4. Ακρότατα

2014-2015

Άσκηση 1η: Να διαπιστωθεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κοίλες στο θετικό διάστημα $x \geq 0$ και να βρεθεί αναλυτικά και γραφικά, το μέγιστο στο διάστημα $0 \leq x \leq c$.

Λύση:

- $f(x) = 2x - x^2,\ x \geq 0$

$$\max_x \{f(x),\ x \geq 0\}$$

- $f'(x) = (2x - x^2)' = 2 - 2x,\ x \geq 0$
- $f''(x) = -2 < 0,\ \forall x \geq 0$

οπότε η f είναι γνήσια κοίλη στο $[0, +\infty)$.

Έχουμε μέγιστο γνήσιας κοίλης τότε οι αναγκαίες συνθήκες για μέγιστο είναι και ικανές.

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = 2 > 0$, δεν ικανοποιείται, αφού πρέπει $f'(0) < 0$
- Στάσιμο Σημείο:

Συνθήκες 1ης τάξης:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in (0, +\infty)$$

Συνθήκες 2ης τάξης:

$$f''(x) = -2 < 0,\ \forall x \geq 0$$

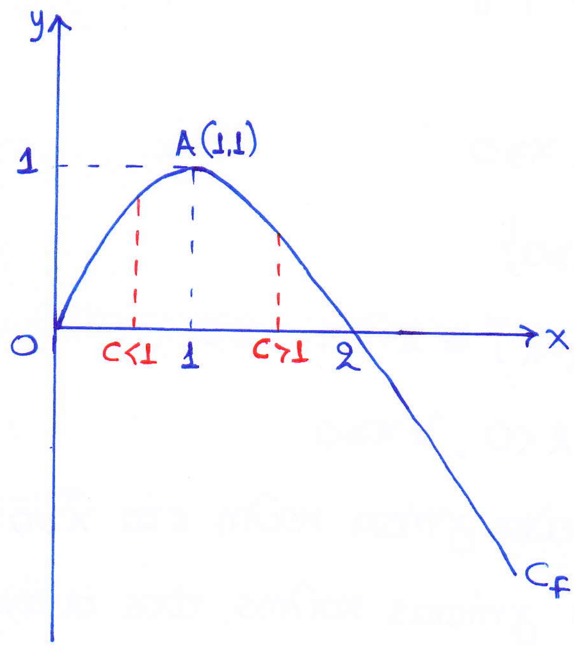
άρα το σημείο $A(1, f(1))$ ή $A(1,1)$ είναι γνήσιο ολικό μέγιστο (μοναδικό)

- Αφού το διάστημα είναι μη φραγμένο, εξετάζουμε για μέγιστο, όταν $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x - x^2) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{2}{x} - 1\right) =$$

$$= (+\infty)(0-1) = -\infty < f(1) = 1$$

οπότε η f έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το σημείο $A(1,1)$.



- $f(x) = 2x - x^2, \quad 0 \le x \le c$

$$\max_x \{f(x),\ x \in [0,c]\}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(I) Αν $c < 1$, τότε έχουμε:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = 2 > 0$, δεν ικανοποιείται
- Στάσιμο Σημείο: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin [0,c]$, όταν $c < 1$, απορρίπτεται

- Δεξιό Σύνορο: $f'(c) = 2-2c = 2(1-c)>0$, ικανοποιείται

οπότε η f έχει γνήσιο ολικό μέγιστο, το σημείο $B(c, 2c-c^2)$.

(II) Αν $c>1$, τότε έχουμε:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = 2>0$, δεν ικανοποιείται
- Στάσιμο Σημείο: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=1 \in [0,c]$, όταν $c>1$
- Δεξιό Σύνορο: $f'(c) = 2-2c = 2(1-c)<0$, δεν ικανοποιείται

οπότε η f έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το σημείο $A(1, f(1))$ ή $A(1,1)$.

▸ $f(x) = 2\sqrt{x} - x,\ x\geq 0$

$\max\limits_{x} \{f(x),\ x\geq 0\}$

- $f'(x) = (2\sqrt{x}-x)' = \frac{2}{2\sqrt{x}} - 1 = x^{-1/2} - 1,\ x>0$
- $f''(x) = (x^{-1/2}-1)' = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}} < 0,\ \forall x>0$

τότε η f είναι γνήσια κοίλη στο $[0,+\infty)$.

Έχουμε μέγιστο γνήσιας κοίλης τότε οι αναγκαίες συνθήκες για μέγιστο είναι και ικανές.

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0^+)=+\infty>0$, δεν ικανοποιείται
- Στάσιμο Σημείο:

Συνθήκες $1^{ης}$ τάξης:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1\in(0,+\infty)$

Συνθήκες $2^{ης}$ τάξης:

$f''(1)=-\frac{1}{2}<0$

άρα το σημείο $A(1,f(1))$ ή $A(1,1)$ είναι γνήσιο ολικό μέγιστο.

- Αφού το διάστημα είναι μη φραγμένο, εξετάζουμε για μέγιστο, όταν $x\to+\infty$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{2\sqrt{x}}{x}-1\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-1\right) = (+\infty).(0-1) = -\infty < f(1)=1$$

οπότε η f έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το σημείο $A(1,1)$.

- $f(x)=2\sqrt{x}-x$, $0\leq x\leq c$

$\max\limits_{x}\{f(x),\ x\in[0,c]\}$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(I) Αν $c<1$, τότε έχουμε:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0^+)=+\infty>0$, δεν ικανοποιείται
- Στάσιμο σημείο: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1\notin[0,c]$, όταν $c<1$, απορρίπτεται
- Δεξιό Σύνορο: $f'(c)=\frac{1}{\sqrt{c}}-1=\frac{1-\sqrt{c}}{\sqrt{c}}>0$,

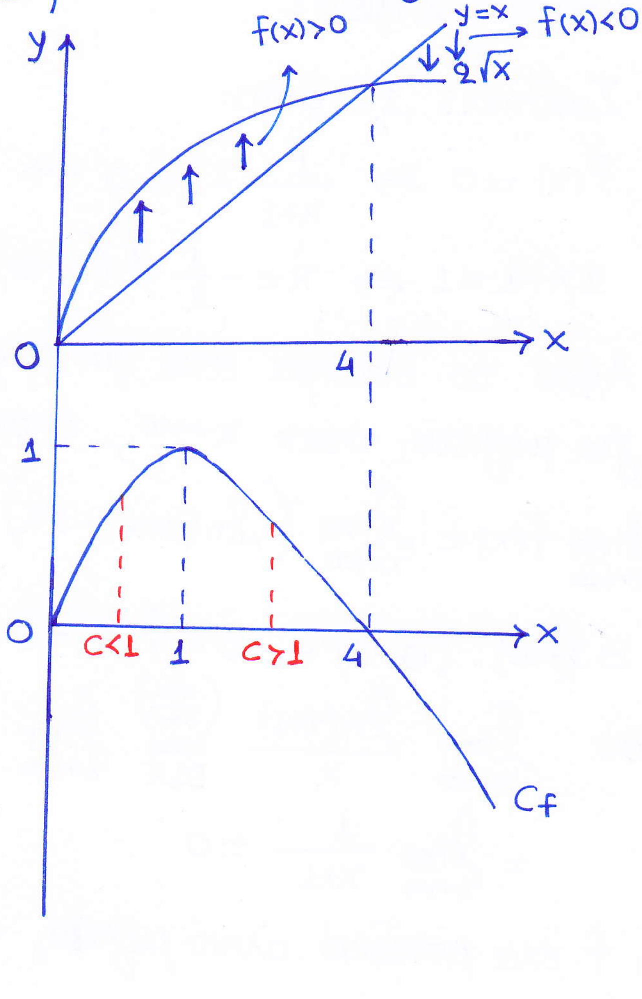
ικανοποιείται.

οπότε η f έχει ολικό μέγιστο, το σημείο $B(c, f(c))$ ή $B(c, 2\sqrt{c} - c)$.

(II) Αν $c > 1$, τότε έχουμε:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0^+) = +\infty > 0$, δεν ικανοποιείται
- Στάσιμο Σημείο: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in (0, c)$, όταν $c > 1$, με $f''(1) = -\frac{1}{2} < 0$, ικανοποιείται.
- Δεξιό Σύνορο: $f'(c) = \frac{1}{\sqrt{c}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{c}}{\sqrt{c}} < 0$, δεν ικανοποιείται

οπότε η f έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το σημείο $A(1,1)$.



- $f(x) = \ln(x+1) - 2x \ , \ x \geq 0$

$\max_x \{ f(x), x \geq 0 \}$

- $f'(x) = \left(\ln(x+1) - 2x \right)' = \frac{1}{x+1}(x+1)' - 2 = \frac{1}{x+1} - 2 \ , \ x \geq 0$
- $f''(x) = \left(\frac{1}{x+1} - 2 \right)' = -\frac{1}{(x+1)^2}(x+1)' = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0 \ , \ \forall x \geq 0$

οπότε η f είναι γνήσια κοίλη στο $[0,+\infty)$.

Έχουμε πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού (max κοίλης), οπότε έχουμε:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = -1 < 0$, ικανοποιείται
- Στάσιμο Σημείο:

  Συνθήκες 1ης τάξης:

  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x+1) = 1 \Leftrightarrow$

  $2x + 2 = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \notin (0,+\infty)$, απορρίπτεται
- Αφού το διάστημα είναι μη φραγμένο, εξετάζουμε για μέγιστο, όταν $x \to +\infty$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(1+x) - 2x \right) = \lim_{x\to+\infty} \left[x \left(\frac{\ln(x+1)}{x} - 2 \right) \right] =$$

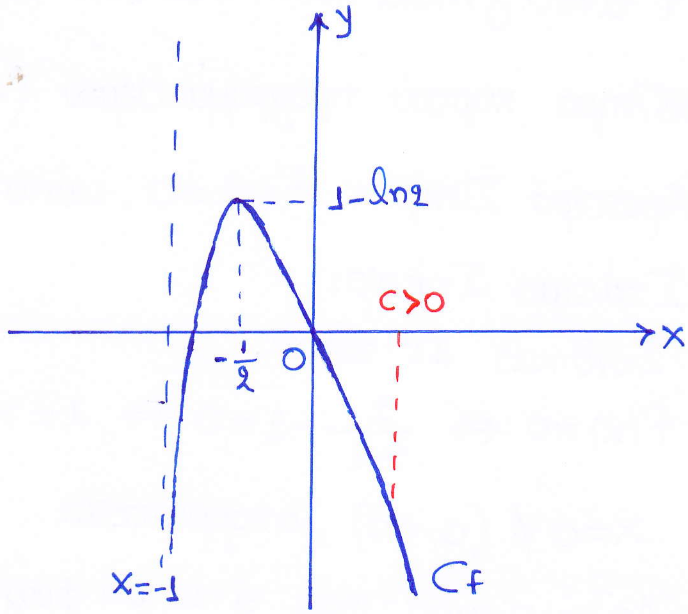
$$= (+\infty) \cdot (0-2) = -\infty < f(0) = 0$$

αφού $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

οπότε η f έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το σημείο $A(0, f(0))$ ή $A(0,0)$.

Σημείωση: Αν η f οριζεται στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή στο $D_f=(-1,+\infty)$ τότε θα παίρναμε τις συνθήκες $2^{ης}$ τάξης, οι οποίες ικανοποιούνται, αφού $f''(-\frac{1}{2})=-4<0$, άρα το σημείο $\left(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2})\right)$ ή $\left(-\frac{1}{2}, 1-\ln 2\right)$ θα ήταν γνήσιο ολικό μέγιστο.



▸ $f(x)=\ln(x+1)-2x\ ,\ 0\leq x\leq c$

Αν $c>0$, τότε έχουμε:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0)=-1<0$, ικανοποιείται
- Στάσιμο Σημείο: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\notin(0,c)$, όταν $c>0$, απορρίπτεται
- Δεξιό Σύνορο: $f'(c)=\frac{1}{c+1}-2=\frac{-(2c+1)}{c+1}<0$, δεν ικανοποιείται

- $f(x) = 2\ln(x+1) - 2x, \ x \geq 0$

  $\max\limits_{x} \{ f(x), \ x \geq 0 \}$

  - $f'(x) = \left(2\ln(x+1) - 2x\right)' = \dfrac{2}{x+1} - 2, \ x \geq 0$

  - $f''(x) = \left(\dfrac{2}{x+1} - 2\right)' = -\dfrac{2}{(x+1)^2} < 0, \ \forall x \geq 0$

  οπότε η f είναι γνήσια κοίλη στο $[0,+\infty)$.

Έχουμε πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού (max κοίλης)

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = 0$, ικανοποιείται

- Στάσιμο Σημείο:

  Συνθήκες $1^{ης}$ τάξης:

  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{x+1} - 2 = 0 \Leftrightarrow 1 = x+1 \Leftrightarrow$

  $x = 0 \notin (0, +\infty)$, απορρίπτεται

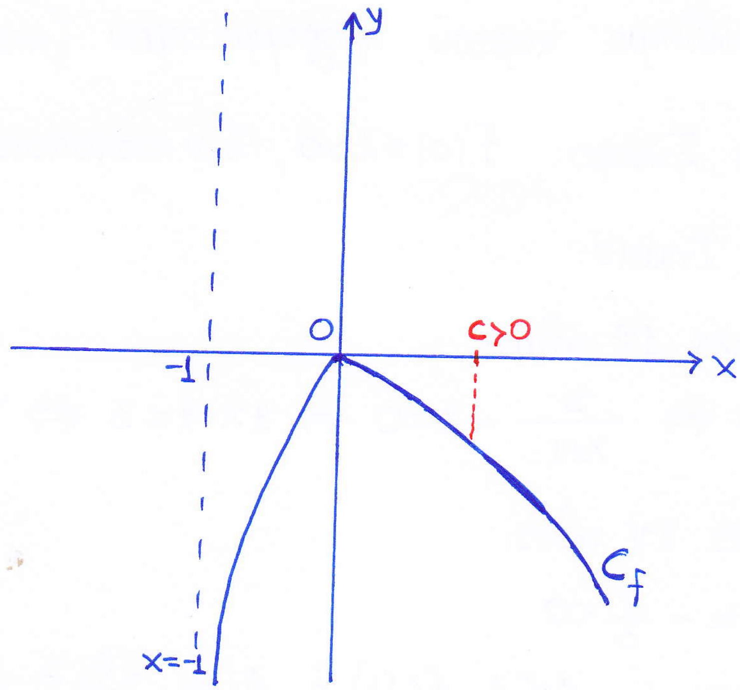
- Αφού το διάστημα είναι μη φραγμένο, εξετάζουμε για μέγιστο, όταν $x \to +\infty$, οπότε έχουμε:

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2\ln(x+1) - 2x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[2x\left(\dfrac{\ln(x+1)}{x} - 1\right)\right] =$

  $= (+\infty) \cdot (0-1) = -\infty < f(0) = 0$

οπότε η f έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το σημείο $O(0,0)$.

Σημείωση: Αν η f ορίζεται στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή $D_f = (-1, +\infty)$ τότε θα παίρναμε τις συνθήκες $2^{ης}$ τάξης, οι οποίες ικανοποιούνται, αφού $f''(0) = -2 < 0$, άρα το σημείο $A(0, f(0))$ ή $A(0,0)$ θα ήταν γνήσιο ολικό μέγιστο.



▸ $f(x)=2\ln(x+1)-2x,\ 0\le x\le c$

Αν $c>0$, τότε έχουμε:

- Αριστερό Σύνορο : $f'(0)=0$, ικανοποιείται
- Στάσιμο Σημείο: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0\notin(0,c)$, όταν $c>0$ απορρίπτεται
- Δεξιό σύνορο: $f'(c)=\frac{2}{1+c}-2=\frac{-c}{1+c}<0$, δεν ικανοποιείται

οπότε η f έχει γνήσιο ολικό μέγιστο, το σημείο $A(0,0)$.

▸ $f(x)=3\ln(x+1)-2x,\ x\ge 0$

$\max_x\{f(x),\ x\in[0,+\infty)\}$

- $f'(x)=\left(3\ln(x+1)-2x\right)'=\frac{3}{x+1}-2,\ x\ge 0$
- $f''(x)=\left(\frac{3}{x+1}-2\right)'=-\frac{3}{(x+1)^2}<0,\ \forall x\ge 0$

οπότε η f είναι γνήσια κοίλη στο $[0,+\infty)$.

Έχουμε πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού (max κοίλης)

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0)=1>0$, δεν ικανοποιείται
- Στάσιμο Σημείο:

Συνθήκες 1ης τάξης:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{x+1}-2=0 \Leftrightarrow 2x+2=3 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\in(0,+\infty)$$

Συνθήκες 2ης τάξης:

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{3}<0$$

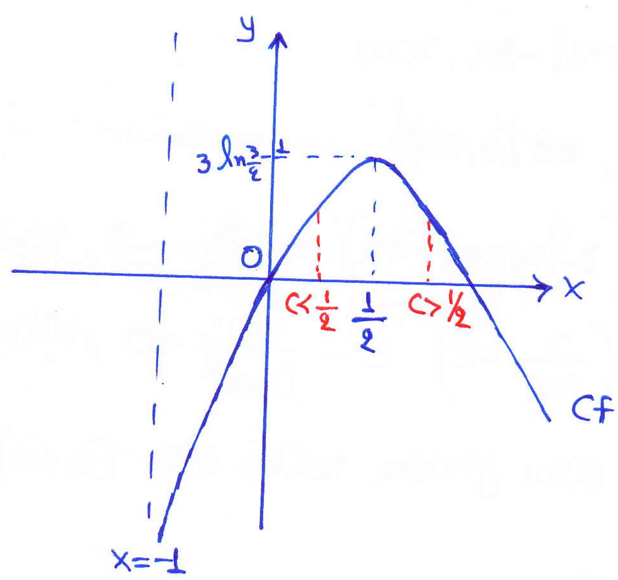
άρα το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ ή $A\left(\frac{1}{2}, 3\ln\frac{3}{2}-1\right)$ είναι γνήσιο ολικό μέγιστο.

- Αφού το διάστημα είναι μη φραγμένο, εξετάζουμε για μέγιστο, όταν $x\to+\infty$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(3\ln(x+1)-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[2x\left(\frac{3\ln(x+1)}{2x}-1\right)\right] =$$

$$=(+\infty)\cdot(0-1) = -\infty < f\left(\frac{1}{2}\right)=3\ln\frac{3}{2}-1$$

οπότε η f έχει ολικό (γνήσιο) μέγιστο, το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, 3\ln\frac{3}{2}-1\right)$.



- $f(x) = 3\ln(x+1) - 2x, \quad 0 \leq x \leq c$

$$\max_x \{f(x),\ x \in [0,c]\}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(I) Αν $c < \frac{1}{2}$, τότε έχουμε:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = 1 > 0$, δεν ικανοποιείται
- Στάσιμο σημείο: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \notin (0,c)$, όταν $c < \frac{1}{2}$, απορρίπτεται
- Δεξιό Σύνορο: $f'(c) = \frac{3}{c+1} - 2 = \frac{1-2c}{c+1} > 0$, ικανοποιείται

οπότε η f έχει γνήσιο ολικό μέγιστο, το σημείο $B(c, 3\ln(c+1) - 2c)$.

(II) Αν $c > \frac{1}{2}$, τότε έχουμε:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = 1 > 0$, δεν ικανοποιείται
- Στάσιμο Σημείο: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in (0,c)$, όταν $c > \frac{1}{2}$, με $f''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{3} < 0$, ικανοποιείται
- Δεξιό Σύνορο: $f'(c) = \frac{1-2c}{c+1} < 0$, δεν ικανοποιείται

οπότε η f έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, 3\ln\frac{3}{2} - 1\right)$.

Άσκηση 2η: Για κάθε μία από τις συναρτήσεις της προηγούμενης άσκησης 1, να βρεθεί αναλυτικά και γραφικά το ελάχιστο, στο ίδιο διάστημα $0 \leq x \leq c$.

Λύση:

▸ $\min_x \{ f(x) = 2x - x^2,\ x \geq 0 \}$

Δεν έχουμε πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού, γιατί ζητάμε min κοίλης συνάρτησης. Το ελάχιστο θα βρίσκεται στο σύνορο ή στο άπειρο.

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = 2 > 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο με $f(0) = 0$)
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Συγκρίνουμε τις τιμές:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty < f(0) = 0$$

οπότε η f έχει ελάχιστο στο άπειρο.

▸ $\min_x \{ f(x),\ x \in [0, c] \}$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(I) Αν $c < 1$, τότε έχουμε:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = 2 > 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)
- Δεξιό Σύνορο: $f'(c) = 2(1 - c) > 0$, δεν ικανοποιείται

οπότε η f έχει γνήσιο ολικό ελάχιστο, το σημείο $(0, f(0))$ ή $(0, 0)$.

(II) Αν $1 \leq c < 2$, τότε έχουμε:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = 2 > 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)
- Δεξιό Σύνορο: $f'(c) = 2(1-c) \leq 0$, ικανοποιείται (τοπικό ελάχιστο)

Συγκρίνουμε τις τιμές:

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(c) &= 2c - c^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(c) > f(0), \text{ αφού } 2c - c^2 > 0 \text{ για κάθε } c \in (0,2)$$

οπότε η f έχει ολικό ελάχιστο, το σημείο $(0, f(0))$ ή $(0,0)$.

(III) Αν $c = 2$, τότε έχουμε:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = 2 > 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)
- Δεξιό Σύνορο: $f'(2) = -2 < 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)

Συγκρίνουμε τις τιμές:

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(2) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(0) = f(2) = 0$$

οπότε η f έχει δύο τοπικά ελάχιστα.

(IV) Αν $c > 2$, τότε έχουμε:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = 2 > 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)
- Δεξιό Σύνορο: $f'(c) = 2(1-c) < 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)

Συγκρίνουμε τις τιμές:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(c)=2c-c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)>f(c),\ \forall c\in(2,+\infty)$$

οπότε η f έχει ολικό ελάχιστο, το σημείο $(c,f(c))$.

▶ $\min_x \{ f(x)=2\sqrt{x}-x,\ x\geq 0 \}$

Δεν έχουμε πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού, γιατί ζητάμε min κοίλης συνάρτησης. Το ελάχιστο θα βρίσκεται στο σύνορο ή στο άπειρο.

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0^+)=+\infty>0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Συγκρίνουμε τις τιμές:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty<f(0)=0$$

οπότε η f έχει ελάχιστο στο άπειρο.

▶ $\min_x \{ f(x),\ x\in[0,c] \}$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(I) Αν $c<1$, τότε έχουμε:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0^+)=+\infty>0$, ικανοποιείται
- Δεξιό Σύνορο: $f'(c)=\frac{1-\sqrt{c}}{\sqrt{c}}>0$, δεν ικανοποιείται

οπότε η f έχει ολικό ελάχιστο, το σημείο $(0,f(0))$ ή $(0,0)$.

(II) Αν $1 \le c < 4$, τότε έχουμε:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0^+) = +\infty > 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)
- Δεξιό Σύνορο: $f'(c) = \frac{1-\sqrt{c}}{\sqrt{c}} \le 0$, ικανοποιείται (τοπικό ελάχιστο)

Συγκρίνουμε τις τιμές:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(c) = 2\sqrt{c} - c \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) < f(c),\ \forall c \in [1,4)$$

οπότε η f έχει ολικό ελάχιστο, το σημείο $(0,0)$.

(III) Αν $c=4$, τότε έχουμε:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0^+) = +\infty > 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)
- Δεξιό Σύνορο: $f'(4) = -\frac{1}{2} < 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)

Συγκρίνουμε τις τιμές:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(4) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) = f(4) = 0$$

οπότε η f έχει δύο τοπικά ελάχιστα.

(IV) Αν $c > 4$, τότε έχουμε:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0^+) = +\infty > 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)
- Δεξιό Σύνορο: $f'(c) = \frac{1-\sqrt{c}}{\sqrt{c}} < 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)

Συγκρίνουμε τις τιμές:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(c)=2\sqrt{c}-c \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)>f(c),\ \forall\, c>4$$

οπότε η f έχει ολικό ελάχιστο, το σημείο $(c, f(c))$.

- $\min_x \{ f(x)=\ln(x+1)-2x,\ x\geq 0\}$

Δεν έχουμε πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού, γιατί ζητάμε min κοίλης συνάρτησης. Τότε το ελάχιστο θα βρίσκεται είτε στο άπειρο είτε στο σύνορο.

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0)=-1<0$, δεν ικανοποιείται
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty<0$

οπότε η f έχει ελάχιστο στο άπειρο.

- $\min_x \{ f(x),\ x\in[0,c]\}$

Αν $c>0$, τότε έχουμε:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0)=-1<0$, δεν ικανοποιείται
- Δεξιό Σύνορο: $f'(c)=\dfrac{-(1+2c)}{c+1}<0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)

οπότε η f έχει ολικό ελάχιστο, στο σημείο $(c, f(c))$.

▸ $\min\limits_{x} \{ f(x) = 2\ln(x+1) - 2x,\ x \geq 0 \}$

Δεν έχουμε πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού, γιατί ζητάμε min κοίλης συνάρτησης. Τότε το ελάχιστο θα βρίσκεται είτε στο σύνορο είτε στο άπειρο.

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = -2 < 0$, δεν ικανοποιείται
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty < 0$

οπότε η f έχει ελάχιστο στο άπειρο.

▸ $\min\limits_{x} \{ f(x),\ x \in [0, c] \}$

Αν $c > 0$, τότε έχουμε:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = -2 < 0$, δεν ικανοποιείται
- Δεξιό Σύνορο: $f'(c) = \dfrac{-2c}{c+1} < 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)

οπότε η f έχει ολικό ελάχιστο, στο σημείο $(c, f(c))$.

▸ $\min\limits_{x} \{ f(x) = 3\ln(x+1) - 2x,\ x \geq 0 \}$

Δεν έχουμε πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού, γιατί ζητάμε min κοίλης συνάρτησης. Τότε το ελάχιστο θα βρίσκεται είτε στο άπειρο είτε στο σύνορο.

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = 1 > 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty < 0$

Συγκρίνουμε τις τιμές:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty < f(0) = 0$$

οπότε η f έχει ελάχιστο στο άπειρο.

- $\min_x \{ f(x),\ x \in [0,c] \}$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(I) Αν $c < \frac{1}{2}$, τότε έχουμε:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = 1 > 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)
- Δεξιό Σύνορο: $f'(c) = \frac{1-2c}{c+1} > 0$, δεν ικανοποιείται

οπότε η f έχει ολικό ελάχιστο στο $(0,0)$.

(II) Αν $\frac{1}{2} \leq c < k$, τότε έχουμε: (όπου k: $f(k)=0$)

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = 1 > 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)
- Δεξιό Σύνορο: $f'(c) = \frac{1-2c}{c+1} < 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)

Συγκρίνουμε τις τιμές:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(c) = 3\ln(c+1) - 2c \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) < f(c),\ \forall c \in [\tfrac{1}{2}, k)$$

οπότε η f έχει ολικό ελάχιστο, στο σημείο $O(0,0)$.

(III) Αν $c = k$, τότε έχουμε:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = 1 > 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)

- Δεξιό Σύνορο: $f'(\kappa) = \frac{1-2\kappa}{\kappa+1} < 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)

Συγκρίνουμε τις τιμές:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(\kappa)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=f(\kappa)=0$$

οπότε η f έχει δύο τοπικά ελάχιστα.

(IV) Αν $c>\kappa$, τότε έχουμε:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0)=1>0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)
- Δεξιό Σύνορο: $f'(c) = \frac{1-2c}{c+1} < 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)

Συγκρίνουμε τις τιμές:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(c)=3\ln(c+1)-2c \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)>f(c),\ \forall\, c>\kappa$$

οπότε η f έχει ολικό ελάχιστο, στο σημείο $(c, f(c))$.

Άσκηση 3η: Για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο στο θετικό διάστημα $x \geq 0$. Να διερευνηθεί σε κάθε περίπτωση, αν έχουμε συνθήκες Κυρτού Προγραμματισμού.

Λύση:

▸ Έχουμε $f(x) = x^4+x^2+2x$, $x \geq 0$

- $f'(x) = (x^4+x^2+2x)' = 4x^3+2x+2 > 0$, $\forall x \geq 0$

  οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

- $f''(x) = (4x^3+2x+2)' = 12x^2+2 > 0$, $\forall x \geq 0$

  οπότε η f είναι γνήσια κυρτή στο $[0,+\infty)$.

$$\max_x \{ f(x), x \geq 0 \}$$

Δεν έχουμε πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού, γιατί ζητάμε μέγιστο κυρτής συνάρτησης. Τότε το μέγιστο θα βρίσκεται είτε στο σύνορο είτε στο άπειρο.

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0)=2>0$, δεν ικανοποιείται
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^4+x^2+2x) = +\infty > 0$

οπότε η f έχει μέγιστο στο άπειρο.

$$\min_x \{ f(x), x \geq 0 \}$$

Έχουμε πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού, γιατί ζητάμε min κυρτής συνάρτησης. Οπότε οι αναγκαίες συνθήκες για ελάχιστο είναι και ικανές.

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0)=2>0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)
- Στάσιμο Σημείο: $f'(x)=0$, αδύνατη $\forall x \geq 0$ αφού $f'(x)>0$, $\forall x \geq 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > 0$

Συγκρίνουμε τις τιμές:

$$f(0)=0<\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

οπότε η f έχει γνήσιο ολικό ελάχιστο, στο σημείο $(0,f(0))$ ή $(0,0)$.

▸ Έχουμε $f(x)=x^3+x^2+x+1,\ x\geq 0$

- $f'(x)=(x^3+x^2+x+1)'=3x^2+2x+1>0,\ \forall x\geq 0$
  οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
- $f''(x)=(3x^2+2x+1)'=6x+2>0,\ \forall x\in[0,+\infty)$
  οπότε η f είναι γνήσια κυρτή στο $[0,+\infty)$.

$\max_x \{f(x),\ x\geq 0\}$

Δεν έχουμε πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού, γιατί ζητάμε max κυρτής συνάρτησης. Τότε το μέγιστο θα βρίσκεται είτε στο σύνορο είτε στο άπειρο.

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0)=1>0$, δεν ικανοποιείται
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3+x^2+x+1)=+\infty>0$

οπότε το μέγιστο της f είναι στο άπειρο.

$\min_x \{f(x),\ x\geq 0\}$

Έχουμε πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού, γιατί ζητάμε min κυρτής συνάρτησης. Οπότε οι αναγκαίες συνθήκες για ελάχιστο είναι και ικανές.

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0)=1>0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)
- Στάσιμο Σημείο: $f'(x)=0$, αδύνατη $\forall x\geq 0$ αφού $f'(x)>0, \forall x\geq 0$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > 0$

Συγκρίνουμε τις τιμές:

$$f(0)=1<+\infty=\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

οπότε η f έχει γνήσιο ολικό ελάχιστο, στο σημείο $(0,f(0))$ ή $(0,1)$.

▸ Έχουμε $f(x)=x^3-2x^2+x+1$, $x\geq 0$

- $f'(x)=\left(x^3-2x^2+x+1\right)'=3x^2-4x+1$, $x\geq 0$
- $f''(x)=\left(3x^2-4x+1\right)'=6x-4$, $x\geq 0$

$$\max_x \{f(x), x\geq 0\}$$

Δεν έχουμε πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού, αφού η κυρτότητα της f δεν διατηρείται στο $[0,+\infty)$.

Αναγκαίες Συνθήκες:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0)=1>0$, δεν ικανοποιείται
- Στάσιμο Σημείο: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow$ $x=1$ ή $x=\frac{1}{3}$ (δεκτές)

Ικανές Συνθήκες:

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = -2<0$, ικανοποιείται

$f''(1) = 2>0$, δεν ικανοποιείται

οπότε η f έχει γνήσιο τοπικό μέγιστο, το σημείο $\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3-2x^2+x+1) = +\infty > 0$

Συγκρίνουμε τις τιμές:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{31}{27} < +\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

οπότε η f έχει μέγιστο στο άπειρο.

$\min_x \{f(x),\ x\geq 0\}$

Δεν έχουμε πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού, αφού η κυρτότητα της f δεν διατηρείται στο $[0,+\infty)$.

Αναγκαίες Συνθήκες:

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = 1 > 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)
- Στάσιμο Σημείο: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=\frac{1}{3}$ (δευτές)

Ικανές Συνθήκες:

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = -2<0$, δεν ικανοποιείται

$f''(1) = 2>0$, ικανοποιείται

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > 0$

Συγκρίνουμε τις τιμές:

$$f(0) = f(1) = 1 < +\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

οπότε η f έχει δύο ολικά ελάχιστα, στα σημεία $(0,1)$, $(1,1)$

▶ Έχουμε $f(x) = -x^3 - x^2 - x,\ x \geq 0$

- $f'(x) = (-x^3 - x^2 - x)' = -3x^2 - 2x - 1 < 0,\ \forall x \geq 0$

  οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

- $f''(x) = (-3x^2 - 2x - 1)' = -6x - 2 < 0,\ \forall x \geq 0$

  οπότε η f είναι γνήσια κοίλη στο $[0, +\infty)$.

$\max_x \{ f(x),\ x \geq 0 \}$

Έχουμε πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού, αφού ζητάμε max κοίλης συνάρτησης. Οπότε οι αναγκαίες συνθήκες για μέγιστο είναι και ικανές.

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = -1 < 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό μέγιστο)

- Στάσιμο Σημείο: $f'(x) = 0$, αδύνατη $\forall x \geq 0$ αφού $f'(x) < 0,\ \forall x \geq 0$.

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x^3 - x^2 - x) = -\infty$

  Συγκρίνουμε τις τιμές:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty < 0 = f(0)$$

οπότε η f έχει ολικό μέγιστο (γνήσιο), το σημείο $(0, f(0))$ ή $(0,0)$.

$$\min_x \{ f(x),\ x \geq 0 \}$$

Δεν έχουμε πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού, διότι ζητάμε min κοίλης συνάρτησης. Οπότε το ελάχιστο θα βρίσκεται στο σύνορο ή στο άπειρο.

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = -1 < 0$, δεν ικανοποιείται
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty < 0$

οπότε η f έχει ελάχιστο στο άπειρο.

▸ Έχουμε $f(x) = -x^3 - 2x^2 - x + 1$, $x \geq 0$

- $f'(x) = (-x^3 - 2x^2 - x + 1)' = -3x^2 - 4x - 1 < 0$, $\forall x \geq 0$

  οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

- $f''(x) = (-3x^2 - 4x - 1)' = -6x - 4 < 0$, $\forall x \geq 0$

  οπότε η f είναι γνήσια κοίλη στο $[0, +\infty)$

$$\max_x \{ f(x),\ x \geq 0 \}$$

Έχουμε πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού, αφού ζητάμε max κοίλης συνάρτησης. Οπότε οι αναγκαίες συνθήκες για μέγιστο είναι και ικανές.

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = -1 < 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό μέγιστο)
- Στάσιμο σημείο: $f'(x) = 0$, αδύνατη $\forall x \geq 0$ αφού $f'(x) < 0$, $\forall x \geq 0$.

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty < f(0) = 1$

οπότε η f έχει γνήσιο ολικό μέγιστο, το σημείο $(0, f(0))$ ή $(0,1)$.

$\min_x \{ f(x),\ x\geq 0 \}$

Δεν έχουμε πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού, αφού ζητάμε min κοίλης συνάρτησης. Οπότε το ελάχιστο θα βρίσκεται στο σύνορο ή στο άπειρο.

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = -1 < 0$, δεν ικανοποιείται
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty < 0$

οπότε η f έχει γνήσιο ολικό ελάχιστο στο άπειρο.

▶ Έχουμε $f(x) = x^2 + e^{-x}$, $x \geq 0$

- $f'(x) = (x^2 + e^{-x})' = 2x - e^{-x}$
- $f''(x) = (2x - e^{-x})' = 2 + e^{-x} > 0$, $\forall x \geq 0$

οπότε η f είναι γνήσια κυρτή στο $[0, +\infty)$.

$\max_x \{ f(x),\ x\geq 0 \}$

Δεν έχουμε πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού, αφού ζητάμε max κυρτής συνάρτησης. Οπότε το μέγιστο θα βρίσκεται στο σύνορο ή στο άπειρο.

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = -1 < 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό μέγιστο)

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > 0$

Συγκρίνουμε τις τιμές:

$$f(0) = 1 < +\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

οπότε η f έχει ολικό μέγιστο στο άπειρο, ενώ γνήσιο τοπικό μέγιστο στο σημείο $(0,1)$.

$\min_x \{f(x), x \geq 0\}$

Έχουμε πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού αφού ζητάμε min κυρτής συνάρτησης.

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = -1 < 0$, δεν ικανοποιείται
- Στάσιμο Σημείο: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow$
  $x = x_0 \in (0,1)$, από Θεώρημα Bolzano
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Συγκρίνουμε τις τιμές:

$$f(x_0) < +\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

οπότε η f έχει γνήσιο ολικό ελάχιστο στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

- Έχουμε $f(x) = \ln(x+1) - x^2, \ x \geq 0$
  - $f'(x) = \frac{1}{x+1} - 2x, \ x \geq 0$
  - $f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - 2 < 0, \ \forall x \geq 0$

  οπότε η f είναι γνήσια κοίλη στο $[0, +\infty)$

$$\max_x \{f(x),\ x \geq 0\}$$

Έχουμε πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού, αφού ζητάμε max κοίλης συνάρτησης. Οπότε οι αναγκαίες συνθήκες γίνονται και ικανές.

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = 1 > 0$, δεν ικανοποιείται
- Στάσιμο σημείο: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - 2x = 0$

$2x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \text{ (δεκτή) ή } x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \text{ (απορ.)}$$

με $f''\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) < 0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(x+1) - x^2\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{\ln(x+1)}{x^2} - 1\right) = (+\infty)\,(0-1) = -\infty < 0$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{2x} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x(x+1)} = 0$$

οπότε η f έχει γνήσιο ολικό μέγιστο, το σημείο

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\ f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

$$\min_x \{f(x),\ x \geq 0\}$$

Δεν έχουμε πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού, αφού ζητάμε min κοίλης συνάρτησης. Οπότε το ελάχιστο θα βρίσκεται στο σύνορο ή στο άπειρο.

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0) = 1 > 0$, ικανοποιείται (γνήσιο τοπικό ελάχιστο)
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty < 0 = f(0)$

οπότε η f έχει ολικό ελάχιστο στο άπειρο, ενώ έχει γνήσιο τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(0,0)$.

Άσκηση 4η: Στα παρακάτω προβλήματα βελτιστοποίησης με παραμέτρους, να βρεθεί η συνάρτηση μέγιστης τιμής στο θετικό διάστημα $x \geq 0$, και να μελετηθεί όσον αφορά ιδιότητες μονοτονίας, και κυρτότητας ως προς την κάθε παράμετρο: $p > 0, w > 0$.

Λύση:

- $\max_x \{ f(x) = p\sqrt{x} - wx,\ p>0, w>0, x \geq 0 \}$
  - $f'(x) = \dfrac{p}{2\sqrt{x}} - w = \dfrac{p}{2} x^{-1/2} - w,\ x > 0$
  - $f''(x) = -\dfrac{p}{4} x^{-3/2} < 0,\ \forall x > 0$

  οπότε η f είναι γνήσια κοίλη.

Έχουμε πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού, αφού ζητάμε max κοίλης συνάρτησης.

- Αριστερό Σύνορο: $f'(0^+) = +\infty > 0$, δεν ικανοποιείται

- Στάσιμο Σημείο: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{p}{2\sqrt{x}} - w = 0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{x} = \frac{p}{2w} \Leftrightarrow x^* = \frac{p^2}{4w^2} > 0$

με $f''(x^*) < 0$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

οπότε η f έχει γνήσιο ολικό μέγιστο, το σημείο $\left(\frac{p^2}{4w^2}, f\left(\frac{p^2}{4w^2}\right)\right)$.

Η μέγιστη τιμή της f είναι:

$$f^*(p,w) = f(x^*) = f\left(\frac{p^2}{4w^2}\right) = p\sqrt{\frac{p^2}{4w^2}} - w\frac{p^2}{4w^2} =$$

$$= \frac{p^2}{2w} - \frac{p^2}{4w} = \frac{p^2}{4w}$$

- $\frac{\partial f^*}{\partial p} = f^*_p = \frac{p}{2w} > 0$, τότε η f^* είναι αύξουσα ως προς p.

- $\frac{\partial^2 f^*}{\partial p^2} = f^*_{pp} = \frac{1}{2w} > 0$, τότε η f^* είναι κυρτή ως προς p.

- $\frac{\partial f^*}{\partial w} = f^*_w = -\frac{p^2}{4w^2} < 0$, τότε η f^* είναι φθίνουσα ως προς w.

- $\frac{\partial f^*}{\partial w^2} = f^*_{ww} = \frac{p^2}{2w^3} > 0$, τότε η f^* είναι κυρτή ως προς w.