

φορείς συνεισώ, Στοιβαχωστρίβιηη (ως προς θ), $\forall \theta \in \Theta$.

— έχουμε έτσι ως προς το διανυσμα score (score vector) της

$$l_n(\theta) \text{ που ορίζεται ως } s_n(\theta) := \frac{\partial l_n(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln p(z(i), x(i), \theta)$$

↓ διαστ $p \times 1$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln p(z(i), x(i), \theta)}{\partial \theta}$$

$$\left\{ \dots \right\} \frac{\partial}{\partial b} \underbrace{\prod_{i=1}^n P(z^{(i)}, x^{(i)}, b)}_f \downarrow z^{(1)} \dots \downarrow z^{(n)} = 0_{px} \quad \forall b \in \Theta \quad (*)$$

— Παρατήρηση: Αν η $f(b)$ παρ. ως προς b κ' $\exists \pi_{\text{max}}$

$$\frac{\partial \ln f(b)}{\partial b} = \frac{1}{f(b)} \frac{\partial f(b)}{\partial b} \Leftrightarrow \frac{\partial f(b)}{\partial b} = f(b) \frac{\partial \ln f(b)}{\partial b}$$

Στοιχείων αν $f(\theta) = \prod_{i=1}^n p(z(i), x(i), \theta)$ έχουμε ότι

$$(*) \Rightarrow \int_{\mathcal{Z}} \frac{\partial \ln \prod_{i=1}^n p(z(i), x(i), \theta)}{\partial \theta} \prod_{i=1}^n p(z(i), x(i), \theta) dz(1) \dots dz(n) = O_n \times 1, \forall \theta \in \Theta$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{Z}} \left(\frac{\partial \sum_{i=1}^n \ln p(z(i), x(i), \theta)}{\partial \theta} \right) \prod_{i=1}^n p(z(i), x(i), \theta) dz(1) \dots dz(n) = O_{p \times 1} \sqrt{n} \quad \text{✓} \quad \text{⊖}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{Z}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln p(z(i), x(i), \theta)}{\partial \theta} \right) \prod_{i=1}^n p(z(i), x(i), \theta) dz(1) \dots dz(n) = O_{p \times 1} \quad \forall \theta \in \Theta$$

Ποσ. $y \in 1/n$
 $\Rightarrow$

$$\left(\dots \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^r \mathcal{O}_b p(z^{(i)}, x^{(i)}, b) \right)$$

$$\prod_{i=1}^r p(z^{(i)}, x^{(i)}, b) \downarrow z^{(1)} \dots \downarrow z^{(r)} = \mathcal{O}_{px}, \forall b \in \mathcal{B}$$

||

$s_n(b)$

$$\Leftarrow \left(\dots \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^r \mathcal{O}_b p(z^{(i)}, x^{(i)}, b) \right)$$

$$\prod_{i=1}^r \mathcal{O}_b p(z^{(i)}, x^{(i)}, b) \downarrow z^{(1)} \dots \downarrow z^{(r)} = \mathcal{O}_{px}, \forall b \in \mathcal{B}$$

$b = b_0$

$$\mathbb{E}_{b_0}(s_n(b_0)) = \mathcal{O}_{px}$$

αναμενόμενη τιμή
 ως προς την από κοινού
 κατανομή του δείγματος που
 αντλίζεται στο $\mathcal{B}$

$$= \mathbb{E} \left[\frac{\mathbb{E}(Y_{ii} | X_{ii}) - \phi(X_{ii} \beta_0)}{\phi(X_{ii} \beta_0) (1 - \phi(X_{ii} \beta_0))} \phi(X_{ii} \beta_0) X_{ii}' \right] =$$

$$Y_{ii} | X_{ii} \sim \text{Ber}(\phi(X_{ii} \beta_0)) \quad \text{ΠΙΟ ΨΕΥΔΗΣ} \quad \mathbb{E}(Y_{ii} | X_{ii}) = \phi(X_{ii} \beta_0)$$

$$= \mathbb{E} \left(0 \phi(X_{ii} \beta_0) X_{ii}' \right) = \mathbf{0}_{p \times 1} \quad \square$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_b \left[H_n(b) \right] + \mathbb{E}_b \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln p(z_{(i)}, x_{(i)}, b)}{\partial b} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln p(z_{(i)}, x_{(i)}, b)}{\partial b'} \right]$$

$= \mathcal{O}_{p \times p} \quad \forall b \in \mathcal{B}$, σύμφωνα για $b = b_0$ έχουμε

$$\mathbb{E}_{b_0} [H_n(b_0)] + \underbrace{\mathbb{E}_{b_0} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln p(z_{(i)}, x_{(i)}, b_0)}{\partial b} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln p(z_{(i)}, x_{(i)}, b_0)}{\partial b'} \right]}_{\mathcal{B}}$$

$= \mathcal{O}_{p \times p}$

- Παρατηρούμε ότι $\mathbb{E}_{b_0}(\sqrt{n} S_n(b_0)) = \sqrt{n} \mathbb{E}_{b_0}(S_n(b_0)) = \sqrt{n} O_{px1} = O_{px1}$

- Στοιχείως $\text{Var}_{b_0}[\sqrt{n} S_n(b_0)] = \mathbb{E}\left(n S_n(b_0) S_n'(b_0)\right)$

$$= n \mathbb{E}_{b_0} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln p(z(i), x(i), b_0)}{\partial b} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln p(z(i), x(i), b_0)}{\partial \theta'} \right]$$

$$= \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln p(z(i), x(i), b_0)}{\partial b} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln p(z(i), x(i), b_0)}{\partial \theta'} \right] \quad \text{που υπό την}$$

υπόθεση της ανεξαρτησίας είναι η απλοποιημένη έκδοση της προηγούμενης ισότητας.

Έχουμε ότι η (***) εστιασμός του ΛΙΕ μπορεί να γραφτεί ως

$$\mathbb{E}_{b_0} \left[\mathbb{E} \left[\frac{(Y_{i1} - \Phi(X_{i1}b_0))^2}{\Phi^2(X_{i1}b_0)(1-\Phi(X_{i1}b_0))} \cdot \frac{\varphi^2(X_{i1}b_0)}{X_{i1}'X_{i1}} \right] \right]$$

↳ μεταρρύθμιση ως προς X_{i1}
 ή $\mathbb{E}(\cdot / X_{i1})$ το αναμεταρρύθμιζε
 ως σταθερά

$$= \mathbb{E}_{b_0} \left[\underbrace{\mathbb{E} \left[(Y_{i1} - \Phi(X_{i1}b_0))^2 / X_{i1} \right]}_{\Delta} \cdot \frac{\varphi^2(X_{i1}b_0)}{\Phi^2(X_{i1}b_0)(1-\Phi(X_{i1}b_0))} X_{i1}'X_{i1} \right]$$

$$i \quad Y_{i1} / X_{i1} \sim \text{Ber}(\Phi(X_{i1}b_0))$$

$$\Rightarrow \Delta = \Phi(X_{i1}b_0)(1-\Phi(X_{i1}b_0))$$

Επαγωγώς ζήτημα

$$\text{Var}_{b_0}(\sqrt{n} S_n(b_0)) = E_{b_0} \left[\frac{\varphi^2(x_{i1}b_0)}{\Phi^3(x_{i1}b_0)(1-\Phi(x_{i1}b_0))^2} x_{i1}' x_{i1} \right] \quad (\Delta)$$

Ανν. να βρεθεί η H_n κ' να δείξει ότι $E_{b_0}(H_n(b_0)) = (\Delta)$ [Στοιχείων 16x5 κ' 16x5 της Νίκας Πληροφοριών]

Υπόσ. χρησιμοποιήστε τον LIE κ' το ότι $E \left(\frac{y_{i1} - \Phi(x_{i1}b_0)}{x_{i1}} \right) = 0$. $\square$

-Συνεπώς υπό τις σχετικές συνθήκες (υψηλή εφελδύευση, ομοιογένεια, ανεξορτησία, κ.ο.κ.)

ο MLE για το Probit ικανοποιεί την ασυμπτωτική γος θεωρία κ' επιτυγχάνει το φράγμα

Cramer-Rao.