Φυλλάδιο Ασκήσεων 5

Άσκηση 1

Έστω μία συνεχής τυχαία μεταβλητή $X$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

και έστω η τυχαία μεταβλητή $Y = \frac{1}{X}$.

Βρείτε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Y$.

Λύση

Αρχικά, παρατηρούμε ότι το πεδίο τιμών της $Y$ είναι $R_Y = [1, +\infty)$.
Επίσης, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{x}$ είναι αυστηρά (γνησίως) φθίνουσα και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 1]$.
Έχουμε ότι: $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Άρα, για κάθε $y \in [1, +\infty)$ υπάρχει μοναδική τιμή $x_1$ τέτοια ώστε
$y = g(x_1) \Rightarrow x_1 = g^{-1}(y) = \frac{1}{y}$

Επομένως, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y$ για $y \in [1, +\infty)$ δίνεται ως εξής:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{4x_1^3}{\left|-\frac{1}{x_1^2}\right|} = 4x_1^5 = \frac{4}{y^5}$$

Άρα, καταλήγουμε ότι:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{y^5}, & y \geq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

## Άσκηση 2

Υποθέτουμε ένα παιχνίδι που παίζεται με ένα δίκαιο ζάρι. Σ'αυτό το παιχνίδι, ένας παίκτης κερδίζει €20 αν εμφανιστεί ο αριθμός 2, κερδίζει €40 αν εμφανιστεί ο αριθμός 4 ή χάνει €30 αν εμφανιστεί ο αριθμός 6, ενώ ο παίκτης ούτε κερδίζει ούτε χάνει χρήματα αν εμφανιστεί κάποιος άλλος αριθμός στο ζάρι. Βρείτε το αναμενόμενο κέρδος.

## Λύση

Έστω $X$ είναι η τυχαία μεταβλητή που δίνει το ποσό των χρημάτων που κερδίζεται σε μία ρίψη του ζαριού.

Τα πιθανά ποσά που μπορούν να κερδηθούν όταν στο ζάρι εμφανιστεί 1, 2, 3, 4, 5, 6 είναι $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, αντίστοιχα. Δηλαδή, αυτές είναι οι δυνατές τιμές της τυχαίας μεταβλητής $X$. Οι πιθανότητες αυτών είναι $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, $f(x_4)$, $f(x_5)$, $f(x_6)$, δηλαδή $P(X=x_1)$, $P(X=x_2)$, $P(X=x_3)$, $P(X=x_4)$, $P(X=x_5)$ και $P(X=x_6)$ αντίστοιχα.

Επομένως, η συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας για την τυχαία μεταβλητή $X$ είναι ο παρακάτω πίνακας:

| $x_i$ | 0 | +20 | 0 | +40 | 0 | -30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)=f(x_i)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Άρα, η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής $X$, η οποία είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, δίνεται από: $E(X)=\sum_{x\in R_X} x\cdot f_X(x)=\sum_{x\in R_X} x\cdot P(X=x)$

Επομένως,

$$E(X)=0\cdot\left(\frac{1}{6}\right)+20\cdot\left(\frac{1}{6}\right)+0\cdot\left(\frac{1}{6}\right)+40\left(\frac{1}{6}\right)+0\cdot\left(\frac{1}{6}\right)+(-30)\left(\frac{1}{6}\right)=5$$

Ο παίκτης προσδοκά ότι θα κερδίσει €5 παίζοντας το παιχνίδι. Άρα σ'ένα δίκαιο παιχνίδι, ο παίκτης αναμένεται ότι είναι διατεθειμένος να πληρώσει 5€ για να παίξει το παιχνίδι.

## Άσκηση 4

Μία βιοτεχνία σχεδιάζει να προωθήσει ένα νέο προϊόν και προσπαθεί να αποφασίσει πόσα τεμάχια να κατασκευάσει. Εκτιμούν ότι κάθε τεμάχιο που πωλείται θα αποφέρει κέρδος m ευρώ. Κάθε ένα τεμάχιο που δεν πωλείται αντιπροσωπεύει μία ζημία η ευρώ. Επιπλέον, οι υπεύθυνοι της βιοτεχνίας υπολογίζονται ότι η ζήτηση για το προϊόν, V, θα έχει μία εκθετική κατανομή:

$$f_V(v) = \left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\frac{v}{\lambda}} \quad , v > 0$$

Πόσα τεμάχια πρέπει να παράξει η βιοτεχνία για να μεγιστοποιήσει τα αναμενόμενα κέρδη της; (υποθέτουμε ότι m, η και λ είναι γνωστά)

## Λύση

Αν ένα σύνολο x τεμαχίων κατασκευαστεί, το κέρδος της βιοτεχνίας μπορεί να εκφραστεί σαν μία συνάρτηση κερδών, Q(v), όπου:

$$Q(v) = \begin{cases} mv - n(x-v) & , \text{ αν } v < x \\ mx & , \text{ αν } v \geq x \end{cases}$$

όπου v είναι ο αριθμός των τεμαχίων που πωλούνται.
Επομένως, η συνάρτηση αναμενόμενου κέρδους είναι:

$$E[Q(V)] = \int_0^{+\infty} Q(v) f_V(v)\, dv = \int_0^x [(m+n)v - nx]\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\frac{v}{\lambda}} dv + \int_x^{+\infty} m \cdot x \left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\frac{v}{\lambda}} dv =$$

$$= \underbrace{\int_0^x (m+n)\, v \left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\frac{v}{\lambda}} dv}_{1} - \underbrace{\int_0^x nx\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\frac{v}{\lambda}} dv}_{2} + \underbrace{\int_x^{+\infty} mx\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\frac{v}{\lambda}} dv}_{3} \quad (*)$$

Τώρα, θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τα ολοκληρώματα 1, 2 και 3 και έπειτα, θα τα αντικαταστήσουμε στην σχέση (*) για να βρούμε τη συνάρτηση αναμενόμενου κέρδους.

$$(1)\quad \int_0^x (m+n)\,v\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{-v/\lambda}\,dv = (m+n)\int_0^x v\cdot\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{-v/\lambda}\,dv =$$

$$= -(m+n)\int_0^x v\cdot\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\cdot e^{-v/\lambda}\,dv = -(m+n)\int_0^x v\cdot\left(-\frac{1}{\lambda}\cdot e^{-v/\lambda}\right)dv =$$

$$= -(m+n)\int_0^x v\cdot\left(e^{-v/\lambda}\right)'\,dv =$$

Εφαρμόζουμε κατά παράγοντες ολοκλήρωση.

Γενικά:

$$\int_\alpha^\beta g(v)\,h'(v)\,dv = h(v)g(v)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta h(v)\,g'(v)\,dv$$

Άρα, $h(v) = e^{-\frac{v}{\lambda}}$

$g(v) = v$

Επομένως, εφαρμόζοντας κατά παράγοντες ολοκλήρωση γράφουμε:

$$= -(m+n)\left[v\cdot e^{-v/\lambda}\Big|_0^x - \int_0^x (v)'e^{-v/\lambda}\,dv\right] =$$

$$= -(m+n)\left[v\cdot e^{-\frac{v}{\lambda}}\Big|_0^x - \int_0^x e^{-v/\lambda}\,dv\right] =$$

$$= -(m+n)\left[\left(x e^{-x/\lambda} - 0\right) - \left[-\lambda e^{-v/\lambda}\right]_0^x\right] =$$

$$= -(m+n)\left[x e^{-x/\lambda} - \left(-\lambda e^{-x/\lambda} - (-\lambda e^{0})\right)\right] =$$

$$= -(m+n)\left[x e^{-x/\lambda} + \lambda e^{-x/\lambda} - \lambda\right] = -(m+n)\,x e^{-\frac{x}{\lambda}} - (m+n)\lambda e^{-x/\lambda} + \lambda(m+n)$$

(1)

$$② \quad \int_0^x nx\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{-v/\lambda}dv = n\cdot x\left(\frac{1}{\lambda}\right)\int_0^x e^{-v/\lambda}dv =$$

$$= nx\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left[-\lambda e^{-v/\lambda}\right]_0^x = \frac{1}{\lambda}nx\left[-\lambda e^{-x/\lambda} - (-\lambda e^{0})\right] =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\cdot nx\left[-\lambda e^{-\frac{x}{\lambda}} + \lambda\right] = -nxe^{-\frac{x}{\lambda}} + nx \quad ②$$

$$③ \quad \int_x^{+\infty} mx\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\frac{v}{\lambda}}dv = mx\cdot\frac{1}{\lambda}\int_x^{+\infty} e^{-v/\lambda}dv =$$

$$= mx\cdot\frac{1}{\lambda}\left[-\lambda e^{-v/\lambda}\right]_x^{+\infty} = mx\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left[\lim_{v\to+\infty}\left(-\lambda e^{-\frac{v}{\lambda}}\right) - \left(-\lambda e^{-\frac{x}{\lambda}}\right)\right] =$$

$$= m\cdot x\cdot\frac{1}{\lambda}\left[0 + \lambda e^{-x/\lambda}\right] = m\cdot xe^{-\frac{x}{\lambda}} \quad ③$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τα ολοκληρώματα ①, ② και ③ στη σχέση (*) παίρνουμε ότι η συνάρτηση αναμενόμενου κέρδους είναι:

$$E[Q(v)] = \int_0^x (m+n)v\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\frac{v}{\lambda}}dv - \int_0^x nx\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\frac{v}{\lambda}}dv + \int_x^{+\infty} mx\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\frac{v}{\lambda}}dv =$$

$$\overset{①,②,③}{=} -(m+n)xe^{-\frac{x}{\lambda}} - (m+n)\lambda e^{-\frac{x}{\lambda}} + \lambda(m+n) - nx + nxe^{-\frac{x}{\lambda}} + mxe^{-\frac{x}{\lambda}} =$$

$$= -mxe^{-\frac{x}{\lambda}} - nxe^{-\frac{x}{\lambda}} - m\lambda e^{-x/\lambda} - n\lambda e^{-x/\lambda} + \lambda m + \lambda n - nx + nxe^{-x/\lambda} + mxe^{-x/\lambda} =$$

$$= \lambda(m+n) - \lambda(m+n)e^{-x/\lambda} - nx$$

Άρα, η συνάρτηση αναμενόμενου κέρδους της βιοτεχνίας είναι:

$$E[Q(v)] = \lambda(m+n) - \lambda(m+n)e^{-\frac{x}{\lambda}} - nx$$

Συνεπώς, η βιοτεχνία πρέπει να μεγιστοποιήσει τη συνάρτηση αναμενόμενου κέρδους, ώστε να βρει το βέλτιστο επίπεδο παραγωγής, δηλαδή τον αριθμό των τεμαχίων που πρέπει να κατασκευάσει για να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της.

Άρα, παίρνουμε την συνθήκη 1ης τάξης (F.O.C.):

$$\frac{d\, E[Q(v)]}{dx} = 0 \Rightarrow -\lambda(m+n)e^{-\frac{x}{\lambda}}\cdot\left(-\frac{1}{\lambda}\right) - n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m+n)e^{-x/\lambda} = n \Rightarrow e^{-\frac{x}{\lambda}} = \frac{n}{m+n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln e^{-x/\lambda} = \ln\left(\frac{n}{m+n}\right) \Rightarrow -\frac{x}{\lambda} = \ln\left(\frac{n}{m+n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -\lambda \ln\left(\frac{n}{m+n}\right)}$$

αυτή είναι η βέλτιστη ποσότητα που μεγιστοποιεί τα αναμενόμενα κέρδη της βιοτεχνίας

Το $x = -\lambda \ln\left(\frac{n}{m+n}\right)$ είναι θετική ποσότητα αφού

$\lambda>0, n>0, m>0$ και $\left(\frac{n}{m+n}\right)<1$ <u>άρα</u> $\ln\left(\frac{n}{m+n}\right)<0$

## Άσκηση 5

Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα μέχρι να εμφανιστεί κορώνα. Θα κερδίσουμε $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ ευρώ αν εμφανιστεί κορώνα στη k-οστή ρίψη. Πόσα χρήματα αναμένεται να πληρωθούμε;

## Λύση

Έστω η τυχαία μεταβλητή X συμβολίζει τη ρίψη στην οποία εμφανίζεται πρώτη φορά κορώνα. Τότε, έχουμε ότι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από:

$$P(X=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad , k=1,2,3,\dots$$

Επιπλέον, έχουμε ότι το ποσό χρημάτων που θα κερδίσουμε είναι μία συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X, $g(X)$ και εξαρτάται από το ποια τιμή θα πάρει η τυχαία μεταβλητή X, δηλαδή σε ποια ρίψη θα εμφανιστεί κορώνα. Άρα,

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Επομένως, το ποσό χρημάτων που αναμένεται να κερδίσουμε είναι:

$$E[g(X)] = E\left[\left(\frac{1}{2}\right)^X\right] = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)\cdot P(X=k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{\frac{3}{4}} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} = 0{,}33€$$

Άρα, αν παίξουμε το παιχνίδι, αναμένεται να πληρωθούμε €0,33