Ενότητα 2
Φυλλάδιο Ασκήσεων 3

Άσκηση 1
Ένα εργοστάσιο έχει 2 γραμμές παραγωγής $Γ_1$ και $Γ_2$. Στο τμήμα ποιοτικού ελέγχου όταν διαπιστώνεται ότι ένα προϊόν είναι ελαττωματικό κατατάσσεται σε μία από τις δύο κατηγορίες $Ε_1$ και $Ε_2$, ανάλογα με τη σοβαρότητα του ελαττώματος και καταγράφεται από ποια γραμμή παραγωγής προέρχεται. Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνεται πώς κατανέμονται 1440 ελαττωματικά προϊόντα στις δύο γραμμές παραγωγής $Γ_1$, $Γ_2$ και στις δύο κατηγορίες $Ε_1$, $Ε_2$.

	$Γ_1$	$Γ_2$	Σύνολο
$Ε_1$	500	300	800
$Ε_2$	400	240	640
Σύνολο	900	540	1440

Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα:
$Γ_1$: το προϊόν προέρχεται από τη γραμμή παραγωγής $Γ_1$
$Γ_2$: το προϊόν προέρχεται από τη γραμμή παραγωγής $Γ_2$
$Ε_1$: το προϊόν ανήκει στην κατηγορία $Ε_1$
$Ε_2$: το προϊόν ανήκει στην κατηγορία $Ε_2$

Τα ενδεχόμενα $Γ_2$ και $Ε_2$ είναι ανεξάρτητα ή εξαρτημένα;

Λύση

Με βάση το στατιστικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε τα εξής δεδομένα από τον πίνακα:

$$P(\Gamma_2) = \frac{540}{1440} = 0.375$$

$$P(E_2) = \frac{640}{1440} = 0.444$$

$$P(\Gamma_2 \cap E_2) = \frac{240}{1440} = 0.166$$

Τα ενδεχόμενα Γ_2 και E_2 θα είναι ανεξάρτητα αν και μόνο αν, ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$P(\Gamma_2 \cap E_2) = P(\Gamma_2) \cdot P(E_2).$$

Άρα, από τα παραπάνω δεδομένα έχουμε ότι:

$$P(\Gamma_2) \cdot P(E_2) = 0.375 \cdot 0.444 = 0.166 = P(\Gamma_2 \cap E_2)$$

άρα τα ενδεχόμενα Γ_2 και E_2 είναι ανεξάρτητα.
Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιούσαμε τις δεσμευμένες πιθανότητες και να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

$$P(\Gamma_2 | E_2) = \frac{P(\Gamma_2 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{\frac{240}{1440}}{\frac{640}{1440}} = \frac{240}{640} = 0.375 = P(\Gamma_2)$$

και

$$P(E_2 | \Gamma_2) = \frac{P(E_2 \cap \Gamma_2)}{P(\Gamma_2)} = \frac{\frac{240}{1440}}{\frac{540}{1440}} = \frac{240}{540} = 0.444 = P(E_2)$$

Δηλαδή, για να είναι ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα Γ_2 και E_2 πρέπει να ισχύει ότι: $P(\Gamma_2 | E_2) = P(\Gamma_2)$ και $P(E_2 | \Gamma_2) = P(E_2)$.
Με άλλα λόγια, η γνώση της πραγματοποίησης του ενός ενδεχομένου δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση του άλλου ενδεχομένου και επομένως, τα δύο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 2

Ο αριθμός των αυτοκινήτων που πουλάει μία έκθεση σε μία εβδομάδα είναι τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} cx & , x = 1,2,3,4,5 \\ c(10-x) & , x = 6,7,8,9 \end{cases}$$

α) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c.

β) Ποια είναι η πιθανότητα να πουληθούν σε μία εβδομάδα:

i) λιγότερα από 4 αυτοκίνητα;

ii) περισσότερα από 5 αυτοκίνητα γνωρίζοντας ότι έχουν πουληθεί τουλάχιστον 3;

Λύση

Η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή και $R_x = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ είναι το πεδίο τιμών της.

Η συνάρτηση $f(x) = P_X(x) = P(X=x)$ με πεδίο ορισμού τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η τυχαία μεταβλητή X και πεδίο τιμών τις πιθανότητες των τιμών αυτών ονομάζεται συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας της X.
Σύμφωνα με τη θεωρία, η συνάρτηση $f(x)$ για να είναι καλώς ορισμένη συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $0 \le P_x(x) \le 1$, για κάθε $x \in R_x$
2. $\sum_{x \in R_x} P_x(x) = 1$

Αντίστοιχα, αν συμβολίσουμε τη συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας με το $f(x)$, πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $f(x_i) \geq 0$, για κάθε $x_i \in R_x$
2. $\sum\limits_{x_i \in R_x} f(x_i) = 1$

α) Επομένως, πρέπει να βρούμε την τιμή της σταθεράς c για την οποία η συνάρτηση $f(x)$ ικανοποιεί τις παραπάνω δύο συνθήκες ώστε να είναι καλώς ορισμένη συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας.
Αρχικά, η συνάρτηση $f(x)$ ικανοποιεί την 1η συνθήκη όταν ισχύει $c \geq 0$.
Επιπλέον, η συνάρτηση $f(x)$ πρέπει να ικανοποιεί την 2η συνθήκη οπότε πρέπει να ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{9} f(x_i) = \sum_{i=1}^{9} P(X=x_i) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) +$$

$$+ P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \cdot c + 2 \cdot c + 3 \cdot c + 4 \cdot c + 5 \cdot c + c(10-6) + c(10-7) + c(10-8) + c(10-9) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15c + 10c - 6c + 10c - 7c + 10c - 8c + 10c - 9c = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 55c - 30c = 1 \Rightarrow 25c = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{25}}$$

Άρα, για $c = \frac{1}{25}$ ικανοποιούνται και οι δύο συνθήκες, οπότε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{25} x & , x = 1,2,3,4,5 \\ \frac{1}{25}(10-x) & , x = 6,7,8,9 \end{cases}$$

είναι καλώς ορισμένη συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας της X.

β) i) $P(X<4) = \sum_{i=1}^{3} P(X=x_i) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) =$

$= \frac{1}{25}\cdot 1 + \frac{1}{25}\cdot 2 + \frac{1}{25}\cdot 3 = \frac{1}{25}(1+2+3) = \frac{6}{25}$

Ισοδύναμα, με τον εναλλακτικό συμβολισμό μπορούμε να γράψουμε:

$P(X<4) = \sum_{i=1}^{3} f(x_i) = f(1) + f(2) + f(3) = \frac{6}{25}$.

ii) $P(X>5 \mid X\geq 3) = \frac{P(X>5 \cap X\geq 3)}{P(X\geq 3)} = \frac{P(X>5)}{P(X\geq 3)} =$

$= \frac{P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) + P(X=9)}{1 - P(X<3)} =$

$= \frac{f(6) + f(7) + f(8) + f(9)}{1 - f(1) - f(2)} =$

$= \frac{\frac{1}{25}(10-6) + \frac{1}{25}(10-7) + \frac{1}{25}(10-8) + \frac{1}{25}(10-9)}{1 - \frac{1}{25}\cdot 1 - \frac{1}{25}\cdot 2} =$

$= \frac{\frac{1}{25}\cdot 4 + \frac{1}{25}\cdot 3 + \frac{1}{25}\cdot 2 + \frac{1}{25}\cdot 1}{1 - \frac{3}{25}} = \frac{\frac{10}{25}}{\frac{22}{25}} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}$

Φυλλάδιο Ασκήσεων 4

Άσκηση 1

α) Βρείτε τη σταθερά c τέτοια ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & 0<x<3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

να είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf).

β) Υπολογίστε την $P(1<X<2)$.

γ) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (cdf).

δ) Υπολογίστε την $P(1<X\leq 2)$.

Λύση

α) Η $f(x)$ για να είναι καλώς ορισμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) πρέπει να ικανοποιεί, σύμφωνα με το θεώρημα χαρακτηρισμού, τις εξής ιδιότητες:

i) $f(x)\geq 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Επομένως, για να ικανοποιεί η $f(x)$ την πρώτη ιδιότητα, πρέπει $c\geq 0$. Επίσης, για να ικανοποιεί την 2η ιδιότητα πρέπει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx + \int_3^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^3 f(x)dx + \int_3^{+\infty} 0\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^3 f(x)\,dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^3 cx^2 dx = 1 \Rightarrow c\int_0^3 x^2 dx = 1 \Rightarrow c\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 1 \Rightarrow$$

$$c\left(\frac{27}{3} - 0\right) = 1 \Rightarrow 9c = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{9}}$$

Άρα, για $\boxed{c=\frac{1}{9}}$, η $f(x)$ είναι καλώς ορισμένη συνάρτηση πυκνότητας (pdf) αφού ικανοποιούνται και οι δύο ιδιότητες.

Επομένως, έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & , 0<x<3 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

β) $P(1<x<2) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{1}{9}\int_1^2 x^2 dx =$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{9}\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}\cdot\frac{7}{3} = \frac{7}{27}$$

γ) Για να εξάγαμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (cdf) θα κάνουμε χρήση του ορισμού της. Εξ' ορισμού, γνωρίζουμε ότι:

$F(x) = P((-\infty, x]) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$, όπου $f(u)$: συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf)

Διακρίνουμε τις ακόλουθες 3 περιπτώσεις:

- Αν $x<0$, τότε $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{x} 0\, du = 0$

- Αν $0 \leq x < 3$, τότε

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} f(u)du + \int_0^x f(u)du =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, du + \int_0^x \frac{1}{9}u^2 du = \int_0^x \frac{1}{9}u^2 du =$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^x u^2 du = \frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{27}$$

- Αν $x \geq 3$, τότε

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} f(u)du + \int_0^3 f(u)du + \int_3^x f(u)du =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, du + \int_0^3 f(u)du + \int_3^x 0\, du = \int_0^3 \frac{1}{9}u^2 du = \frac{1}{9}\int_0^3 u^2 du =$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{9}\left(\frac{27}{3} - 0\right) = 1$$

Άρα, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (cdf) είναι:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \frac{x^3}{27} & , 0 \le x < 3 \\ 1 & , x \geq 3 \end{cases}$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η αθροιστική συνάρτηση που εξάγαμε ικανοποιεί τις ιδιότητες που απαιτούνται ώστε να είναι καλώς ορισμένη συνάρτηση κατανομής. Δηλαδή, η $F(x)$ είναι: - από δεξιά συνεχής
- αύξουσα
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ και $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

δ) Θα υπολογίσουμε την $P(1<X\le 2)$ με τη χρήση της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής (cdf) που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα. Άρα, έχουμε:

$$P(1<X\le 2) = P(X\le 2) - P(X \le 1) = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{27} - \frac{1}{27} =$$

$$= \frac{8}{27} - \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα που βρίσκουμε είναι ίδια με την πιθανότητα στο ερώτημα (β). Αυτό συμβαίνει γιατί έχουμε συνεχή τυχαία μεταβλητή X και συνεπώς, η πιθανότητα σημείου είναι μηδενική. Με άλλα λόγια, επειδή έχουμε συνεχή τυχαία μεταβλητή ισχύει ότι:

$$P(1\le X\le 2) = P(1\le X<2) = P(1<X\le 2) = P(1<X<2) = \frac{7}{27}$$

Τις παραπάνω πιθανότητες τις υπολογίσαμε είτε κάνοντας χρήση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ όπως στο ερώτημα (β) είτε με την χρήση της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής $F(x)$ όπως στο ερώτημα (δ). Οποιον τρόπο κι αν επιλέξαμε, η πιθανότητα πρέπει να βγαίνει ίδια.

Άσκηση 2

Έχετε μία εξέταση που περιέχει 20 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Κάθε ερώτηση έχει 4 πιθανές επιλογές. Είστε σίγουρος για την απάντηση σε 10 ερωτήσεις αλλά δεν έχετε ιδέα για τις υπόλοιπες 10 ερωτήσεις και επιλέγετε τις απαντήσεις τυχαία. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι το σκορ σας στις εξετάσεις, δηλαδή ο αριθμός των σωστών απαντήσεων.

α) Βρείτε την συνάρτηση μάζας πιθανότητας της X.

β) Υπολογίστε την $P(X>15)$.

Λύση

α) Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή Y που είναι ο αριθμός των σωστών απαντήσεων στις 10 ερωτήσεις που απαντάει τυχαία. Επομένως, το συνολικό σκορ στις εξετάσεις θα είναι:

$X = Y + 10$.

Αρχικά, βρίσκουμε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y. Για κάθεμια από τις 10 ερωτήσεις που απαντάς τυχαία, η πιθανότητα επιτυχίας είναι $\frac{1}{4}$ (αφού κάθε ερώτηση έχει 4 πιθανές επιλογές).

Ως εκ τούτου, εκτελείτε 10 ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli$\left(\frac{1}{4}\right)$ και Y είναι ο αριθμός των επιτυχιών.

Επομένως, η τυχαία μεταβλητή $Y \sim Binomial\left(10, \frac{1}{4}\right)$.

Επομένως η συνάρτηση μάζας πιθανότητας (pmf) της Y είναι:

$$f_Y(y) = P_Y(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} = \begin{cases} \binom{10}{y}\left(\frac{1}{4}\right)^y \left(\frac{3}{4}\right)^{10-y} & , y=0,1,2,3,\dots,10 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

Υπενθύμιση!! $\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}$ και $0! = 1$

Τώρα, αρκεί να βρούμε τη συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $X = Y + 10$.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι το πεδίο τιμών της τυχαίας μεταβλητής X είναι $R_X = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$. Άρα, έχουμε:

- $P_X(10) = P(X=10) = P(Y+10=10) = P(Y=0) = \binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{10-0} =$

$$= \frac{10!}{(10-0)!\,0!}\cdot 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \frac{10!}{10!}\cdot 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

- $P_X(11) = P(X=11) = P(Y+10=11) = P(Y=1) = \binom{10}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^{10-1} =$

$$= \frac{10!}{(10-1)!\,1!}\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^9 = \frac{10!}{9!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^9 =$$

$$= \frac{10\cdot \cancel{9!}}{\cancel{9!}}\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^9 = 10\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^9$$

- $P_X(12) = P(X=12) = P(Y+10=12) = P(Y=2) = \binom{10}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{10-2} =$

$$= \frac{10!}{(10-2)!\,2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^8 = 10\cdot 9\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^8$$

$\vdots$

Γενικά, για $k \in R_X$,

$$P_X(k) = P(X=k) = P(Y+10=k) = P(Y=k-10) =$$

$$= \binom{10}{k-10}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-10}\left(\frac{3}{4}\right)^{20-k}$$

Επομένως, η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της X είναι:

$$P_X(k) = \begin{cases} \binom{10}{k-10}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-10}\left(\frac{3}{4}\right)^{20-k} & , \text{για } k=10,11,12,\dots,20 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

β) Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(X>15)$ θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X.

Άρα,

$$P(X>15) = \sum_{k=16}^{20} P(X=k) = P(X=16)+P(X=17)+P(X=18)+P(X=19)+P(X=20)$$

$$= \binom{10}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \binom{10}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^7\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \binom{10}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{3}{4}\right)^2 +$$

$$+ \binom{10}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^9\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^0$$

Άσκηση 3

Έστω η τυχαία μεταβλητή $X \sim N(-5, 4)$

α) Βρείτε την $P(X<0)$.

β) Βρείτε την $P(-7<X<-3)$.

γ) Βρείτε την $P(X>-3 \mid X>-5)$

Λύση

Η X είναι μία κανονική τυχαία μεταβλητή με μέσο $\mu=-5$ και τυπική απόκλιση $\sigma=\sqrt{4}=2$. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X είναι η $F_X(x)$. Αφού η X είναι κανονική τυχαία μεταβλητή, ακολουθώντας τη διαδικασία της τυποποίησης, μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραπάνω πιθανότητες χρησιμοποιώντας τις τιμές από τους πίνακες της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής $\Phi(\cdot)$ της τυπικής κανονικής κατανομής.

Επομένως, ισχύει ότι:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

όπου $\Phi(\cdot)$ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (cdf) της τυπικής κανονικής κατανομής.

Επομένως, έχουμε:

α) $$P(X<0) = P\left(\frac{X-(-5)}{2} < \frac{0-(-5)}{2}\right) = P\left(Z < \frac{5}{2}\right) = P(Z<2.5) =$$

$$= \Phi(2.5) = 0.9938$$

β) $$P(-7<X<-3) = P\left(\frac{-7-(-5)}{2} < \frac{X-(-5)}{2} < \frac{-3-(-5)}{2}\right) =$$

$$= P(-1<Z<1) = \Phi(1) - \Phi(-1) \overset{*}{=} \Phi(1) - (1-\Phi(1)) =$$

$$= 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826$$

(*) Γενικά ισχύει, $\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$ λόγω της συμμετρίας της $N(0,1)$ γύρω από το 0.

γ) $P(X > -3 \mid X > -5) = \dfrac{P(X > -3 \cap X > -5)}{P(X > -5)} = \dfrac{P(X > -3)}{P(X > -5)} =$

$= \dfrac{1 - P(X \leq -3)}{1 - P(X \leq -5)} = \dfrac{1 - P\left(\frac{X - (-5)}{2} \leq \frac{-3 - (-5)}{2}\right)}{1 - P\left(\frac{X - (-5)}{2} \leq \frac{-5 - (-5)}{2}\right)} =$

$= \dfrac{1 - P(Z \leq 1)}{1 - P(Z \leq 0)} = \dfrac{1 - \Phi(1)}{1 - \Phi(0)} = \dfrac{1 - 0.8413}{1 - 0.50} = 0.3174$

Φυλλάδιο Ασκήσεων 5

Άσκηση 1

Έστω μία συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0<x\le 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

και έστω η τυχαία μεταβλητή $Y = \frac{1}{X}$.

Βρείτε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y.

Λύση

Αρχικά, παρατηρούμε ότι το πεδίο τιμών της Y είναι $R_Y = [1, +\infty)$.
Επίσης, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{x}$ είναι αυστηρά (γνησίως) φθίνουσα και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 1]$.
Έχουμε ότι: $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Άρα, για κάθε $y \in [1, +\infty)$ υπάρχει μοναδική τιμή x_1 τέτοια ώστε
$y = g(x_1) \Rightarrow x_1 = g^{-1}(y) = \frac{1}{y}$

Επομένως, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y για $y \in [1, +\infty)$ δίνεται ως εξής:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{4x_1^3}{\left|-\frac{1}{x_1^2}\right|} = 4x_1^5 = \frac{4}{y^5}$$

Άρα, καταλήγουμε ότι:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{y^5}, & y \ge 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άσκηση 2

Υποθέτουμε ένα παιχνίδι που παίζεται με ένα δίκαιο ζάρι. Σ'αυτό το παιχνίδι, ένας παίκτης κερδίζει €20 αν εμφανιστεί ο αριθμός 2, κερδίζει €40 αν εμφανιστεί ο αριθμός 4 ή χάνει €30 αν εμφανιστεί ο αριθμός 6, ενώ ο παίκτης ούτε κερδίζει ούτε χάνει χρήματα αν εμφανιστεί κάποιος άλλος αριθμός στο ζάρι. Βρείτε το αναμενόμενο κέρδος.

Λύση

Έστω X είναι η τυχαία μεταβλητή που δίνει το ποσό των χρημάτων που κερδίζεται σε ~~μία~~ ρίψη του ζαριού.

Τα πιθανά ποσά που μπορούν να κερδηθούν όταν στο ζάρι εμφανιστεί 1, 2, 3, 4, 5, 6 είναι $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, αντίστοιχα. Δηλαδή, αυτές είναι οι δυνατές τιμές της τυχαίας μεταβλητής X. Οι πιθανότητες αυτών είναι $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, $f(x_4)$, $f(x_5)$, $f(x_6)$, δηλαδή $P(X=x_1)$, $P(X=x_2)$, $P(X=x_3)$, $P(X=x_4)$, $P(X=x_5)$ και $P(X=x_6)$ αντίστοιχα.

Επομένως, η συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας για την τυχαία μεταβλητή X είναι ο παρακάτω πίνακας:

x_i	0	+20	0	+40	0	-30
$P(X=x_i)=f(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Άρα, η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής X, η οποία είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, δίνεται από: $E(X)=\sum_{x\in R_X} x\cdot f_X(x) = \sum_{x\in R_X} x\cdot P(X=x)$

Επομένως,

$$E(X)=0\cdot\left(\frac{1}{6}\right)+20\cdot\left(\frac{1}{6}\right)+0\cdot\left(\frac{1}{6}\right)+40\left(\frac{1}{6}\right)+0\cdot\left(\frac{1}{6}\right)+(-30)\left(\frac{1}{6}\right)=5$$

Ο παίκτης προσδοκά ότι θα κερδίσει €5 παίζοντας το παιχνίδι. Άρα σ'ένα δίκαιο παιχνίδι, ο παίκτης αναμένεται θα είναι διατεθειμένος να πληρώσει 5 € για να παίξει το παιχνίδι.

Άσκηση 3

Υποθέτουμε ότι X είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή.
Έστω $Y = aX + b$, όπου $\alpha \neq 0$ και b: σταθερά.
Να δείξετε ότι:

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{\alpha}\right)$$

Απόδειξη

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (cdf) της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P(\alpha X \leq y - b)$$

Σ' αυτό το σημείο, χρειάζεται να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, ανάλογα με το πρόσημο του α.

1) Υποθέτουμε ότι $\boxed{\alpha > 0}$. Τότε:

$$F_Y(y) = P(\alpha X \leq y - b) = P\left(X \leq \frac{y-b}{\alpha}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{\alpha}\right)$$

Για να πάρουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) της Y πρέπει να παραγωγίσουμε την cdf της Y, $F_Y(y)$. Άρα,

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y-b}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} f_X\left(\frac{y-b}{\alpha}\right) = \frac{1}{|\alpha|} f_X\left(\frac{y-b}{\alpha}\right)$$

2) Υποθέτουμε ότι $\boxed{\alpha < 0}$. Τότε:

$$F_Y(y) = P(\alpha X \leq y - b) = P\left(X > \frac{y-b}{\alpha}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{y-b}{\alpha}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{\alpha}\right)$$

Παραγωγίζουμε την $F_Y(y)$ για να πάρουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) της Y και σε αυτή την περίπτωση. Άρα,

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy}\left[1 - F_X\left(\frac{y-b}{\alpha}\right)\right] = -\frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y-b}{\alpha}\right) = -\frac{1}{\alpha} f_X\left(\frac{y-b}{\alpha}\right) =$$

$= \frac{1}{|\alpha|} f_X\left(\frac{y-b}{\alpha}\right)$. Επομένως, και στις δύο περιπτώσεις έχουμε $f_Y(y) = \frac{1}{|\alpha|} f_X\left(\frac{y-b}{\alpha}\right)$ και το θεώρημα αποδείχτηκε.

Άσκηση 4

Μία βιοτεχνία σχεδιάζει να προωθήσει ένα νέο προϊόν και προσπαθεί να αποφασίσει πόσα τεμάχια να κατασκευάσει. Εκτιμούν ότι κάθε τεμάχιο που πωλείται θα αποφέρει κέρδος m ευρώ. Κάθε ένα τεμάχιο που δεν πωλείται αντιπροσωπεύει μία ζημία n ευρώ. Επιπλέον, οι υπεύθυνοι της βιοτεχνίας υπολογίζονται ότι η ζήτηση για το προϊόν, V, θα έχει μία εκθετική κατανομή:

$$f_V(v) = \left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\frac{v}{\lambda}} \quad , v>0$$

Πόσα τεμάχια πρέπει να παράξει η βιοτεχνία για να μεγιστοποιήσει τα αναμενόμενα κέρδη της? (υποθέτουμε ότι m, n και λ είναι γνωστά)

Λύση

Αν ένα σύνολο x τεμαχίων κατασκευαστεί, το κέρδος της βιοτεχνίας μπορεί να εκφραστεί σαν μία συνάρτηση κερδών, $Q(v)$, όπου:

$$Q(v) = \begin{cases} mv - n(x-v) & , \text{αν } v<x \\ mx & , \text{αν } v \geq x \end{cases}$$

όπου v είναι ο αριθμός των τεμαχίων που πωλούνται.
Επομένως, η συνάρτηση αναμενόμενου κέρδους είναι:

$$E[Q(V)] = \int_0^{+\infty} Q(v) f_V(v)\, dv = \int_0^x [(m+n)v - nx]\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\frac{v}{\lambda}} dv + \int_x^{+\infty} m \cdot x \left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\frac{v}{\lambda}} dv =$$

$$= \underbrace{\int_0^x (m+n) v \left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\frac{v}{\lambda}} dv}_{1} - \underbrace{\int_0^x nx \left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\frac{v}{\lambda}} dv}_{2} + \underbrace{\int_x^{+\infty} mx \left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\frac{v}{\lambda}} dv}_{3} \quad (*)$$

Τώρα, θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τα ολοκληρώματα 1, 2 και 3 και έπειτα, θα τα αντικαταστήσουμε στην σχέση (*) για να βρούμε τη συνάρτηση αναμενόμενου κέρδους.

$$① \int_0^x (m+n)\, v \left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-v/\lambda}\, dv = (m+n)\int_0^x v \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-v/\lambda}\, dv =$$

$$= -(m+n)\int_0^x v \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \cdot e^{-v/\lambda}\, dv = -(m+n)\int_0^x v \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-v/\lambda}\right) dv =$$

$$= -(m+n)\int_0^x v \cdot \left(e^{-v/\lambda}\right)' dv =$$

Εφαρμόζουμε κατά παράγοντες ολοκλήρωση.

Γενικά:

$$\int_\alpha^\beta g(v)\, h'(v)\, dv = h(v) g(v)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta h(v)\, g'(v)\, dv$$

Άρα, $h(v) = e^{-\frac{v}{\lambda}}$

$g(v) = v$

Επομένως, εφαρμόζοντας κατά παράγοντες ολοκλήρωση γράφουμε:

$$= -(m+n)\left[v \cdot e^{-v/\lambda}\Big|_0^x - \int_0^x (v)' e^{-v/\lambda}\, dv \right] =$$

$$= -(m+n)\left[v \cdot e^{-\frac{v}{\lambda}}\Big|_0^x - \int_0^x e^{-v/\lambda}\, dv \right] =$$

$$= -(m+n)\left[\left(x e^{-x/\lambda} - 0\right) - \left[-\lambda e^{-v/\lambda}\right]_0^x \right] =$$

$$= -(m+n)\left[x e^{-x/\lambda} - \left(-\lambda e^{-x/\lambda} - (-\lambda e^0)\right)\right] =$$

$$= -(m+n)\left[x e^{-x/\lambda} + \lambda e^{-x/\lambda} - \lambda \right] = -(m+n)\, x e^{-\frac{x}{\lambda}} - (m+n)\lambda e^{-x/\lambda} + \lambda(m+n)$$

①

(2) $\int_0^x nx\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{-v/\lambda}dv = n\cdot x\left(\frac{1}{\lambda}\right)\int_0^x e^{-v/\lambda}dv =$

$= nx\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left[-\lambda e^{-v/\lambda}\right]_0^x = \frac{1}{\lambda}nx\left[-\lambda e^{-x/\lambda} - (-\lambda e^0)\right] =$

$= \frac{1}{\lambda}\cdot nx\left[-\lambda e^{-\frac{x}{\lambda}} + \lambda\right] = -nxe^{-\frac{x}{\lambda}} + nx$ (2)

(3) $\int_x^{+\infty} mx\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\frac{v}{\lambda}}dv = mx\cdot\frac{1}{\lambda}\int_x^{+\infty} e^{-v/\lambda}dv =$

$= mx\cdot\frac{1}{\lambda}\left[-\lambda e^{-v/\lambda}\right]_x^{+\infty} = mx\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left[\lim_{v\to+\infty}\left(-\lambda e^{-\frac{v}{\lambda}}\right) - \left(-\lambda e^{-\frac{x}{\lambda}}\right)\right] =$

$= m\cdot x\cdot\frac{1}{\lambda}\left[0 + \lambda e^{-x/\lambda}\right] = m\cdot xe^{-\frac{x}{\lambda}}$ (3)

Επομένως, αντικαθιστώντας τα ολοκληρώματα (1), (2) και (3) στη σχέση (*) παίρνουμε ότι η συνάρτηση αναμενόμενου κέρδους είναι:

$E[Q(v)] = \int_0^x (m+n)v\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\frac{v}{\lambda}}dv - \int_0^x nx\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\frac{v}{\lambda}}dv + \int_x^{+\infty} mx\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\frac{v}{\lambda}}dv =$

$\overset{(1),(2),(3)}{=} -(m+n)xe^{-\frac{x}{\lambda}} - (m+n)\lambda e^{-\frac{x}{\lambda}} + \lambda(m+n) - nx + nxe^{-\frac{x}{\lambda}} + mxe^{-\frac{x}{\lambda}} =$

$= -mxe^{-\frac{x}{\lambda}} - nxe^{-\frac{x}{\lambda}} - m\lambda e^{-x/\lambda} - n\lambda e^{-x/\lambda} + \lambda m + \lambda n - nx + nxe^{-x/\lambda} + mxe^{-x/\lambda} =$
$= \lambda(m+n) - \lambda(m+n)e^{-x/\lambda} - nx$

Άρα, η συνάρτηση αναμενόμενου κέρδους της βιοτεχνίας είναι:

$E[Q(v)] = \lambda(m+n) - \lambda(m+n)e^{-\frac{x}{\lambda}} - nx$

Συνεπώς, η βιοτεχνία πρέπει να μεγιστοποιήσει τη συνάρτηση αναμενόμενου κέρδους, ώστε να βρει το βέλτιστο επίπεδο παραγωγής, δηλαδή τον αριθμό των τεμαχίων που πρέπει να κατασκευάσει για να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της.

Άρα, παίρνουμε την συνθήκη 1ης τάξης (F.O.C.):

$$\frac{d\,E[Q(v)]}{dx} = 0 \Rightarrow -\lambda(m+n)e^{-\frac{x}{\lambda}} \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right) - n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m+n)e^{-x/\lambda} = n \Rightarrow e^{-\frac{x}{\lambda}} = \frac{n}{m+n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln e^{-x/\lambda} = \ln\left(\frac{n}{m+n}\right) \Rightarrow -\frac{x}{\lambda} = \ln\left(\frac{n}{m+n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -\lambda \ln\left(\frac{n}{m+n}\right)}$$

αυτή είναι η βέλτιστη ποσότητα που μεγιστοποιεί τα αναμενόμενα κέρδη της βιοτεχνίας

Το $x = -\lambda \ln\left(\frac{n}{m+n}\right)$ είναι θετική ποσότητα αφού

$\lambda > 0, n > 0, m > 0$ και $\left(\frac{n}{m+n}\right) < 1$ <u>άρα</u> $\ln\left(\frac{n}{m+n}\right) < 0$

Άσκηση 5

Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα μέχρι να εμφανιστεί κορώνα. Θα κερδίσουμε $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ ευρώ αν εμφανιστεί κορώνα στη k-οστή ρίψη. Πόσα χρήματα αναμένεται να πληρωθούμε;

Λύση

Έστω η τυχαία μεταβλητή X συμβολίζει τη ρίψη στην οποία εμφανίζεται πρώτη φορά κορώνα. Τότε, έχουμε ότι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από:

$$P(X=k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k=1,2,3,\ldots$$

Επιπλέον, έχουμε ότι το ποσό χρημάτων που θα κερδίσουμε είναι μία συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X, $g(X)$ και εξαρτάται από το ποια τιμή θα πάρει η τυχαία μεταβλητή X, δηλαδή σε ποια ρίψη θα εμφανιστεί κορώνα. Άρα,

$$g(X)=\left(\frac{1}{2}\right)^X$$

Επομένως, το ποσό χρημάτων που αναμένεται να κερδίσουμε είναι:

$$E[g(X)] = E\left[\left(\frac{1}{2}\right)^X\right] = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)\cdot P(X=k) =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{\frac{3}{4}} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} = 0{,}33€$$

Άρα, αν παίξουμε το παιχνίδι, αναμένεται να πληρωθούμε €0,33.

Φυλλάδιο Ασκήσεων 6

Άσκηση 1

Μια διακριτή τυχαία μεταβλητή έχει συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας $f_X(x) = c \cdot 2^{-x}$, $x = 0,1,2,3,4$

α) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c.

β) Να υπολογιστεί η πιθανογεννήτρια $G_X(t)$ της X.

γ) Να βρεθεί η μέση τιμή και η παραγοντική ροπή της τάξης $E[X(X-1)]$ της X.

δ) Να βρεθεί η διακύμανση της X.

Λύση

α) Από τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί μια καλώς ορισμένη συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας έχουμε ότι:

$$\sum_{x=0}^{4} f_X(x) = 1 \Rightarrow c\cdot 2^0 + c\cdot 2^{-1} + c\cdot 2^{-2} + c\cdot 2^{-3} + c\cdot 2^{-4} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c + \frac{1}{2}\cdot c + \frac{1}{4}c + \frac{1}{8}c + \frac{1}{16}c = 1 \Rightarrow 16c + 8c + 4c + 2c + c = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 31c = 16 \Rightarrow \boxed{c = \frac{16}{31}}$$

Άρα, για $c = \frac{16}{31}$, η συνάρτηση $f_X(x) = \frac{16}{31}\cdot 2^{-x}$ είναι

καλώς ορισμένη συνάρτηση πιθανότητας.

β) Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{x=0}^{4} t^x \cdot P(X=x) = \sum_{x=0}^{4} t^x \cdot \frac{16}{31}\cdot\frac{1}{2^x} =$$

$$= \frac{16}{31}\sum_{x=0}^{4} t^x \cdot \frac{1}{2^x} = \frac{16}{31}\cdot\sum_{x=0}^{4}\left(\frac{t}{2}\right)^x = \frac{16}{31}\cdot\left[\frac{1-\left(\frac{t}{2}\right)^5}{1-\frac{t}{2}}\right] =$$

$$= \frac{16}{31}\left(\frac{\frac{32-t^5}{32}}{\frac{2-t}{2}}\right) = \frac{16}{31}\cdot\frac{2\,(32-t^5)}{32\,(2-t)} = \frac{32-t^5}{31(2-t)}, \quad t \neq 2$$

άρα η πιθανογεννήτρια $G_X(t)$ της X είναι:

$$G_X(t) = \frac{32-t^5}{31(2-t)}, \quad t \neq 2$$

γ) Η μέση τιμή $E(X)$ δίνεται από την πρώτη παράγωγο της πιθανογεννήτριας συνάρτησης $G_X(t)$ για $t=1$.
Άρα, η πρώτη παράγωγος της $G_X(t)$ είναι:

$$G_X'(t)\Big|_{t=1} = \frac{(62-31t)(-5t^4) - (32-t^5)\cdot(-31)}{(62-31t)^2}\Bigg|_{t=1} =$$

$$= \frac{-310t^4 + 155t^5 + 992 - 31t^5}{(62-31t)^2}\Bigg|_{t=1} =$$

$$= \frac{124t^5 - 310t^4 + 992}{(62-31t)^2}\Bigg|_{t=1} = \frac{806}{961} \overset{\div 31}{=} \frac{26}{31}$$

άρα

$$E(X) = G_X'(1) = \frac{26}{31}$$

Η παραγοντική ροπή της τάξης $E[X(X-1)] = G_X''(1)$, άρα έχουμε:

$$G_X''(t)\Big|_{t=1} = \frac{(620t^4 - 1240t^3)\cdot(62-31t)^2 - [2\cdot(62-31t)\cdot(-31)][124t^5 - 310t^4 + 992]}{(62-31t)^4}\Bigg|_{t=1} =$$

$$= \frac{32}{31}$$

άρα $E[X(X-1)] = G_X''(1) = \frac{32}{31}$

δ) Για να υπολογίσουμε την διακύμανση της X πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την ροπή της τάξης. Επομένως,

$$E(X^2) = G_X''(1) + G_X'(1) = \frac{32}{31} + \frac{26}{31} = \frac{58}{31}$$

άρα η διακύμανση της X είναι:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{58}{31} - \left(\frac{26}{31}\right)^2 = \frac{1122}{961}$$

Άσκηση 2

Ποια είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) δίνεται από:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , x > 0 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

Ποιος είναι ο μέσος και η διακύμανση της X;

Λύση

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της X είναι:

$$M(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{+\infty} e^{tx} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{tx} e^{-x}\,dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-(1-t)x}\,dx = -\frac{1}{1-t}\int_0^{+\infty} -(1-t)e^{-(1-t)x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{1-t}\left[e^{-(1-t)x}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{1-t}\left(0 - e^0\right) = \frac{1}{1-t}, \text{ αν } 1-t>0$$

Άρα, η αναμενόμενη τιμή (μέσος) της X είναι:

$$E(X) = \frac{d}{dt} M(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}(1-t)^{-1}\Big|_{t=0} = (-1)\cdot(1-t)^{-2}\cdot(-1)\Big|_{t=0} = (1-t)^{-2}\Big|_{t=0} = 1$$

Η ροπή 2ης τάξης δίνεται από:

$$E(X^2) = \frac{d^2}{dt^2} M(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(1-t)^{-2}\Big|_{t=0} =$$

$$= (-2)\cdot(1-t)^{-3}(-1)\Big|_{t=0} = 2(1-t)^{-3}\Big|_{t=0} = 2$$

Άρα η διακύμανση της X είναι:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2 - 1 = 1$$

Άσκηση 3

Έστω X είναι μία τυχαία μεταβλητή με $E(X^n)=0,8$, για $n=1,2,3,\dots,+\infty$

Ποια είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση και η συνάρτηση πιθανότητας της X;

Λύση

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση $M(t)$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$M(t)=M(0)+\sum_{n=1}^{\infty} M^{(n)}(0)\left(\frac{t^n}{n!}\right)=$$

$$=M(0)+\sum_{n=1}^{\infty} E(X^n)\left(\frac{t^n}{n!}\right)=$$ $M(0)=1$ πάντα

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty} 0.8\left(\frac{t^n}{n!}\right)=$$

$$=0.2+0.8+0.8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t^n}{n!}\right)=$$

$$=0.2+0.8\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t^n}{n!}\right)$$

Όμως, ξέρουμε ότι από Ανάπτυγμα Maclaurin της e^x ισχύει ότι:

$$e^x=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}, \forall x\in\mathbb{R}$$

Άρα, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Maclaurin για $x=t$ και $i=n$ έχουμε ότι: $e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t^n}{n!}\right)$ άρα, η ροπογεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$M(t)=0.2+0.8e^t \quad (1)$$

Γνωρίζουμε, επίσης, από την θεωρία ότι η ροπογεννήτρια συνάρτηση για μία διακριτή τυχαία μεταβλητή ορίζεται ως:

$$M(t)=\sum_{x} e^{t\cdot x}\cdot f_X(x)=\sum_{x} e^{tx}\cdot P(X=x)$$

Επομένως, παρατηρούμε ότι η σχέση ① μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως εξής:

$$M(t) = 0.2e^{0t} + 0.8e^{1t}$$

Επομένως, συνδυάζοντας αυτή την παρατήρηση με τον ορισμό της ροπογεννήτριας συνάρτησης παρατηρούμε ότι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η τυχαία μεταβλητή X είναι το 0 και το 1. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι:

$$P(X=0) = 0.2$$
$$P(X=1) = 0.8$$

Συνεπώς, η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$f(x) = P(X=x) = \begin{cases} |x-0.2| & , x=0,1 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$