

Σύντομη υπενθύμιση:

— Για τηλέγια του γραμμικού υποδείγματος $Y(i) = X(i)b_0 + \varepsilon(i)$, $i=1, \dots, n$

υπάρχουν οργανικές μεταβλητές που συσχετίζουν την μήτρα Z_n ($n \times q$, $q \geq p$)

για την οποία ισχύει $E(Z_n' Z_n) = Q_{q \times q}$.

— Για τηλέγια του παρατίμου κ' αν δίδουμε $g(Y(i), X(i), Z(i), b) =$

$= Z(i)' (Y(i) - X(i)b)$ κ' δεδομένης της επιλογής της δευτέρας εξισώσεως $q \times q$ μήτρας σταθμών ω , ο εκτιμητής IV ορίζεται από το πρόβλημα:

$$b_n \in \underset{b \in \Theta}{\operatorname{argmin}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(v(i), x(i), z(i), b) \right)' \omega \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(v(i), x(i), z(i), b) \right)$$

- $\forall$ τις υποδείξεις που έχουμε ναυτε (υποτίθεται ότι τα τυχαία στοιχεία $(x(i), z(i), \varepsilon(i))$ είναι iid ως προς i) έχουμε στην το εφής:

$$- \alpha \quad A := \mathbb{E} \left(\begin{matrix} z(i) \\ x(i) \end{matrix} \right) \quad (q \times p)$$

$$- \alpha \quad V := \mathbb{E} \left(\begin{matrix} \varepsilon(i) \\ z(i) \end{matrix} \right) \begin{matrix} \varepsilon(i) \\ z(i) \end{matrix}'$$

$$\text{ισχύει} \quad \sqrt{n} (b_n - b_0) \xrightarrow{d} N \left(0_{p \times 1}, (A' \omega A)^{-1} A' \omega V \omega A (A' \omega A)^{-1} \right)$$

- Σφόδρα η ω είναι κρίσιμη οριότητα, η επιλογή της δευ επηρεάζει την συνέπεια, του ρυθμού σύγκλισης & την ασυμπτωτική ακριβεία.

Επηρεάζει την ασυμπτωτική διακρίνουσα. (τις φορές προκύπτει το ερώτημα του πως μπορούμε να την επιλέξουμε ώστε η ασυμπτωτική διακρίνουσα είναι η "βελτιστή δυνατή". (τι σημαίνει "βελτιστή δυνατή" για ψ ή ψ^* ;))

- Όταν $p=q$ έχουμε ότι η ασυμπτωτική διακρίνουσα δευ εξαρτάται από την ω & ισχύει $A^{-1} V (A')^{-1} = (A' V^{-1} A)^{-1}$

Παρατήρηση: η ασυμπτωτική θεωρία ισχύει αυτόματα ακόμη και

αν επιτρεπεται στον χώρο στοιχείων που επιλέγουμε να είναι στοχαστική

(π.χ. να εξαρτάται από το δείγμα) ή να εξαρτάται από το n . Αν συζητούμε

για τέτοια επιλογή με W_n τότε ο εκτιμητής μας θα ορίζεται αναλόγως

ως $\hat{\theta}_n \in \argmin_{\theta \in \Theta} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(V_i, X_i, Z_i, \theta) \right) W_n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(V_i, X_i, Z_i, \theta) \right)$

ή εφύσον $W_n \xrightarrow{P} W$ (ή στοχαστική D. op. χώρος), θα τα παραπύσω ισχύουν αυτόματα
[π.χ. χρησιμοποιήστε το ή το lemma του Slutsky στο ελαχιστό αδ. **αποκρούς**).

— Α, δίνει ποιά θα ήταν η μορφή της αβυσπτωτικής διασύνταξης αν

δίνουμε $\omega = V^{-1}$ (μπορούμε αφού βάσει των υποθέσεων μας η V είναι αντιστρέψιμη και ότι η V^{-1} δετ. ορίζεται αφού η V δετ. ορίζεται ως αντιστρέψιμη μήτρα διασύνταξης).

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} & \left(A' V^{-1} A \right)^{-1} A' V^{-1} V V^{-1} A \left(A' V^{-1} A \right)^{-1} \\ &= \left(A' V^{-1} A \right)^{-1} \left(A' V^{-1} A \right) \left(A' V^{-1} A \right)^{-1} = \left(A' V^{-1} A \right)^{-1} \end{aligned}$$

Ισχυρισμός:

$$(A' \omega A)^{-1} A' \omega V^{-1} \omega A (A' \omega A)^{-1} = (A' V^{-1} A)^{-1} \text{ είναι}$$

Πρέπει να ισχύει, κι συνεπώς η $\omega = V^{-1}$ είναι η βέλτιστη επιλογή.

- Απόδειξη: πρέπει να δείξουμε ότι η

$$\begin{aligned} B &= (A' \omega A)^{-1} A' \omega V^{-1} \omega A (A' \omega A)^{-1} = (A' V^{-1} A)^{-1} A' V^{-1} V V^{-1} A (A' V^{-1} A)^{-1} \text{ είναι} \\ &\parallel \\ &L L' \end{aligned}$$

Πρέπει να ισχύει

Υπενθύμιση:

- για να δείξω ότι η B είναι θετικά ημιορισμένη, αρκεί να βρω

L_* τέτοια ώστε $B = L_* L_*'$ αφού

αν $x \in \mathbb{R}^p$ τότε $x' B x = x' L_* L_*' x =$ το άθροισμα των

Τετραγώνων των στοιχείων του διανύσματος $L_*' x \geq 0$.

Παραδοξότητα

(Cholesky

- η V δετ. ορισμένη $\Leftrightarrow$ $\exists$ μοναδική κυλιωπριχατηνη $L : V = L L'$

$$\begin{aligned} \text{Ορίζουμε ως } L^* &:= (A' \omega A)^{-1} A' \omega L - (A' v^{-1} A)^{-1} A' v^{-1} L \\ &= \left[(A' \omega A)^{-1} A' \omega - (A' v^{-1} A)^{-1} A' v^{-1} \right] L \end{aligned}$$

Θα έχουμε ότι $L^* L^*$

$$\begin{aligned} &\left[(A' \omega A)^{-1} A' \omega - (A' v^{-1} A)^{-1} A' v^{-1} \right] L L' \left[\omega A (A' \omega A)^{-1} - v^{-1} A (A' v^{-1} A)^{-1} \right] \\ &= \dots = B \end{aligned}$$

Προκειμένου να κατασκευάσουμε έναν συνεπή ευρετησίον για την V (ή
άρα και για την V^{-1}) θα χρειαζόμαστε κατάλοιπα, αφού τα $\mathbb{F}_n$ δεν είναι παρατηρήσιμα.

Πα να κατασκευάσουμε κατάλοιπα, χρειαζόμαστε έναν πρότερο συνεπή ευρετησίον για το $\mathbb{Q}$.

Μπορούμε σε ένα πρώτο στάδιο να αποκτήσουμε έναν τέτοιο εφάγοντας τον $\mathbb{I}\mathbb{N}\mathbb{E}$

για $W = \mathbb{I}\mathbb{Q}\mathbb{Q}$ (ή όπως ήγη ο ορ. παρατηρήσιμη υπόθεση). Σπουδαίως

αποκτούμε για διαδικασία ευρετησίωσης σε τουλάχιστον δύο στάδια:

- Υπό τις προϋποθέσεις μας μαζί με κάποιες παρατηρήσεις για την ύπαρξη αλτιμων ροτιων, θα έχουμε ότι επειδή $(\beta_n \xrightarrow{P} \beta_0)$, $V_n \xrightarrow{P} V$ κι συνεπώς $V_n^{-1} \xrightarrow{P} V^{-1}$.

2^ο στάδιο, εφάρμοζουμε τον τελεστή μας συνεπώς $\beta_n^{(2)}$ από το πρόβλημα

βελτιστοποίησης $\beta_n^{(2)} \in \arg \min_{\beta \in \Theta} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(y(i), x(i), z(i), \beta) \right)' \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e(i)^2 z(i) z(i)' \right)^{-1}$.

Υπό τις παραπάνω προϋποθέσεις η δομηπρωτική του διακύμανση είναι $(A' V^{-1} A)^{-1}$.

Παρατηρήσεις:

1. Το προηγούμενο είναι επιτεταγμένο σε k -στάδια, $k \geq 2$

Στο στάδιο $k-1$ κατασκευάζουμε τον $\theta_n^{(k-1)}$, κατασκευάζουμε τα $e_{(i)} = y_{(i)} - x_{(i)} \theta_n^{(k-1)}$
κατασκευάζουμε τον $\hat{V}_n$ βάσει των $e_{(i)}$ επιδιόρθωση στο επόμενο στάδιο.

2. Είναι δυνατή η κατασκευή του UIVE (continuously updated IVE)
που ορίζεται από:

$$\theta_n^{(k)} \in \underset{\theta \in (-)}{\operatorname{argmin}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(y_{(i)}, x_{(i)}, z_{(i)}, \theta) \right)' \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{(i)} - x_{(i)} \theta) z_{(i)}' z_{(i)} \right)^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(y_{(i)}, x_{(i)}, z_{(i)}, \theta) \right)$$

Αποδεικνύεται ότι και αυτός θα έχει ως αβυσπωμακή διακρίφανη τnv $(A'v^{-1}A)^{-1}$

(ορίζεται όπως μέσω ενός πιο περιηγικού προβλήματος λεξικοποίησης)

— Οι παραπάνω ερωχές είναι αβυσπωμακή ισοδύναμοι εταυνητές,

διαφέρουν όμως ως προς πιο ενεργητικές αβυσπωμακές ιδιότητες που S_{ew}
έχουμε μετρήσει.

Τελειώτερα: Είναι δυνατόν να έχουμε σταθεζόμενα οπιοδείγματα (που δεν εγείνουν

αναγκαστικά γραμμικές σχέσεις) που έχουν στην βάση τους συνδυασμούς ποτών

της μορφής $\Pi(h(z(i), b)) = O_{q \times 1}$ & οι αναμενόμενες τιμές

να προσεγγίζονται από τα εμπειρικά τους ανάλογα: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(z(i), b)$ &

επιλέγοντας υπέρ σταθμισ, έστω W_h , μπορούμε να κατασκευάσουμε ευρετήριο

για το b_0 , δηλ $\underset{b \in \Theta}{\operatorname{argmin}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(z(i), b) \right)' W_h \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(z(i), b) \right)$

ο $\ln$ αναφέρεται ευθείως της γενικεύσης δεδομένων που.

- Ο $\ln$ είναι ειδική περίπτωση.

- Ένα ακόμη παράδειγμα (π.χ. γραμμικό $\ln$)

$$V(i) = \exp(X(i)\theta) + \epsilon(i) \quad \text{κ} \quad E(\epsilon(i)) = 0 \quad \forall i=1, \dots, n$$

κ το εγχειρίδιο ανάλυσης τους (π.χ.

66 αυθαίρετο θ) είναι το

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon(i) (V(i) - \exp(X(i)\theta))$$

ψ του
αξιότιμο
 θ_n

$$E(\epsilon(i) (V(i) - \exp(X(i)\theta))) = 0$$

$$\ln \argmin_{\theta \in \Theta} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon(i) (V(i) - \exp(X(i)\theta)) \right) \Big| \mathcal{W}_n$$