ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

1. Εισαγωγή

Ορισμένες εξισώσεις επιδέχονται αναλυτική λύση ως προς x. Για παράδειγμα, η γραμμική εξίσωση:

$$ax + b = 0$$

ή η τετραγωνική εξίσωση:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Υπάρχουν ωστόσο αρκετές εξισώσεις που δεν είναι δυνατόν να επιλυθούν αναλυτικά. Στη γενική μορφή τους, οι εξισώσεις αυτές γράφονται ως:

$$f(x) = 0$$

Σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε μια ρίζα x^* τέτοια ώστε $f(x^*) = 0$. Τέτοιες εξισώσεις είναι δυνατόν να λυθούν αριθμητικά με την λεγόμενη επανάληψη Newton.

2. Επανάληψη Newton (Newton-Raphson)

Η διαδικασία ξεκινά με μια αρχική εκτίμηση x_0 για την ρίζα. Η εκτίμηση αναθεωρείται διαδοχικά από x_0 σε x_1, από x_1 σε x_2 κ.ο.κ., σύμφωνα με το επαναληπτικό σχήμα:

$$x_{\mathrm{i}+1} = x_{\mathrm{i}} - \frac{f(x_{\mathrm{i}})}{f'(x_{\mathrm{i}})}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Τερματίζουμε τη διαδικασία όταν η μεταβολή μεταξύ διαδοχικών επαναλήψεων είναι αρκετά μικρή:

$$|x_{\mathrm{i}+1} - x_{\mathrm{i}}| < 0{,}0001$$

Όταν αυτό συμβαίνει, έχουμε $f(x_i) \approx 0$ και επομένως x_i αποτελεί καλή αριθμητική εκτίμηση της ρίζας x^* (με την υπόθεση ότι η πρώτη παράγωγος δεν μηδενίζεται).

3. Εφαρμογή: Επίλυση της f(x) = x − exp(−x)

Θεωρούμε την εξίσωση:

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{-x}$$

με παράγωγο:

$$f'(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$$

Εφαρμόζοντας το σχήμα Newton, η επαναληπτική σχέση γίνεται:

$$x_{\mathrm{i}+1} = x_{\mathrm{i}} - \frac{x_{\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-x_{\mathrm{i}}}}{1 + \mathrm{e}^{-x_{\mathrm{i}}}}$$

3.1 Εκτέλεση στο Excel

Υπολογίζοντας τιμές της συνάρτησης στο διάστημα [−3, 3] και σχεδιάζοντας το διάγραμμα, το σημείο τομής με τον οριζόντιο άξονα φαίνεται να βρίσκεται κοντά στο x ≈ 0,789. Αυτό μπορεί να χρησιμεύσει ως αρχική εκτίμηση.

Στη συγκεκριμένη εφαρμογή επιλέγουμε ως **αρχική τιμή:**

$$x_0 = 4$$

Εισάγουμε την τιμή 4 στο κελί A1 του Excel. Στο κελί A2 πληκτρολογούμε τον τύπο της επανάληψης Newton:

```
=D2-(D2-EXP(-D2))/(1+EXP(-D2))
```

Πατώντας Enter εμφανίζεται η τιμή 0,089931. Κάνοντας αντιγραφή (Copy) του κελιού A2 και επικόλληση (Paste) στα επόμενα 10 κελιά (A3:A12), προκύπτει ο παρακάτω πίνακας τιμών:

Επανάληψη i	**Τιμή x_i**
0	**4**
1	0,089931
2	0,563307
3	0,567140
4	**0,567143**
5	0,567143
6	0,567143
7	0,567143

Είναι φανερό ότι από την επανάληψη 4 και μετά οι τιμές δεν μεταβάλλονται, πράγμα που σημαίνει ότι έχουμε βρει τη ρίζα: **$x^* \approx 0,567143$**

Για να επαληθεύσουμε ότι πρόκειται για ρίζα, υπολογίζουμε $f(x^*)$ και ελέγχουμε ότι είναι (πρακτικά) μηδέν:

$$f(0{,}567143) = 0{,}567143 - e^{-0{,}567143} \approx 0$$

Σημείωση: Στο Excel: =A12−EXP(−A12) επιστρέφει αποτέλεσμα πρακτικά ίσο με 0, επιβεβαιώνοντας ότι $x^* = 0,567143$ είναι πράγματι ρίζα.

4. Ασκήσεις

➡ **Άσκηση:** Εκτελέστε τη διαδικασία Newton ξεκινώντας από διαφορετική αρχική τιμή x_0 (π.χ. $x_0 = 0$ ή $x_0 = -2$) και παρατηρήστε πόσες επαναλήψεις χρειάζονται για σύγκλιση στην ίδια ρίζα $x^* \approx 0,567143$.

➡ **Άσκηση:** Εξετάστε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 2$ με παράγωγο $f'(x) = 2x - 3$. Εκτελέστε τη διαδικασία Newton για:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

Επαναληπτική σχέση Newton:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^{\,2} - 3x_i + 2}{2x_i - 3}$$

(α) Αρχική τιμή $x_0 = 0 \rightarrow$ η διαδικασία συγκλίνει στη ρίζα **$x^* = 1$**

(β) Αρχική τιμή $x_0 = 4 \rightarrow$ η διαδικασία συγκλίνει στη ρίζα **$x^* = 2$**