

Κατανομή Συνάρτησης τυχαίας μεταβλητής

Έστω η τ.μ. Y η οποία είναι συνάρτηση της τ.μ. X ,
δηλαδή

$$Y = g(X)$$

Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την κατανομή της τ.μ.
 Y , συνήθως στην περίπτωση που οι τ.μ. X, Y είναι
συνεχείς.

Έστω η συνάρτηση g για την οποία ισχύουν τα
παρακάτω

- ▶ Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη
- ▶ Η $g(x)$ είναι είναι μια αυστηρά μονότονη
συνάρτηση, δηλαδή για $x_1 < x_2$ ισχύει ότι
 $g(x_1) < g(x_2)$.

Η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. Y θα είναι

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{f_X(x_1)}{g'(x_1)} = f_X(x_1) \cdot \frac{dx_1}{dy}, & \text{όπου } g(x_1) = y \\ 0, & \text{αν } g(x) = y \text{ δεν έχει λύση} \end{cases}$$

Αφού η συνάρτηση g είναι αυστηρά αύξουσα, τότε για κάθε $y \in R_Y$ υπάρχει μοναδική τιμή x_1 τέτοια ώστε $g(x_1) = y$ και μπορούμε να γράψουμε $x_1 = g^{-1}(y)$.

Είναι

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(g(X) \leq y) \\ &= P(X < g^{-1}(y)) \quad \text{αφού η } g \text{ είναι αυστηρά αύξουσα} \\ &= F_X(g^{-1}(y)). \end{aligned}$$

Για να βρούμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y θα έχουμε

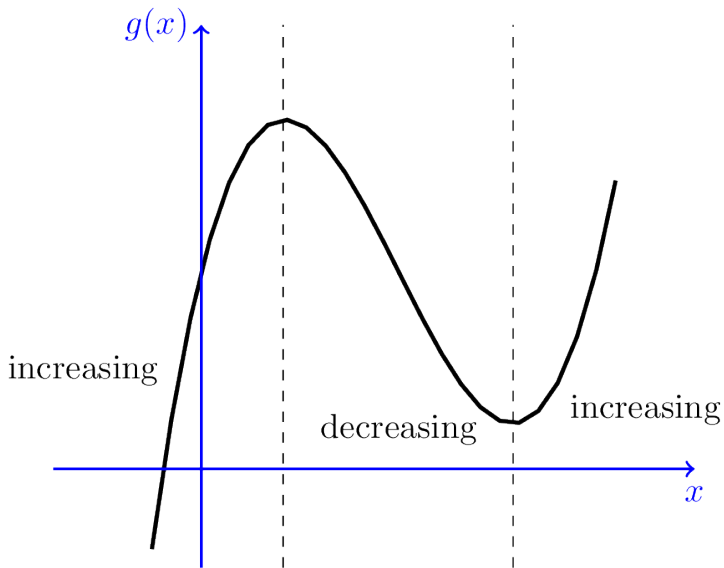
$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \frac{d}{dy}F_X(x_1) && \text{όπου } g(x_1) = y \\ &= \frac{dx_1}{dy} \cdot F'_X(x_1) \\ &= f_X(x_1) \frac{dx_1}{dy} \\ &= \frac{f_X(x_1)}{g'(x_1)} && \text{αφού } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.\end{aligned}$$

Σημείωση: Στην περίπτωση που η g είναι αυστηρά φθίνουσα τότε $g'(x_1) < 0$ και χρησιμοποιούμε την $|g'(x_1)|$.

Θεώρημα:

Έστω η συνεχής τ.μ. X και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αυστηρά μονότονη παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω ότι $Y = g(X)$, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y θα είναι

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = f_X(x_1) \cdot \left| \frac{dx_1}{dy} \right| & \text{με } g(x_1) = y \\ 0 & \text{αν η } g(x) = y \text{ δεν έχει λύση} \end{cases}$$



Θεώρημα:

Έστω η συνεχής τ.μ. X με πεδίο τιμών R_X και $Y = g(X)$. Υποθέτουμε ότι μπορούμε να διαμερίσουμε τον χώρο R_X σε ένα πεπερασμένο αριθμό διαστημάτων τέτοια ώστε η $g(x)$ να είναι αυστηρά μονότονη και παραγωγίσιμη σε καθένα από αυτά. Τότε η σ.π.π της Y είναι

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^n \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} = \sum_{i=1}^n f_X(x_i) \cdot \left| \frac{dx_i}{dy} \right|$$

όπου x_1, x_2, \dots, x_n είναι πραγματικές λύσεις της $g(x) = y$.

Παρατήρηση:

Έστω η τ.μ. X είναι μια συνεχής τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας $f(x), x \in R_x$. Τότε η $Y = \alpha X + \beta, \alpha \neq 0$ είναι μια συνεχής τ.μ. με σ.π.π.

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y - \beta}{\alpha}\right) \frac{1}{|\alpha|}, y \in R_y$$