Φυλλάδιο Ασκήσεων 4

Άσκηση 1

α) Βρείτε τη σταθερά c τέτοια ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} c x^2 & , 0<x<3 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

να είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf).

β) Υπολογίστε την $P(1<X<2)$.

γ) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (cdf).

δ) Υπολογίστε την $P(1<X\leq 2)$.

Λύση

α) Η $f(x)$ για να είναι καλώς ορισμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) πρέπει να ικανοποιεί, σύμφωνα με το θεώρημα χαρακτηρισμού, τις εξής ιδιότητες:

i) $f(x)\geq 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Επομένως, για να ικανοποιεί η $f(x)$ την πρώτη ιδιότητα, πρέπει $c\geq 0$. Επίσης, για να ικανοποιεί την 2η ιδιότητα πρέπει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{+\infty} 0\,dx = 1 \Rightarrow \int_{0}^{3} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{3} c x^2 dx = 1 \Rightarrow c\int_{0}^{3} x^2 dx = 1 \Rightarrow c\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{3} = 1 \Rightarrow$$

$$c\left(\frac{27}{3} - 0\right) = 1 \Rightarrow 9c = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{9}}$$

Άρα, για $\boxed{c=\frac{1}{9}}$, η $f(x)$ είναι καλώς ορισμένη συνάρτηση πυκνότητας (pdf) αφού ικανοποιούνται και οι δύο ιδιότητες.

Επομένως, έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & , 0<x<3 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

β) $P(1<x<2) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{1}{9}\int_1^2 x^2 dx =$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{9}\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}\cdot\frac{7}{3} = \frac{7}{27}$$

γ) Για να εξάγουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (cdf) θα κάνουμε χρήση του ορισμού της. Εξ' ορισμού, γνωρίζουμε ότι:

$F(x) = P((-\infty, x]) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$, όπου $f(u)$: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf)

Διακρίνουμε τις ακόλουθες 3 περιπτώσεις:

- Αν $x<0$, τότε $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{x} 0\, du = 0$

- Αν $0 \leq x < 3$, τότε

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} f(u)du + \int_0^x f(u)du =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, du + \int_0^x \frac{1}{9}u^2 du = \int_0^x \frac{1}{9}u^2 du =$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^x u^2 du = \frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{27}$$

- Αν $x \geq 3$, τότε

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} f(u)du + \int_0^3 f(u)du + \int_3^x f(u)du =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, du + \int_0^3 f(u)du + \int_3^x 0\, du = \int_0^3 \frac{1}{9}u^2 du = \frac{1}{9}\int_0^3 u^2 du =$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{9}\left(\frac{27}{3}-0\right) = 1$$

Άρα, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (cdf) είναι:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \dfrac{x^3}{27} & , 0 \le x < 3 \\ 1 & , x \geq 3 \end{cases}$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η αθροιστική συνάρτηση που βρήκαμε ικανοποιεί τις ιδιότητες που απαιτούνται ώστε να είναι καλώς ορισμένη συνάρτηση κατανομής. Δηλαδή, η $F(x)$ είναι: - από δεξιά συνεχής

- αύξουσα
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

δ) Θα υπολογίσουμε την $P(1<X\le 2)$ με τη χρήση της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής (cdf) που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα. Άρα, έχουμε:

$$P(1<X\le 2) = P(X\le 2) - P(X\le 1) = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{27} - \frac{1}{27} =$$

$$= \frac{8}{27} - \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα που βρίσκουμε είναι ίδια με την πιθανότητα στο ερώτημα (β). Αυτό συμβαίνει γιατί έχουμε συνεχή τυχαία μεταβλητή X και συνεπώς, η πιθανότητα σημείου είναι μηδενική. Με άλλα λόγια, επειδή έχουμε συνεχή τυχαία μεταβλητή ισχύει ότι:

$$P(1\le X\le 2) = P(1\le X<2) = P(1<X\le 2) = P(1<X<2) = \frac{7}{27}$$

Τις παραπάνω πιθανότητες τις υπολογίζουμε είτε κάνοντας χρήση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ όπως στο ερώτημα (β) είτε με τη χρήση της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής $F(x)$ όπως στο ερώτημα (δ). Όποιον τρόπο και να επιλέξουμε, η πιθανότητα πρέπει να βγαίνει ίδια.

Άσκηση 2

Έχετε μία εξέταση που περιέχει 20 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Κάθε ερώτηση έχει 4 πιθανές επιλογές. Είστε σίγουρος για την απάντηση σε 10 ερωτήσεις αλλά δεν έχετε ιδέα για τις υπόλοιπες 10 ερωτήσεις και επιλέγετε τις απαντήσεις τυχαία. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι το σκορ σας στις εξετάσεις, δηλαδή ο αριθμός των σωστών απαντήσεων.

α) Βρείτε την συνάρτηση μάζας πιθανότητας της X.

β) Υπολογίστε την $P(X>15)$.

Λύση

α) Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή Y που είναι ο αριθμός των σωστών απαντήσεων στις 10 ερωτήσεις που απαντάς τυχαία. Επομένως, το συνολικό σκορ στις εξετάσεις θα είναι:

$X = Y+10$.

Αρχικά, βρίσκουμε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y. Για κάθεμια από τις 10 ερωτήσεις που απαντάς τυχαία, η πιθανότητα επιτυχίας είναι $\frac{1}{4}$ (αφού κάθε ερώτηση έχει 4 πιθανές επιλογές).

Ως εκ τούτου, εκτελείτε 10 ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli$\left(\frac{1}{4}\right)$ και Y είναι ο αριθμός των επιτυχιών.

Επομένως, η τυχαία μεταβλητή $Y \sim Binomial\left(10, \frac{1}{4}\right)$.

Επομένως η συνάρτηση μάζας πιθανότητας (pmf) της Y είναι:

$$f_Y(y) = P_Y(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} = \begin{cases} \binom{10}{y}\left(\frac{1}{4}\right)^y \left(\frac{3}{4}\right)^{10-y}, & y=0,1,2,3,\dots,10 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Υπενθύμιση!! $\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}$ και $0!=1$

Τώρα, αρκεί να βρούμε τη συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $X = Y + 10$.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι το πεδίο τιμών της τυχαίας μεταβλητής X είναι $R_X = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$. Άρα, έχουμε:

- $$P_X(10) = P(X=10) = P(Y+10=10) = P(Y=0) = \binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{10-0} =$$
$$= \frac{10!}{(10-0)!\,0!} \cdot 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \frac{10!}{10!} \cdot 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

- $$P_X(11) = P(X=11) = P(Y+10=11) = P(Y=1) = \binom{10}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^{10-1} =$$
$$= \frac{10!}{(10-1)!\,1!}\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^9 = \frac{10!}{9!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^9 =$$
$$= \frac{10\cdot \cancel{9!}}{\cancel{9!}}\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^9 = 10\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^9$$

- $$P_X(12) = P(X=12) = P(Y+10=12) = P(Y=2) = \binom{10}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{10-2} =$$
$$= \frac{10!}{(10-2)!\,2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^8 = 10\cdot 9\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^8$$

⋮

Γενικά, για $k \in R_X$,

$$P_X(k) = P(X=k) = P(Y+10=k) = P(Y=k-10) =$$
$$= \binom{10}{k-10}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-10}\left(\frac{3}{4}\right)^{20-k}$$

Επομένως, η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της X είναι:

$$P_X(k) = \begin{cases} \binom{10}{k-10}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-10}\left(\frac{3}{4}\right)^{20-k} & , \text{για } k=10,11,12,\dots,20 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

β) Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(X>15)$ θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X.
Άρα,

$$P(X>15) = \sum_{k=16}^{20} P(X=k) = P(X=16)+P(X=17)+P(X=18)+P(X=19)+P(X=20)$$

$$= \binom{10}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{6}\left(\frac{3}{4}\right)^{4} + \binom{10}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{7}\left(\frac{3}{4}\right)^{3} + \binom{10}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{8}\left(\frac{3}{4}\right)^{2} +$$

$$+ \binom{10}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^{9}\left(\frac{3}{4}\right)^{1} + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{0}$$

Άσκηση 3

Έστω η τυχαία μεταβλητή $X \sim N(-5, 4)$

α) Βρείτε την $P(X<0)$.

β) Βρείτε την $P(-7<X<-3)$.

γ) Βρείτε την $P(X>-3 \mid X>-5)$

Λύση

Η X είναι μια κανονική τυχαία μεταβλητή με μέσο $\mu=-5$ και τυπική απόκλιση $\sigma=\sqrt{4}=2$. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X είναι η $F_X(x)$. Αφού η X είναι κανονική τυχαία μεταβλητή, ακολουθώντας τη διαδικασία της τυποποίησης, μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραπάνω πιθανότητες χρησιμοποιώντας τις τιμές από τους πίνακες της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής $\Phi(\cdot)$ της τυπικής κανονικής κατανομής.

Επομένως, ισχύει ότι:

$$F_X(x) = P(X \le x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

όπου $\Phi(\cdot)$ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (cdf) της τυπικής κανονικής κατανομής.

Επομένως, έχουμε:

α) $$P(X<0) = P\left(\frac{X-(-5)}{2} < \frac{0-(-5)}{2}\right) = P\left(Z < \frac{5}{2}\right) = P(Z<2.5) =$$

$$= \Phi(2.5) = 0.9938$$

β) $$P(-7<X<-3) = P\left(\frac{-7-(-5)}{2} < \frac{X-(-5)}{2} < \frac{-3-(-5)}{2}\right) =$$

$$= P(-1<Z<1) = \Phi(1) - \Phi(-1) \overset{*}{=} \Phi(1) - (1-\Phi(1)) =$$

$$= 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826$$

(*) Γενικά ισχύει, $\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$ λόγω της συμμετρίας της $N(0,1)$ γύρω από το 0.

γ) $P(X>-3 \mid X>-5) = \dfrac{P(X>-3 \cap X>-5)}{P(X>-5)} = \dfrac{P(X>-3)}{P(X>-5)} =$

$= \dfrac{1-P(X\leq -3)}{1-P(X\leq -5)} = \dfrac{1-P\left(\frac{X-(-5)}{2} \leq \frac{-3-(-5)}{2}\right)}{1-P\left(\frac{X-(-5)}{2} \leq \frac{-5-(-5)}{2}\right)} =$

$= \dfrac{1-P(Z\leq 1)}{1-P(Z\leq 0)} = \dfrac{1-\Phi(1)}{1-\Phi(0)} = \dfrac{1-0.8413}{1-0.50} = 0.3174$