Φροντιστήριο

Ενότητα 1

Φυλλάδιο Ασκήσεων 1

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι:

(α) Αν $\emptyset$ είναι το αδύνατο ενδεχόμενο, ως προς το δειγματικό χώρο Ω, τότε: $P(\emptyset) = 0$

(β) Αν $A_i \subseteq \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι κατά ζεύγη ξένα (αμοιβαίως αποκλειόμενα) ενδεχόμενα, τότε:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

(γ) Αν A' είναι το συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου A, ως προς το δειγματικό χώρο Ω, τότε:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

(δ) Αν $A, B \subseteq \Omega$ είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα, τότε:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

(ε) Αν $A, B \subseteq \Omega$ είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα, τότε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

και

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

Λύση

Οι αποδείξεις των υποερωτημάτων βασίζονται στον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας.

(α) Θέτοντας $A_i = \emptyset$, $i=1,2,3,\dots$ έχουμε ότι
$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots = \emptyset$ και αφού
τα ενδεχόμενα A_i είναι κατά μείξη ξένα μεταξύ τους, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της αριθμήσιμης προσθετικότητας, συνάγουμε τη σχέση:

$$P(\emptyset) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) \overset{\text{προσθ.}}{=} P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots =$$
$$= P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots + P(\emptyset) + \dots \overset{*}{=} 0$$

άρα $P(\emptyset) = 0$

- Στο κενό σύνολο $\emptyset$ αποδίδεται μηδενική πιθανότητα από κάθε κατανομή πιθανότητας (καθολική ιδιότητα).

(*) Ξέρουμε ότι $\Omega = \Omega \cup \emptyset$ και $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$
άρα από την ιδιότητα της ικανοποίησης της συνάρτησης πιθανότητας έχουμε:

$$1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) \overset{\text{προσθ.}}{=} P(\Omega) + P(\emptyset) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = 1 + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$$

(β) Ας θεωρήσουμε και τα ενδεχόμενα $A_i = \emptyset$, $i = n+1, n+2, \dots$
Τότε χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της αριθμήσιμης προσθετικότητας από τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας και την απόδειξη του (α) υποερωτήματος συμπεραίνουμε ότι:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \dots) \overset{\text{προσθ.}}{=}$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + P(A_{n+1}) + P(A_{n+2}) + \dots \overset{(*)}{=}$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

(*) Αφού τα ενδεχόμενα A_i, για $i = n+1, n+2, \dots$ είναι τα αδύνατα ενδεχόμενα, έχουμε ότι: (από το ερώτημα (α))
$$P(A_{n+1}) = P(\emptyset) = 0$$
$$P(A_{n+2}) = P(\emptyset) = 0$$

άρα αποδείξαμε το ερώτημα (β).

(γ) Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα A και A', από τις ιδιότητες συμπληρώματος της θεωρίας συνόλων, είναι ξένα μεταξύ τους (αμοιβαίως αποκλειόμενα), δηλαδή ισχύει $A \cap A' = \emptyset$.
Επίσης, ξέρουμε ότι $A \cup A' = \Omega$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση που αποδείξαμε στο υποερώτημα (β) με $n = 2$ και την ιδιότητα της κανονικοποίησης ($P(\Omega) = 1$) από τον ορισμό της πιθανότητας έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cup A') \overset{\text{προσθ.}}{=} P(A) + P(A') \\ \text{όμως } A \cup A' = \Omega \text{ άρα } P(A \cup A') = P(\Omega) = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow P(A) + P(A') = P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$$

(δ) Από τη θεωρία συνόλων ξέρουμε ότι ισχύει : $A - B = A \cap B'$

Ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ μπορεί να εκφραστεί ως ένωση ξένων μεταξύ τους ενδεχομένων (χρησιμοποιώντας ένα βοηθητικό σύνολο B). Άρα, παρατηρούμε ότι:

$A = (A \cap B') \cup (A \cap B)$ όπου

$(A \cap B') \cap (A \cap B) = A \cap (B' \cap B) = A \cap \emptyset = \emptyset$ δηλαδή τα ενδεχόμενα $(A \cap B')$ και $(A \cap B)$ είναι ξένα μεταξύ τους

Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε:

$$P(A) = P((A \cap B') \cup (A \cap B)) \overset{\text{προσθ.}}{=\!=} P(A \cap B') + P(A \cap B)$$

όμως $A - B = A \cap B'$ άρα

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Επιπλέον, αν ισχύει ότι $\boxed{B \subseteq A}$, τότε από την παραπάνω σχέση που αποδείξαμε, παίρνουμε:

$P(A - B) = P(A) - P(B)$ αφού αν $B \subseteq A$ τότε $A \cap B = B$

άρα $P(A \cap B) = P(B)$

(ε) Παρατηρούμε ότι $A - B = A \cap B'$ και τα ενδεχόμενα $A \cap B'$ και B είναι ξένα μεταξύ τους, δηλαδή ισχύει $(A \cap B') \cap B = \emptyset$ και επίσης, παρατηρούμε ότι $(A \cap B') \cup B = A \cup B$

άρα $P(A \cup B) = P[(A \cap B') \cup B] \overset{\text{προσθ.}}{=} P(A \cap B') + P(B) \overset{\text{όμως } A-B=A\cap B'}{=}$
$= P(A-B) + P(B)$

όμως στο προηγούμενο ερώτημα (δ) αποδείξαμε ότι: $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$
άρα
$$P(A \cup B) = P(A-B) + P(B) \overset{(\delta)}{=} P(A) - P(A \cap B) + P(B) \Rightarrow$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Για την επόμενη απόδειξη, παρατηρούμε ότι από τους τύπους De Morgan ισχύει ότι: $A' \cap B' = (A \cup B)'$

άρα $P(A' \cap B') = P((A \cup B)') \overset{\text{από ερώτημα } (\gamma)}{=}$
$= 1 - P(A \cup B) \Rightarrow$ (από την παραπάνω σχέση που αποδείξαμε)
$$P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

• Για να βρούμε την πιθανότητα $\boxed{P(A'\cap B')}$, παρατηρούμε ότι

$A'\cap B' = (A\cup B)'$ από ιδιότητες De Morgan άρα

$$P(A'\cap B') = P\big((A\cup B)'\big) = 1 - P(A\cup B) = 1 - 0.95 = 0.05$$

Επομένως, αφού έχουμε υπολογίσει τις παραπάνω πιθανότητες έχουμε:

$$P(\Omega) = P(A\cap B) + P(A'\cap B) + P(A\cap B') + P(A'\cap B') =$$
$$= 0.75 + 0.05 + 0.15 + 0.05 = 1 \quad \underline{\text{ισχύει}}$$

καθώς από την δεύτερη ιδιότητα της συνάρτησης πιθανότητας την ιδιότητα της κανονικοποίησης $(P(\Omega)=1)$ ξέρουμε ότι στο βέβαιο (σίγουρο) ενδεχόμενο Ω αποδίδεται μοναδιαία πιθανότητα ώστε να είναι καλώς ορισμένη η συνάρτηση πιθανότητας.

Άσκηση 4

Ρίχνουμε 2 κανονικά ζάρια. Θα βρεθούν οι πιθανότητες των γεγονότων:

$A = \{$το άθροισμα των ενδείξεων είναι το πολύ 10$\}$
$B = \{$τα 2 ζάρια έχουν διαφορετικές ενδείξεις$\}$
$\Gamma = \{$τα 2 ζάρια έχουν ίδιες ενδείξεις$\}$

Λύση

Ο δειγματικός χώρος Ω είναι το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων των 2 ζαριών άρα

$$\Omega = \{(1.1), (1.2), (1.3), \ldots, (6.1), (6.2), (6.3), (6.4), (6.5), (6.6)\}$$

Τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου είναι ισοπίθανα, δηλαδή το καθένα από τα 36 στοιχειώδη ενδεχόμενα έχει την ίδια πιθανότητα $\frac{1}{36}$.

α) Θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου Α.
Παρατηρούμε ότι $A' = \{(5.6), (6.5), (6.6)\}$
άρα

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - P(\{(5.6), (6.5), (6.6)\}) = 1 - \frac{3}{36} = \frac{33}{36}$$

β) Για να βρούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου Β παρατηρούμε ότι
$B' = \{(1.1), (2.2), (3.3), (4.4), (5.5), (6.6)\}$
άρα

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

γ) Όμοια, για να βρούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ, παρατηρούμε ότι $B' = \Gamma$ άρα $P(\Gamma) = P(B') = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι αν τα ενδεχόμενα A, B, C είναι πλήρως ανεξάρτητα τότε τα A και $B \cup C$ είναι ανεξάρτητα.

Λύση

Πρέπει να δείξουμε ότι: $P(A \cap (B \cup C)) = P(A) \cdot P(B \cup C)$.

Αρχικά, ξέρουμε ότι αφού τα ενδεχόμενα A, B, C είναι πλήρως ανεξάρτητα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Επομένως, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
P(A \cap (B \cup C)) &= P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] = \\
&= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[(A \cap B) \cap (A \cap C)] = \\
&= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) = \\
&= P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \\
&= P(A)[P(B) + P(C) - P(B) \cdot P(C)] = \\
&= P(A)[P(B) + P(C) - P(B \cap C)] = P(A) \cdot P(B \cup C)
\end{aligned}$$

Η πρώτη ισότητα προκύπτει από την επιμεριστική ιδιότητα.
Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από τον προσθετικό νόμο, δηλαδή από την σχέση $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, όπου στην συγκεκριμένη άσκηση το A είναι το ενδεχόμενο $A \cap B$ και το B το ενδεχόμενο $A \cap C$.
Οι επόμενες ισότητες είναι συνέπεια της υπόθεσης ότι τα ενδεχόμενα A, B, C είναι πλήρως ανεξάρτητα οπότε χρησιμοποιούμε τις σχέσεις που ισχύουν σ'αυτή την περίπτωση.
Η τελευταία ισότητα προκύπτει πάλι κάνοντας χρήση του προσθετικού νόμου.

Άσκηση 5

Το 60% των νέων οδηγών έχουν οδηγική εκπαίδευση. Κατά την διάρκεια του πρώτου χρόνου, νέοι οδηγοί χωρίς οδηγική εκπαίδευση έχουν πιθανότητα 0.08 να έχουν ένα ατύχημα, αλλά νέοι οδηγοί με οδηγική εκπαίδευση έχουν μόνο 0.05 πιθανότητα να έχουν ατύχημα.
Ποια είναι η πιθανότητα ένας νέος οδηγός να έχει οδηγική εκπαίδευση δεδομένου ότι ο οδηγός δεν είχε ατύχημα τον πρώτο χρόνο?

Λύση

Ορίζουμε τα εξής ενδεχόμενα:
A : το ενδεχόμενο ο νέος οδηγός να έχει οδηγική εκπαίδευση
B : ο νέος οδηγός έχει ένα ατύχημα τον πρώτο χρόνο
Επομένως, A' (το συμπλήρωμα του ενδεχομένου A) είναι το ενδεχόμενο ο νέος οδηγός να μην έχει οδηγική εκπαίδευση και B' είναι το ενδεχόμενο ο νέος οδηγός δεν έχει ατύχημα τον πρώτο χρόνο.
Εμείς θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα ένας νέος οδηγός να έχει οδηγική εκπαίδευση δεδομένου ότι ο οδηγός δεν έχει ατύχημα τον πρώτο χρόνο, δηλαδή την πιθανότητα $P(A|B')$. Συνεπώς, έχουμε:

$$P(A|B') = \frac{P(A\cap B')}{P(B')} = \frac{P(B'|A)\cdot P(A)}{P(B'|A)\cdot P(A) + P(B'|A')\cdot P(A')} =$$

$$= \frac{[1-P(B|A)]\cdot P(A)}{[1-P(B|A)]\,P(A) + [1-P(B|A')]\cdot P(A')} =$$

$$= \frac{(1-0.05)\cdot 0.60}{(1-0.05)\cdot 0.60 + (1-0.08)\cdot 0.4} = \frac{0.57}{0.57+0.368} = 0.6077$$

Στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιούμε τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας και στην δεύτερη ισότητα το θεώρημα ολικής πιθανότητας.