, για να βρούμε την $f_{Y|X}$ πρέπει να βρούμε πρώτα την οριακή συνάρτηση μάζας πιθανότητας της X.

Άρα, $$f_X(x) = \sum_{y=1}^{4} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{y=1}^{4} \frac{x+y}{32} = \frac{1}{32} \sum_{y=1}^{4} (x+y) =$$

$$= \frac{1}{32}\left[x+1+x+2+x+3+x+4\right] = \frac{1}{32}(4x+10) \ , x=1,2$$

Άρα, $$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{32}(x+y)}{\frac{1}{32}(4x+10)} = \frac{x+y}{4x+10}$$

Άρα

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{x+y}{4x+10} & , \text{για } x=1,2 \text{ και } y=1,2,3,4 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

Άσκηση 5

Έστω X και Y διακριτές τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{36}, & \text{για } 1 \le x = y \le 6 \\ \frac{2}{36}, & \text{για } 1 \le x < y \le 6 \end{cases}$$

Είναι η X και η Y στοχαστικά ανεξάρτητες;

Λύση

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι για να είναι οι δυο τυχαίες μεταβλητές X, Y στοχαστικά ανεξάρτητες πρέπει να ισχύει:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

ή, ισοδύναμα,

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$$

Στη συγκεκριμένη άσκηση, για να ελέγξουμε αν η X και η Y είναι στοχαστικά ανεξάρτητες θα χρησιμοποιήσουμε τη πρώτη σχέση, δηλαδή την $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$. Επομένως, αρχικά πρέπει να βρούμε τις οριακές συναρτήσεις μάζας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X και της Y.

Άρα,

$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y) = \sum_{y=x} f_{X,Y}(x,y) + \sum_{y>x} f_{X,Y}(x,y) + \sum_{y<x} f_{X,Y}(x,y) =$$

$$= f(x,x) + \sum_{y>x} f_{X,Y}(x,y) + 0 =$$

$$= \frac{1}{36} + \sum_{y>x} \frac{2}{36} \overset{(*)}{=} \frac{1}{36} + (6-x) \cdot \frac{2}{36} =$$

$$= \frac{13-2x}{36}, \text{ για } x = 1,2,3,4,5,6$$

(*) όπου $\sum_{y>x} \frac{2}{36} = (6-x) \cdot \frac{2}{36}$ προκύπτει από το εύρος των τιμών που μπορεί να πάρει η Y. Η Y μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες από X και μικρότερες ή ίσες από 6, στην περίπτωση όπου $y>x$, όπως φαίνεται και από το δεύτερο κλάδο της δικλαδης από κοινού συνάρτησης πιθανότητας που δίνεται στην εκφώνηση.

$$f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y) = \sum_{x=y} f_{X,Y}(x,y) + \sum_{x<y} f_{X,Y}(x,y) + \sum_{x>y} f_{X,Y}(x,y)$$

$$= f(y,y) + \sum_{x<y} f_{X,Y}(x,y) + 0 \overset{*}{=}$$

$$= \frac{1}{36} + (y-1)\frac{2}{36} = \frac{2y-1}{36} \quad , \text{για } y=1,2,3,4,5,6$$

(*) όπου $\sum_{x<y} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{x<y} \frac{2}{36} = (y-1)\cdot\frac{2}{36}$ προκύπτει

από το εύρος των τιμών που μπορεί να πάρει η X (αφού αθροίζουμε ως προς x για να βρούμε την οριακή συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής Y). Η X μπορεί να πάρει τιμές μικρότερες από y και μεγαλύτερες ή ίσες με την μονάδα, στη περίπτωση όπου $y>x$, όπως φαίνεται άλλωστε από το δεύτερο κλάδο της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας.

Αφού έχουμε εξάγει τις οριακές συναρτήσεις μάζας πιθανότητας της X και της Y, για να δείξουμε ότι η X και η Y είναι στοχαστικά ανεξάρτητες πρέπει για κάθε δυνατό συνδυασμό x,y να ισχύει $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad , \forall x,y$.

Ισοδύναμα, αν βρούμε ένα συνδυασμό x,y για τον οποίο δεν ισχύει η παραπάνω σχέση, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y δεν είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

Επομένως, ελέγχουμε αν ισχύει η παραπάνω σχέση για $x=1$ και $y=1$. Άρα, έχουμε ότι:

$$\left.\begin{array}{l} f_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{36} \\ \left.\begin{array}{l} f_X(1) = \frac{11}{36} \\ f_Y(1) = \frac{1}{36} \end{array}\right\} f_X(1)\cdot f_Y(1) = \frac{11}{36}\cdot\frac{1}{36} = \frac{11}{36^2} \end{array}\right\} \underline{\text{άρα}}\ f_{X,Y}(1,1) \neq f_X(1)\cdot f_Y(1)$$

Επομένως, παρατηρούμε ότι για $x=1$ και $y=1$, η παραπάνω σχέση δεν ικανοποιείται, δηλαδή $f_{X,Y}(1,1) \neq f_X(1) f_Y(1)$. Συνεπώς, μπορούμε να πούμε ότι η X και η Y <u>δεν</u> είναι ανεξάρτητες.

<u>Παρατήρηση!</u>

Όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία, αν γνωρίζουμε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $f_{X,Y}(x,y)$ δύο τυχαίων μεταβλητών X,Y τότε μπορούμε να βρούμε τις οριακές συναρτήσεις πιθανότητας των X, Y.

Αντίθετα, αν ξέρουμε τις οριακές συναρτήσεις πιθανότητας των X και Y, τότε δεν μπορούμε να βρούμε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητάς τους, <u>εκτός εάν</u> η X και η Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Φυλλάδιο Ασκήσεων 9

Άσκηση 1

Ένα σούπερμάρκετ έχει 2 ειδικές γραμμές.
Έστω X και Y συμβολίζουν τον αριθμό των πελατών στην 1η και τη 2η γραμμή αντίστοιχα σε κάθε δεδομένο χρόνο. Κατά τη διάρκεια εκτός των ωρών αιχμής η από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας της X, Y συνοψίζεται από τον ακόλουθο πίνακα:

Y \ X	0	1	2	3
0	0.1	0.2	0	0
1	0.2	0.25	0.05	0
2	0	0.05	0.05	0.025
3	0	0	0.025	0.05

Βρείτε την $P(|X-Y|=1)$, δηλαδή την πιθανότητα η X και η Y να διαφέρουν κατά 1 ακριβώς (δηλαδή ο αριθμός των πελατών στις 2 γραμμές να διαφέρει κατά 1 ακριβώς).

Λύση

$$P(|X-Y|=1) = \sum_{|x-y|=1}\sum p_{X,Y}(x,y) = p_{X,Y}(0,1) + p_{X,Y}(1,0) +$$

$$+ p_{X,Y}(1,2) + p_{X,Y}(2,1) + p_{X,Y}(2,3) + p_{X,Y}(3,2) =$$

$$= 0.2 + 0.2 + 0.05 + 0.05 + 0.025 + 0.025 = 0.55$$

Άσκηση 2

Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας μίας διακριτής δισδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y) δίνεται από τον τύπο:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{15}(x+y) \quad , \text{για } x=0,1,2 \text{ και } y=1,2$$

α) Να υπολογιστούν οι δεσμευμένες συναρτήσεις πιθανότητας $f_{X|Y}(x|1)$, $f_{Y|X}(y|1)$.

β) Να υπολογιστούν οι δεσμευμένες συναρτήσεις κατανομής $F_{X|Y}(x|1)$, $F_{Y|X}(y|1)$.

γ) Να υπολογιστούν οι δεσμευμένες μέσες τιμές $E(X|Y=1)$, $E(Y|X=1)$.

δ) Να υπολογιστούν οι δεσμευμένες ροπές δεύτερης τάξης $E(X^2|Y=1)$, $E(Y^2|X=1)$.

ε) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη διασπορά $Var(X|Y=1)$.

Λύση

Το σύνολο τιμών της διακριτής δισδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y) είναι:

$$R_{X,Y} = \{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

αφού το σύνολο τιμών της X είναι: $R_X = \{0,1,2\}$ και της Y είναι $R_Y = \{1,2\}$.

Αρχικά, βρίσκουμε τις οριακές συναρτήσεις μάζας πιθανότητας της X και Y.

$$f_X(x) = \sum_{y \in R_Y} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{y=1}^{2} \frac{1}{15}(x+y) = \frac{1}{15}\sum_{y=1}^{2}(x+y) =$$

$$= \frac{1}{15}\left[x+1+x+2\right] = \frac{2x+3}{15}, \quad x=0,1,2$$

άρα $f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{15}, & x=0 \\ \frac{5}{15}, & x=1 \\ \frac{7}{15}, & x=2 \end{cases}$

$$f_Y(y) = \sum_{x \in R_X} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{x=0}^{2} \frac{1}{15}(x+y) = \frac{1}{15}\sum_{x=0}^{2}(x+y) =$$

$$= \frac{1}{15}\left[y+1+y+2+y\right] = \frac{3y+3}{15}, \quad y=1,2$$

άρα $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{6}{15}, & y=1 \\ \frac{9}{15}, & y=2 \end{cases}$

α) Από τη θεωρία, γνωρίζουμε ότι η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής X δεδομένου ότι η Y=y δίνεται ως εξής:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Επομένως, η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X δεδομένου ότι Y=1, είναι η εξής:

$$f_{X|Y}(x|1) = \frac{f_{X,Y}(x,1)}{f_Y(1)} = \frac{\frac{1}{15}(x+1)}{\frac{6}{15}} = \frac{x+1}{6}, \quad x=0,1,2$$

Όμοια,

$$f_{Y|X}(y|1) = \frac{f_{X,Y}(1,y)}{f_X(1)} = \frac{\frac{1}{15}(1+y)}{\frac{5}{15}} = \frac{y+1}{5}, \quad y=1,2$$

β) Η δεσμευμένη (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X δεδομένου ότι Y=y δίνεται από:

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x \mid Y=y) = \sum_{x_i \leq x} P(X=x_i \mid Y=y) = \sum_{x_i \leq x} f_{X|Y}(x_i|y)$$

Επομένως, εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση που ξέρουμε από τη θεωρία μας για να βρούμε τη δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής της X δεδομένου ότι Y=1, έχουμε:

$$F_{X|Y}(x|1) = P(X \leq x \mid Y=1) = \sum_{x_i \leq x} P(X=x_i \mid Y=1) = \sum_{x_i \leq x} f_{X|Y}(x_i|1) =$$

$$= \begin{cases} 0, & x<0 \\ f_{X|Y}(0|1), & 0 \leq x < 1 \\ f_{X|Y}(0|1) + f_{X|Y}(1|1), & 1 \leq x < 2 \\ f_{X|Y}(0|1) + f_{X|Y}(1|1) + f_{X|Y}(2|1), & x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{6}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{6}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

Αντίστοιχα,

$$F_{Y|X}(y|1) = P(Y \le y | X=1) = \sum_{y_i \le y} P(Y=y_i | X=1) = \sum_{y_i \le y} f_{Y|X}(y_i|1) =$$

$$= \begin{cases} 0 & , y<1 \\ f_{Y|X}(1|1) & , 1 \le y < 2 \\ f_{Y|X}(1|1) + f_{Y|X}(2|1) & , y \ge 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , y<1 \\ \frac{2}{5} & , 1 \le y < 2 \\ 1 & , y \ge 2 \end{cases}$$

γ) Γενικά, η δεσμευμένη μέση τιμή δίνεται από:

$$E(X|Y=y) = \sum_{x \in R_X} x \cdot f_{X|Y}(x|y)$$

Άρα, έχουμε:

$$E(X|Y=1) = \sum_{x=0}^{2} x \cdot f_{X|Y}(x|1) = 0 \cdot f_{X|Y}(0|1) + 1 \cdot f_{X|Y}(1|1) + 2 \cdot f_{X|Y}(2|1)$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{2}{6} + 2 \cdot \frac{3}{6} = \frac{4}{3}$$

Όμοια,

$$E(Y|X=1) = \sum_{y \in R_Y} y \cdot f_{Y|X}(y|1) = \sum_{y=1}^{2} y \cdot f_{Y|X}(y|1) =$$

$$= 1 \cdot f_{Y|X}(1|1) + 2 \cdot f_{Y|X}(2|1) = 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

δ) Γενικά, η δεσμευμένη ροπή δεύτερης τάξης δίνεται από:

$$E(X^2|Y=y) = \sum_{x \in R_X} x^2 \cdot f_{X|Y}(x|y)$$

Επομένως, εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση έχουμε:

$$E(X^2|Y=1) = \sum_{x=0}^{2} x^2 \cdot f_{X|Y}(x|1) = 0^2 \cdot f_{X|Y}(0|1) + 1^2 \cdot f_{X|Y}(1|1) + 2^2 \cdot f_{X|Y}(2|1)$$

$$= 0 + 1 \cdot \frac{2}{6} + 4 \cdot \frac{3}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

Όμοια,

$$E(Y^2|X=1) = \sum_{y=1}^{2} y^2 \cdot f_{Y|X}(y|1) = 1^2 \cdot f_{Y|X}(1|1) + 2^2 \cdot f_{Y|X}(2|1) =$$

$$= 1^2 \cdot \frac{2}{5} + 2^2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{14}{5}$$

ε) Η δεσμευμένη διακύμανση, γενικά, μπορεί να υπολογιστεί ως ακολούθως:

$$Var(X|Y=y) = E(X^2|Y=y) - [E(X|Y=y)]^2$$

Επομένως, στην συγκεκριμένη άσκηση έχουμε:

$$Var(X|Y=1) = E(X^2|Y=1) - [E(X|Y=1)]^2 =$$

$$= \frac{7}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$