ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΙΙ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Αν $A, B, \Gamma \subseteq \Omega$ είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα, τότε να αποδείξετε ότι

α) $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(AB) - P(A\Gamma) - P(B\Gamma) + P(AB\Gamma)$

β) $P(A'B'\Gamma') = 1 - P(A) - P(B) - P(\Gamma) + P(AB) + P(A\Gamma) + P(B\Gamma) - P(AB\Gamma)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) Με βάση τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων θα έχουμε

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup \Gamma) &= P((A \cup B) \cup \Gamma) = P(A \cup B) + P(\Gamma) - P(A \cap B \cap \Gamma) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) + P(\Gamma) - P((A\Gamma) \cup (B\Gamma)) \end{aligned}$$

Επειδή

$$P((A\Gamma) \cup (B\Gamma)) = P(A\Gamma) + P(B\Gamma) - P(AB\Gamma)$$

τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup \Gamma) &= P(A) + P(B) - P(AB) + P(\Gamma) - P((A\Gamma) \cup (B\Gamma)) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) + P(\Gamma) - [P(A\Gamma) + P(B\Gamma) - P(AB\Gamma)] \\ &= P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(AB) - P(A\Gamma) - P(B\Gamma) + P(AB\Gamma). \end{aligned}$$

β) Είναι

$$\begin{aligned} P(A'B'\Gamma') &= P(A \cup B \cup \Gamma)^{'} = 1 - P(A \cup B \cup \Gamma) \\ &= 1 - []P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(AB) - P(A\Gamma) - P(B\Gamma) + P(AB\Gamma) \\ &= 1 - P(A) - P(B) - P(\Gamma) + P(AB) + P(A\Gamma) + P(B\Gamma) - P(AB\Gamma). \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Σε ένα κτήριο έχει εγκατασταθεί ένα σύστημα συναγερμού. Σύμφωνα με τις προδιαγραφές του κατασκευαστή, όταν παρουσιασθεί κατάσταση έκτακτης ανάγκης ο συναγερμός χτυπά με πιθανότητα 0,90, ενώ χτυπά και όταν δεν παρουσιάζεται κατάσταση έκτακτης ανάγκης με πιθανότητα 0,01. Επίσης, από παλιότερα δεδομένα έχει εκτιμηθεί ότι η πιθανότητα να παρουσιασθεί στο κτήριο κατάσταση έκτακτης ανάγκης είναι 0,002. Αν ο συναγερμός μόλις χτύπησε, ποια είναι η πιθανότητα να έχει πράγματι παρουσιασθεί κατάσταση έκτακτης ανάγκης;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Έστω τα παρακάτω τα ενδεχόμενα:

A: Ο συναγερμός χτυπάει

B: Στο κτήριο έχει παρουσιασθεί κατάσταση έκτακτης ανάγκης.

Δίνεται ότι $P(B) = 0,002$, δηλαδή, είναι γνωστή η εκ των προτέρων πιθανότητα $P(B)$ να παρουσιασθεί κατάσταση έκτακτης ανάγκης και ζητείται να υπολογίσουμε την εκ των υστέρων πιθανότητα $P(B|A)$, δηλαδή την πιθανότητα να έχει παρουσιασθεί κατάσταση έκτακτης ανάγκης δοθέντος ότι χτύπησε ο συναγερμός στο κτήριο. Επίσης έχουμε ότι $P(A|B) = 0,90$ και $P(A|B') = 0,01$.

Από το θεώρημα του Bayes έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(B \mid A) &= \frac{P(A \mid B)P(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B)P(B)} = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A|B)\Pi(B) + \Pi(A|B')P(B')} \\ &= \frac{0,90 \cdot 0.002}{0,90 \cdot 0,002 + 0,1 \cdot 0,998} \end{aligned}$$

Δηλαδή, η πιθανότητα να χτύπησε ο συναγερμός επειδή υπάρχει κατάσταση έκτακτης ανάγκης, είναι 15,28%.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Μια εταιρεία διαχειρίζεται τρία διαφορετικά αμοιβαία κεφάλαια. Έστω A_i το γεγονός στο οποίο αυξάνεται το $i, i = 1,2,3$ αμοιβαίο κεφάλαιο σε αξία σε μια δεδομένη ημέρα. Οι πιθανότητες διαφόρων γεγονότων που σχετίζονται στα αμοιβαία κεφάλαια δίνονται ως εξής:

$$\begin{aligned} &P(A_1) = 0,55,\ P(A_2) = 0,6,\ P(A_3) = 0,45,\ P(A_1 \cup A_2) = 0,82 \\ &P(A_1 \cup A_3) = 0,7525,\ P(A_2 \cup A_3) = 0,78,\ P(A_2 \cap A_3|A_1) = 0,2 \end{aligned}$$

α) Είναι τα γεγονότα A_1, A_2, A_3 ανά ζεύγη ανεξάρτητα;

β) Είναι ανεξάρτητα τα γεγονότα A_1, A_2 και A_3;

γ) Ποια είναι η πιθανότητα τα αμοιβαία κεφάλαια 1 και 2 να αυξήσουν και τα δύο την αξία τους, δεδομένου ότι στο αμοιβαίο κεφάλαιο 3 αυξάνεται η αξία του; Είναι αυτή η πιθανότητα διαφορετική από την μη δεσμευμένη πιθανότητα ότι τα κεφάλαια 1 και 2 αυξάνονται σε αξία;

δ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι τουλάχιστον ένα αμοιβαίο κεφάλαιο θα αυξηθεί σε αξία μια δεδομένη ημέρα;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:
α) Είναι

$$
\begin{aligned}
& P(A_1^{'} \cap A_2^{'}) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = 1 - 0,82 = 0,18 \\
\text{και} \quad & P(A_1^{'})P(A_2^{'}) = 0,45 \times 0,4 = 0,18 \\
& P(A_1^{'} \cap A_3^{'}) = 1 - P(A_1 \cup A_3) = 1 - 0,7525 = 0,2475 \\
\text{και} \quad & P(A_1^{'})P(A_3^{'}) = 0,45 \times 0.55 = 0.2475 \\
& P(A_2^{'} \cap P(A_3^{'}) = 1 - P(A_2 \cup A_3) = 1 - 0.78 = 0.22 \\
\text{και} \quad & P(A_2^{'})P(A_3^{'}) = 0,4 \times 0,55 = 0,22
\end{aligned}
$$

Επομένως θα ισχύει ότι τα ενδεχόμενα $A_1^{'},\ A_2^{'},\ A_3^{'}$ είναι ανεξάρτητα ανά δύο μεταξύ τους καθώς και ότι (βλέπε διαφάνειες *Lecture_*1 σελ. 51) τα ενδεχόμενα $A_1,\ A_2,\ A_3$ είναι ανεξάρτητα ανά δύο μεταξύ τους το οποίο είναι το ζητούμενο.
β) Είναι

$$P(A_2 \cap A_3 | A_1) = 0,2$$

και

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cup A_3) = 0,6 + 0,45 - 0,78 = 0,27$$

Επομένως

$$P(A_2 \cap A_3 | A_1) \neq P(A_2 \cap A_3)$$

δηλαδή οι δεσμευμένες και μη δεσμευμένες πιθανότητες είναι διαφορετικές άρα τα ενδεχόμενα δεν είναι ανεξάρτητα.
γ) Η πιθανότητα τα αμοιβαία κεφάλαια 1 και 2 να αυξήσουν και τα δύο την αξία τους, δεδομένου ότι στο αμοιβαίο κεφάλαιο 3 αυξάνεται η αξία του υπολογίζεται ως εξής

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2 | A_3) &= \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{P(A_2 \cap A_3 | A_1)P(A_1)}{P(A_3)} \\
&= \frac{0,2 \times 0,55}{0,45} = 0,244
\end{aligned}
$$

Η μη δεσμευμένη πιθανότητα ότι τα κεφάλαια 1 και 2 αυξάνονται σε αξία είναι $P(A_1 \cap A_2) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = 1 - 0,82 = 0,18$. Είναι

$$P(A_1 \cap A_2 | A_3) \neq P(A_1 \cap A_2).$$

δ) Είναι

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) \\
&- P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\
&= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - [P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2] \\
&- [P(A_1) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_3] - [P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3] \\
&+ P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\
&= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) + P(A_1 \cup A_2) + P(A_2 \cup A_3) P(A_1 \cup A_3) \\
&- P(A_1) - P(A_2) - P(A_3) \\
&= 0,11 + 0,82 + 0,78 + 0,7525 - 0,55 - 0,6 - 0,45 = 0,8625
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Η ZAP Electric Co. κατασκευάζει διακόπτες ηλεκτρικού κυκλώματος. Οι διακόπτες κυκλώματος παράγονται σε δύο διαφορετικές γραμμές συναρμολόγησης στο εργοστάσιο της εταιρείας. Η γραμμή συναρμολόγησης I είναι εξαιρετικά αυτοματοποιημένη και παράγει το 85% της παραγωγής του εργοστασίου. Η γραμμή συναρμολόγησης II χρησιμοποιεί παλαιότερη τεχνολογία και παράγει το 15% της παραγωγής του εργοστασίου. Η πιθανότητα ότι ένας διακόπτης που κατασκευάζεται στη γραμμή συναρμολόγησης I είναι ελαττωματικός είναι ίση με $0,04$ ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα για τη γραμμή συναρμολόγησης II είναι $0,01$. Επίσης η εταιρεία χρησιμοποιεί μια συσκευή ελέγχου για τον προσδιορισμό του εάν ένας διακόπτης είναι ελαττωματικός. Ξέρουμε ότι

$$P(A|B) = P(A'|B') = 0,985,$$

όπου A είναι το γεγονός που η συσκευή ελέγχου υποδεικνύει ότι ένας διακόπτης είναι ελαττωματικός και B είναι το γεγονός που ο διακόπτης είναι πραγματικά ελαττωματικός.

1) Εάν ένας διακόπτης κυκλώματος επιλέγεται τυχαία από έναν κάδο που περιέχει την παραγωγή μιας ημέρας και ο διακόπτης είναι πραγματικά ελαττωματικός, ποια είναι η πιθανότητα ότι κατασκευάστηκε στη γραμμή συναρμολόγησης II;

2) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η συσκευή ελέγχου υποδεικνύει ότι ένας διακόπτης κυκλώματος δεν είναι ελαττωματικός, δεδομένου ότι ο διακόπτης κυκλώματος είναι πραγματικά ελαττωματικός;

3) Εάν η συσκευή ελέγχου εφαρμόζεται σε διακόπτες κυκλώματος που παράγονται στη γραμμή συναρμολόγησης I, ποια είναι η πιθανότητα ότι ένας διακόπτης κυκλώματος είναι πραγματικά ελαττωματικός, δεδομένου ότι η συσκευή ελέγχου υποδεικνύει ότι ο διακόπτης είναι ελαττωματικός; Θα λέγατε ότι αυτή είναι μια καλή συσκευή ελέγχου;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:
Από τα δεδομένα του προβλήματος είναι

$$P(B|I) = 0,04, P(B|II) = 0,01$$

και

$$P(II) = 1 - P(I) = 1 - 0,85 = 0,15.$$

1) Η πιθανότητα ότι κατασκευάστηκε στη γραμμή συναρμολόγησης II με βάση τον κανόνα του Bayes, είναι

$$\begin{aligned} P(II|B) &= \frac{P(B|II)P(II)}{P(B|II)P(II) + P(B|I)P(I)} \\ &= \frac{0,01 \times 0,15}{0,01 \times 0,15 + 0,04 \times 0,85} \\ &= 0.4225. \end{aligned}$$

2) Η πιθανότητα ότι η συσκευή ελέγχου υποδεικνύει ότι ένας διακόπτης κυκλώματος δεν είναι ελαττωματικός, δεδομένου ότι ο διακόπτης κυκλώματος είναι πραγματικά ελαττωματικός είναι

$$P(A'|B) = 1 - P(A|B) = 1 - 0,985$$

3) Η πιθανότητα ότι ένας διακόπτης είναι πράγματι ελαττωματικός, δεδομένου ότι η η συσκευή ελέγχου υποδεικνύει ότι ο διακόπτης είναι ελαττωματικός με βάση τον κανόνα του Bayes,είναι

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')} \\ &= \frac{0,985 \times 0,04}{0,985 \times 0,04 + 0,015 \times 0,96} \\ &= 0,73234. \end{aligned}$$

Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα συμπεραίνουμε ότι η συσκευή ελέγχου δεν είναι τόσο ακριβής.