Ef.II.4 ΠΑΡΑΓΩΓΗ-ΚΟΣΤΟΣ-ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ (Β)

Εισαγωγή

Θα μελετήσουμε τις ιδιότητες **μονοτονίας** και **κυρτότητας** τριών συναρτήσεων, παραγωγής, κόστους και χρησιμότητας, ως εξής:

1. Σε μια παραγωγική διαδικασία διακρίνουμε τις **εισροές** (inputs) που αφορούν τους **συντελεστές παραγωγής** (factors of production), και τις **εκροές** (outputs) που αφορούν τα **παραγόμενα προϊόντα** (products). Σε προηγούμενα κεφάλαια ασχοληθήκαμε με προβλήματα στα οποία εμφανίζονταν μόνο μια εισροή που ήταν η δαπάνη C ή ένας συντελεστής παραγωγής π.χ. η εργασία L, και μόνο μια εκροή που ήταν η παραγόμενη ποσότητα Q. Γενικότερα ως εισροές μπορεί να εμφανίζονται περισσότεροι συντελεστές που χρησιμοποιούνται στην παραγωγή. Αντίστοιχα ως εκροές μπορεί να εμφανίζονται περισσότερα του ενός παραγόμενα προιόντα. Εδώ θα ασχοληθούμε με προβλήματα στα οποία εμφανίζονται περισσότερες εισροές ή περισσότερες εκροές, οπότε μπορούμε να έχουμε **υποκατάσταση** (substitution) μεταξύ συντελεστών ή μεταξύ παραγόμενων προϊόντων. Ειδικά θα μελετήσουμε τις ιδιότητες μονοτονίας και κυρτότητας για συναρτήσεις:

- **παραγωγής** με δύο συντελεστές παραγωγής ως εισροές και ένα παραγόμενο προιόν ως εκροή: $Q = Q(K, L)$
- **κόστους** με τη συνολική δαπάνη ως εισροή και δύο παραγόμενα προιόντα ως εκροές: $C = C(X, Y)$

2. Στο σκέλος της κατανάλωσης, η απλή συνάρτηση χρησιμότητας που μελετήσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο αναφέρεται είτε στην κατανάλωση μιας ποσότητας ενός μόνο αγαθού $X : U = U(X)$, ή γενικότερα στην χρησιμότητα που προκύπτει από ένα επίπεδο δαπάνης $C : U = U(C)$. Γενικότερα η χρησιμότητα εκφράζεται ως συνάρτηση των ποσοτήτων κατανάλωσης διαφόρων **αγαθών** (goods), οπότε μπορεί να έχουμε φαινόμενα υποκατάστασης μεταξύ αγαθών. Στη θεωρία κατανάλωσης τον βασικό ρόλο παίζει η έννοια της «προτίμησης». Έτσι για δύο αγαθά θεωρούμε ότι μεταξύ των διαφόρων συνδυασμών κατανάλωσης $\{X, Y\}$ υπάρχει μια σχέση προτίμησης, για την οποία υποθέτουμε ότι εκφράζεται μέσω μιας συνάρτησης **χρησιμότητας** (utility function) που «μετράει» την παραγόμενη χρησιμότητα:

- $U = U(X, Y)$

Γενικά έχει ιδιότητες αντίστοιχες αυτών της παραπάνω συνάρτησης παραγωγής.

ΠΑΡΑΓΩΓΗ

1. Δύο εισροές-συντελεστές παραγωγής

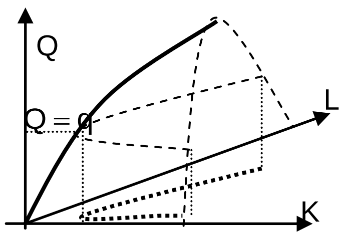
Θεωρούμε την παραγωγή ποσότητας Q ως συνάρτηση δύο συντελεστών παραγωγής, τούς οποίους συμβατικά θα αποκαλούμε **κεφάλαιο** (capital) K και **εργασία** (labor) L αντίστοιχα:

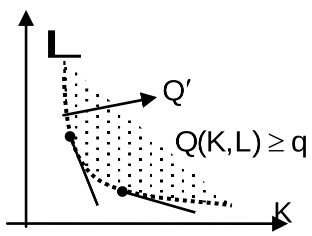
$$Q = Q(K,L) \text{ με } K \geq 0, L \geq 0$$

με αντίστοιχες μερικές παραγώγους:

$Q_K = \dfrac{\partial Q}{\partial K}$, **οριακό προϊόν κεφαλαίου** (marginal product of capital)

$Q_L = \dfrac{\partial Q}{\partial L}$, **οριακό προϊόν εργασίας** (marginal product of labor)





συνάρτηση παραγωγής **εξίσωση ισοπαραγωγής**

Οι εξισώσεις υποκατάστασης τις οποίες ορίζουν οι ισοσταθμικές της συνάρτησης παραγωγής καλούνται εξισώσεις **ισοπαραγωγής** (isoquant):

$$Q(K,L) = q$$

Είναι οι συνδυασμοί κεφαλαίου και εργασίας που δίνουν μια συγκεκριμένη παραγωγή q. Στη γενική περίπτωση ισχύουν **συνήθως** τα παρακάτω:

Ιδιότητες της συνάρτησης παραγωγής $Q(K,L)$

Μια συνάρτηση παραγωγής έχει ***συνήθως*** *τις παρακάτω ιδιότητες μονοτονίας και καμπυλότητας.*

1. *Είναι* ***γνήσια αύξουσα*** *με γνήσια θετικά οριακά προϊόντα, δηλαδή κάθε αύξηση στη συμμετοχή ενός συντελεστή οδηγεί σε γνήσια μεγαλύτερη παραγωγή:*

$$Q_K > 0,\ Q_L > 0$$

2. *Ορίζει* ***αρνητικό και φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης*** *μεταξύ των δύο συντελεστών, δηλαδή για σταθερή παραγωγή, κάθε αύξηση στη συμμετοχή του ενός συντελεστή υποκαθιστά όλο και μικρότερη ποσότητα του άλλου, και* ***η συνάρτηση υποκατάστασης είναι φθίνουσα κυρτή,*** *όπως στο γράφημα:*

$$Q(K,L) = q \Rightarrow \begin{cases} L = L(K) \text{ με } L'(K) \leq 0,\ L''(K) \geq 0 \\ K = K(L) \text{ με } K'(L) \leq 0,\ K''(L) \geq 0 \end{cases}$$

3. *Είναι οιονεί κοίλη, με* ***κυρτές τις πάνω σταθμικές****, δηλαδή οι ενδιάμεσοι συνδυασμοί των συντελεστών είναι περισσότερο παραγωγικοί από τους ακραίους συνδυασμούς, όπως στο γράφημα.*

4. *Είναι* ***κοίλη,*** *με συνολικά φθίνον οριακό προϊόν. Ειδικότερα:* $Q_{KK} \leq 0, Q_{LL} \leq 0$

Συναρτήσεις παραγωγής με τις παραπάνω ιδιότητες θα καλούνται **κανονικές.** Ειδικά οι **γραμμικές** θεωρούνται κανονικές. Ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες, αλλά όχι γνήσια.

Παρατήρηση. Πολλές από τις παραπάνω ιδιότητες σχετίζονται μεταξύ τους. Π.χ.

$\{1,2\} \Leftrightarrow \{1,3\}$*, μια αύξουσα συνάρτηση ορίζει φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης* $\Leftrightarrow$ *είναι οιονεί κοίλη.*

$4 \Rightarrow 3$*, μια κοίλη συνάρτηση είναι και οιονεί κοίλη.*

Ειδικότερα, η ιδιότητα 4 εκφράζεται ως γνωστόν με αρνητικά ημιορισμένο Εσσιανό πίνακα:

$$H_Q \leq 0 \Rightarrow\ Q_{KK} \leq 0, Q_{LL} \leq 0,\ \Delta_Q = |H_Q| = Q_{KK}Q_{LL} - Q_{KL}^2 \geq 0$$

Η ασθενέστερη ιδιότητα 3 της οιονεί κοιλότητας εκφράζεται με αρνητικά ημιορισμένο πλαισιωμένο Εσσιανό πίνακα, δηλαδή θετική πλαισιωμένη Εσσιανή ορίζουσα:

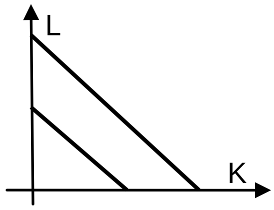
$$\tilde{H}_Q \leq 0 \Rightarrow \tilde{\Delta}_Q = |\tilde{H}_Q| = -Q_{KK}Q_L^2 + 2Q_{KL}Q_KQ_L - Q_{LL}Q_K^2 \geq 0$$ ▲

2. Βασικές συναρτήσεις παραγωγής

Θα εξετάζουμε τρεις βασικούς τύπους κανονικών συναρτήσεων παραγωγής.

1. Γραμμική: $Q = \alpha K + \beta L$

Π.χ. ενέργεια Q παράγεται με πετρέλαιο K **ή** με λιγνίτη L. Αν μια μονάδα πετρελαίου παράγει α μονάδες ενέργειας και μια μονάδα λιγνίτη παράγει β μονάδες ενέργειας, τότε με $\{K,L\}$ μονάδες αντίστοιχα θα παράγονται $Q = \alpha K + \beta L$ μονάδες ενέργειας. Λέμε ότι οι εισροές είναι **πλήρως υποκατάστατες,** με καμπύλες ισοπαραγωγής ευθείες και ρυθμό υποκατάστασης σταθερό:



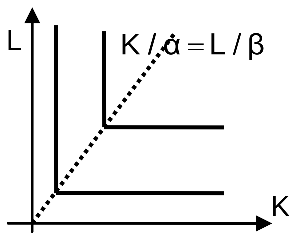
$$Q = \alpha K + \beta L = q \Rightarrow \alpha dK + \beta dL = 0 \Rightarrow \frac{dL}{dK} = -\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1/\beta}{1/\alpha}$$

Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η παραγωγικότητα α του K σε σχέση με την παραγωγικότητα β του L, τόσο μεγαλύτερος είναι ο παραπάνω ρυθμός υποκατάστασης, δηλαδή για σταθερή παραγωγή η ίδια αύξηση του K υποκαθιστά μεγαλύτερη μείωση του L. Ειδικότερα:

- 1 ***επιπλέον ποσότητα*** K ***είναι ισοδύναμη με (υποκαθιστά)*** α/β ***ποσότητα*** L***, διότι αμφότερες δίνουν την ίδια*** α ***επιπλέον ποσότητα*** Q
- $1/\alpha$ *επιπλέον ποσότητα* K *είναι ισοδύναμη με (υποκαθιστά)* $1/\beta$ *ποσότητα* L*, διότι αμφότερες δίνουν την ίδια* 1 *επιπλέον ποσότητα* Q

2. Leontief min: $Q = \min\{K/\alpha, L/\beta\}$

Π.χ. αν για την παραγωγή μιας μονάδας χάλυβα απαιτούνται α μονάδες σιδήρου **και** β μονάδες άνθρακα, τότε με $\{K,L\}$ μονάδες σιδήρου και άνθρακα αντίστοιχα θα παράγονται $Q = \min\{K/\alpha, L/\beta\}$ μονάδες χάλυβα, διότι η παραγωγή καθορίζεται από την μικρότερη ποσότητα. Λέμε ότι οι δύο εισροές είναι **πλήρως συμπληρωματικές,** με την έννοια ότι χρησιμοποιούνται σε σταθερή αναλογία με ρυθμό υποκατάστασης μηδενικό ή άπειρο, δηλαδή **χωρίς δυνατότητα υποκατάστασης:**



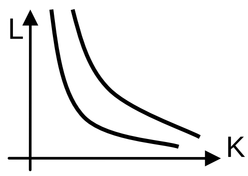
$$Q = \min\left\{\frac{K}{\alpha}, \frac{L}{\beta}\right\} = \begin{cases} K/\alpha & \text{αν } K/\alpha \le L/\beta \\ L/\beta & \text{αν } L/\beta \le K/\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{dL}{dK} = \begin{cases} \infty & \text{αν } K/\alpha \le L/\beta \\ 0 & \text{αν } L/\beta \le K/\alpha \end{cases}$$

3. Cobb-Douglas (C-D): $Q = K^{\alpha} L^{\beta}$ με $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta \le 1$.

Αυτή η πολύ σημαντική συνάρτηση παραγωγής βρίσκεται ανάμεσα από τις δύο προηγούμενες. Όπως θα εξετάσουμε σε επόμενη ενότητα (IV), τα $\{\alpha,\beta\}$ ερμηνεύονται ως **ελαστικότητες** του κεφαλαίου K και της εργασίας L στην παραγωγή, με την παρακάτω έννοια:

1% *αύξηση του* K *προκαλεί* $\alpha\%$ *αύξηση του* Q*, οριακά.*

1% *αύξηση του* L *προκαλεί* $\beta\%$ *αύξηση του* Q *, οριακά.*



Θεωρώντας τις σχετικές ή ισοδύναμα ποσοστιαίες (οριακές) μεταβολές:

$$\left\{\frac{dK}{K}, \frac{dL}{L}\right\}, \ \left\{\%dK = 100\frac{dK}{K}, \ \%dL = 100\frac{dL}{L}\right\}$$

βρίσκουμε για τον ρυθμό υποκατάστασης μεταξύ των συντελεστών, τη σχέση:

$$\frac{dL}{dK} = -\frac{Q_K}{Q_L} = -\frac{\alpha K^{\alpha-1} L^{\beta}}{K^{\alpha} \beta L^{\beta-1}} = -\frac{\alpha L}{\beta K} \Rightarrow \frac{dL/L}{dK/K} = -\frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \frac{\%dL}{\%dK} = -\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1/\beta}{1/\alpha}$$

Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η παραγωγικότητα α του K σε σχέση με την παραγωγικότητα β του L, τόσο μεγαλύτερος είναι ο παραπάνω ποσοστιαίος ρυθμός υποκατάστασης, δηλαδή για σταθερή παραγωγή η ίδια ποσοστιαία αύξηση του K υποκαθιστά όλο μεγαλύτερη ποσοστιαία μείωση του L. Ειδικότερα:

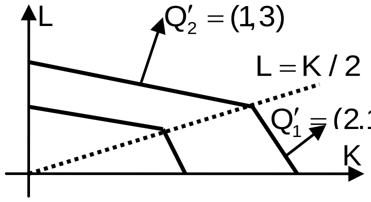
- 1% ***επιπλέον ποσότητα*** K ***είναι ισοδύναμη με (υποκαθιστά)*** $(\alpha/\beta)\%$ ***ποσότητα*** L***, διότι αμφότερες δίνουν την ίδια*** $\alpha\%$ ***επιπλέον ποσότητα*** Q***, οριακά.***
- $(1/\alpha)\%$ *επιπλέον ποσότητα* K *είναι ισοδύναμη με (υποκαθιστά)* $(1/\beta)\%$ *ποσότητα* L*, διότι αμφότερες δίνουν την ίδια* 1% *επιπλέον ποσότητα* Q*, οριακά.*

Παράδειγμα. Δίνουμε και ένα παράδειγμα μη κανονικής συνάρτησης παραγωγής. Υποθέτουμε ότι η παραγωγή ενός προϊόντος μπορεί να γίνει με δύο διαφορετικές διαδικασίες και αντίστοιχες συναρτήσεις παραγωγής:

$Q_1 = 2K + L$, $Q_2 = K + 3L$

Αν για κάθε συνδυασμό (K,L) χρησιμοποιείται η διαδικασία που δίνει μεγαλύτερη παραγωγή, τότε η συνάρτηση παραγωγής είναι:

$$Q = \max\{Q_1, Q_2\} = \begin{cases} Q_1 = 2K + L \text{ αν } 2K + L \geq K + 3L \Rightarrow L \leq K/2 \\ Q_2 = K + 3L \text{ αν } K + 3L \geq 2K + L \Rightarrow L \geq K/2 \end{cases}$$



Η συνάρτηση είναι κανονική ως προς την μονοτονία αλλά όχι ως προς την κυρτότητα. Είναι κυρτή και οιονεί κυρτή με τις κάτω σταθμικές κυρτές. Τώρα οι κάτω σταθμικές είναι κυρτές, και επομένως ακραίοι συνδυασμοί των συντελεστών είναι περισσότερο παραγωγικοί.

3. Βελτιστοποίηση στην παραγωγή

Σε μια παραγωγική διαδικασία με δύο συντελεστές παραγωγής $\{K,L\}$ με κόστος $C(K,L)$ και ένα παραγόμενο προϊόν σε ποσότητα $Q(K,L)$ που διατίθεται στην αγορά και αποφέρει έσοδο $R(Q) = R(K,L)$, εμφανίζονται τα παρακάτω προβλήματα περιορισμένης και ελεύθερης βελτιστοποίησης:

$\min\{C = C(K,L) \,||\, R = R(K,L) \geq r\}$, **ελάχιστο κόστος για έσοδο τουλάχιστον** r

$\max\{R = R(K,L) \,||\, C = C(K,L) \leq c\}$, **μέγιστο έσοδο για κόστος το πολύ** c

$\max\{\Pi = R(K,L) - C(K,L)\}$, **μέγιστο κέρδος**

Ειδικά στην περίπτωση που τα μοναδιαία κόστη των συντελεστών $\{v,w\}$ καθώς και η μοναδιαία τιμή του προϊόντος p είναι εξωγενώς καθορισμένα, όπως συμβαίνει σε συνθήκες **πλήρους ανταγωνισμού** στην αγορά των συντελεστών και των προϊόντων, τότε τα παραπάνω προβλήματα παίρνουν την μορφή:

$\min\{C = vK + wL \,||\, Q = Q(K,L) \geq q\}$,**ελάχιστο κόστος για παραγωγή τουλάχιστον** q

$\max\{Q(K,L) \,||\, C = vK + wL \leq c\}$, **μέγιστη παραγωγή για κόστος το πολύ** c

$\max\{\Pi = pQ(K,L) - vK - wL\}$, **μέγιστο κέρδος**

Υποθέτοντας, ως συνήθως, ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι αύξουσα χωρίς επίπεδα κορεσμού, τότε στα δύο πρώτα προβλήματα ο περιορισμός θα εξαντλείται, και μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις ανισότητες με ισότητες:

$\min\{C = vK + wL \,||\, Q = Q(K,L) = q\}$, **ελάχιστο κόστος για παραγωγή** q

$\max\{Q(K,L) \,||\, C = vK + wL = c\}$, **μέγιστη παραγωγή για κόστος** c

Παρατήρηση. Παραπάνω, αντικαταστήσαμε και την συνάρτηση εσόδου με την συνάρτηση παραγωγής:

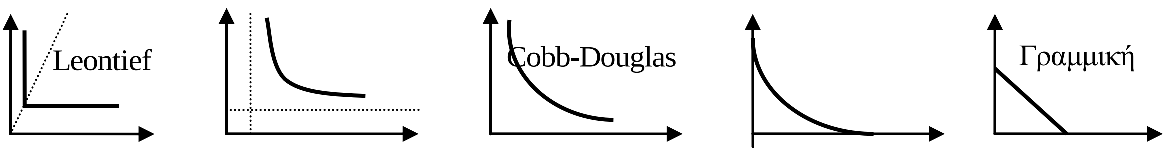
$R = pQ(K,L) \rightarrow Q = Q(K,L)$

Οι δύο συναρτήσεις είναι **μονότονα εξαρτημένες** και επομένως δίνουν την ίδια λύση.

▲

4. Παραγωγή Σταθερής Ελαστικότητας Υποκατάστασης (CES)

Αναφέρουμε και τις παρακάτω καμπύλες ισοπαραγωγής της σημαντικής κατηγορίας συναρτήσεων παραγωγής με **Σταθερή Ελαστικότητα Υποκατάστασης** (**C**onstant **E**lasticity of **S**ubstitution,**CES**). Αρχίζουμε με πλήρως συμπληρωματικούς συντελεστές παραγωγής (Leontief min) και καταλήγουμε σε πλήρως υποκατάστατους (γραμμικές), περνώντας από ενδιάμεσους βαθμούς συμπληρωματικότητας-υποκατάστασης που περιλαμβάνουν και τις C-D.



$\min\{K/\alpha, L/\beta\}$ $(\alpha K^{-\rho} + \beta L^{-\rho})^{-1/\rho}$, $\rho > 0$ $K^\alpha L^\beta$, $\alpha + \beta = 1$ $(\alpha K^\rho + \beta L^\rho)^{1/\rho}$, $0 < \rho < 1$ $\alpha K + \beta L$

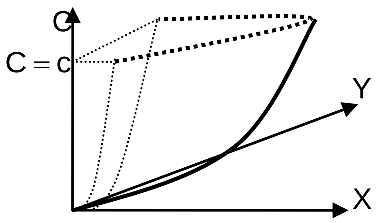
5. Δύο εκροές-παραγόμενα προϊόντα

Θεωρούμε μια σύνθετη παραγωγική διαδικασία με δύο παραγόμενα προϊόντα, π.χ. γεωργικά και κτηνοτροφικά, σε ποσότητες $\{X, Y\}$ με κόστος παραγωγής:

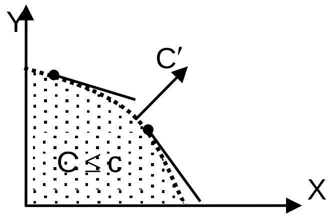
$$C = C(X, Y) \text{ όπου } X \geq 0, \ \ Y \geq 0$$

και με αντίστοιχα **οριακά κόστη** (marginal cost)**:**

$$\{C_X = \frac{\partial C}{\partial X}, C_Y = \frac{\partial C}{\partial Y}\}$$



συνάρτηση κόστους



καμπύλη ισοκόστους

Οι εξισώσεις υποκατάστασης που ορίζουν οι ισοσταθμικές της συνάρτησης κόστους καλούνται εξισώσεις **ισοκόστους** (isocost):

$$C(X, Y) = c$$

Αποτελούνται από τους συνδυασμούς των δύο προϊόντων που έχουν το ίδιο κόστος παραγωγής c. Γενικά, η συνάρτηση κόστους και οι καμπύλες ισοκόστους έχουν **συνήθως** την παραπάνω μορφή.

Ιδιότητες της συνάρτησης κόστους $C(X, Y)$

Μια συνάρτηση κόστους έχει ***συνήθως*** *τις παρακάτω ιδιότητες μονοτονίας και καμπυλότητας:*

1. *Είναι* ***γνήσια αύξουσα*** *με γνήσια θετικά οριακά κόστη, δηλαδή κάθε επιπλέον παραγωγή ενός προιόντος κοστίζει γνήσια περισσότερο:*

$$C_X > 0, C_Y > 0$$

2. *Ορίζει* ***αρνητικό και αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης,*** *δηλαδή για σταθερό κόστος, κάθε αύξηση στην παραγωγή ενός προϊόντος απαιτεί όλο και μεγαλύτερη μείωση στην παραγωγή του άλλου, οπότε* ***η συνάρτηση υποκατάστασης θα είναι φθίνουσα κοίλη,*** *όπως στο γράφημα:*

$$C(X, Y) = c \Rightarrow \begin{cases} Y = Y(X) \text{ με } Y'(X) < 0, Y''(X) \leq 0 \\ X = X(Y) \text{ με } X'(Y) < 0, X''(Y) \leq 0 \end{cases}$$

3. *Είναι οιονεί κυρτή, με* ***κυρτές τις κάτω σταθμικές****, δηλαδή οι ενδιάμεσοι συνδυασμοί των παραγόμενων προϊόντων έχουν μικρότερο κόστος από τους ακραίους, όπως στο γράφημα.*

4. *Είναι* ***κυρτή*** *με συνολικά αύξοντα οριακά κόστη. Ειδικότερα:* $C_{XX} \geq 0, C_{YY} \geq 0$

Για συναρτήσεις κόστους με τις παραπάνω ιδιότητες θα λέμε ότι είναι **κανονικές.** Οι **γραμμικές** με επίπεδα γραφήματα και ευθείες ισοκόστους θεωρούνται κανονικές. Ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες, αλλά όχι γνήσια.

Παρατήρηση. Πολλές από τις παραπάνω ιδιότητες συνδέονται μεταξύ τους όπως στην παραγωγή :
$\{1,2\} \Leftrightarrow \{1,3\}$*, μια αύξουσα συνάρτηση ορίζει αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης* $\Leftrightarrow$ *είναι οιονεί κυρτή.*
$4 \Rightarrow 3$*, μια κυρτή συνάρτηση είναι και οιονεί κυρτή.*
Αναλυτικά, η ιδιότητα 4 της κυρτότητας εκφράζεται με θετικά ημιορισμένο Εσσιανό πίνακα:

$$H_C \geq 0 \Rightarrow C_{XX} \geq 0, C_{YY} \geq 0, \Delta_C = |H_C| = C_{XX}C_{YY} - C_{XY}^2 \geq 0$$

Η ασθενέστερη ιδιότητα 3 της οιονεί κυρτότητας εκφράζεται με θετικά ημιορισμένο πλαισιωμένο Εσσιανό πίνακα, δηλαδή αρνητική πλαισιωμένη Εσσιανή ορίζουσα:

$$\tilde{H}_C \geq 0 \Rightarrow \tilde{\Delta}_C = |\tilde{H}_C| = -C_{XX}C_Y^2 + 2C_{XY}C_XC_Y - C_{YY}C_X^2 \leq 0$$

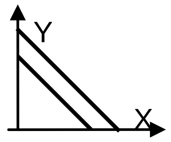
▲

6. Βασικές συναρτήσεις κόστους

Θα εξετάζουμε τρείς βασικούς τύπους κανονικών συναρτήσεων κόστους.

1. Γραμμική: $C = \alpha X + \beta Y$

Π.χ. μια έκταση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για παραγωγή γεωργικού προιόντος X **ή** κτηνοτροφικού προιόντος Y. Αν μια μονάδα γεωργικού προιόντος χρειάζεται α μονάδες έκτασης και μια μονάδα κτηνοτροφικού προιόντος χρειάζεται β μονάδες έκτασης, τότε για παραγωγή $\{X, Y\}$ μονάδων αντίστοιχα χρειάζονται $C = \alpha X + \beta Y$ μονάδες έκτασης. Παρατηρούμε ότι *το κόστος αναφέρεται γενικά σε χρήση συντελεστών παραγωγής που δεν είναι απαραίτητα χρήμα.* Λέμε ότι οι δύο εκροές είναι **πλήρως υποκατάστατες,** με καμπύλες ισοκόστους ευθείες και ρυθμό υποκατάστασης σταθερό:



$$C = \alpha X + \beta Y = c \Rightarrow \alpha dX + \beta dY = 0 \Rightarrow \frac{dY}{dX} = -\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1/\beta}{1/\alpha}$$

Παρατηρούμε ότι ο ρυθμός υποκατάστασης είναι αντιστρόφως ανάλογος του μοναδιαίου κόστους των δύο προιόντων. Όσο μεγαλύτερο είναι το μοναδιαίο κόστος α του X σε σχέση με το μοναδιαίο κόστος β του Y, η ίδια αύξηση του X απαιτεί όλο και μεγαλύτερη μείωση του Y, για σταθερό συνολικό κόστος. Ειδικότερα:

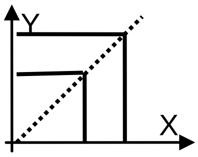
- 1 ***επιπλέον ποσότητα*** X ***είναι ισοδύναμη με (υποκαθιστά)*** α/β ***ποσότητα*** Y***, διότι αμφότερες έχουν το ίδιο*** α ***επιπλέον κόστος*** C **.**
- $1/\alpha$ *επιπλέον ποσότητα* X *είναι ισοδύναμη με (υποκαθιστά)* $1/\beta$ *ποσότητα* Y*, διότι αμφότερες έχουν το ίδιο* 1 *επιπλέον κόστος* C.

β *επιπλέον ποσότητα* X *είναι ισοδύναμη με (υποκαθιστά)* α *ποσότητα* Y*, διότι αμφότερες έχουν το ίδιο* $\alpha\beta$ *επιπλέον ποσότητα* C.

2. Leontief max: $C = \max\{X/\alpha, Y/\beta\}$.

Π.χ. αν μια μονάδα κάποιας τροφής παρέχει α μονάδες θερμίδων **και** β μονάδες βιταμινών, τότε για την πρόσληψη $\{X, Y\}$ μονάδων θερμίδων και βιταμινών αντίστοιχα απαιτούνται $C = \max\{X/\alpha, Y/\beta\}$ μονάδες της τροφής, διότι απαιτείται η μεγαλύτερη ποσότητα.

Λέμε ότι οι δύο εκροές είναι **πλήρως συμπληρωματικές,** με την έννοια ότι παράγονται σε σταθερή αναλογία με ρυθμό υποκατάστασης μηδενικό ή άπειρο, δηλαδή χωρίς δυνατότητα υποκατάστασης:

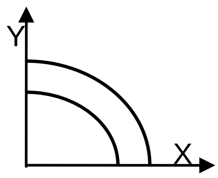


$$C = \max\left\{\frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta}\right\} = \begin{cases} X/\alpha \text{ αν } X/\alpha \geq L/\beta \\ Y/\beta \text{ αν } Y/\beta \leq X/\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \begin{cases} \infty \text{ αν } X/\alpha \leq Y/\beta \\ 0 \text{ αν } Y/\beta \leq X/\alpha \end{cases}$$

3. Τετραγωνική συνάρτηση: $C = \alpha X^2 + \beta Y^2$ με $\alpha > 0, \beta > 0$.

Βρίσκεται ανάμεσα από τις δύο προηγούμενες με ρυθμό υποκατάστασης:

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{C_X}{C_Y} = -\frac{2\alpha X}{2\beta Y} = -\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{Y}{X}\right)^{-1}$$



Τώρα εκτός από τους συντελεστές $\{\alpha, \beta\}$ παίζουν ρόλο και οι συμμετοχές $\{X, Y\}$. Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει η συμμετοχή του X σε σχέση με την συμμετοχή του Y, τόσο μεγαλύτερος είναι ο παραπάνω ρυθμός υποκατάστασης, δηλαδή για σταθερό κόστος η ίδια αύξηση του X απαιτεί όλο και μεγαλύτερη μείωση του Y. Ειδικότερα:

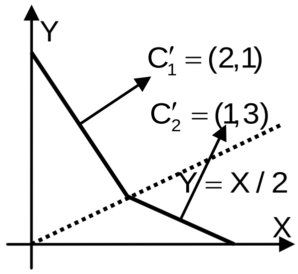
- ***Για σταθερό κόστος, ο ρυθμός υποκατάστασης είναι αντιστρόφως ανάλογος του λόγου συμμετοχής των δύο προϊόντων.***

Παράδειγμα. Δίνουμε ένα παράδειγμα μη κανονικής συνάρτησης κόστους. Δύο προϊόντα παράγονται σε ποσότητες $\{X, Y\}$ με δύο διαφορετικές διαδικασίες, και αντίστοιχο κόστος:

$$C_1 = 2X + Y,\ C_2 = X + 3Y$$

Αν χρησιμοποιείται κάθε φορά η διαδικασία με το μικρότερο κόστος, η τελική συνάρτηση κόστους θα είναι :

$$C = \min\{C_1, C_2\} = \begin{cases} C_1 = 2X + Y \text{ αν } 2X + Y \le X + 3Y \Rightarrow Y \ge X/2 \\ C_2 = X + 3Y \text{ αν } X + 3Y \le 2X + Y \Rightarrow Y \le X/2 \end{cases}$$



Η συνάρτηση είναι κανονική ως προς την μονοτονία αλλά όχι ως προς την κυρτότητα. Οι πάνω σταθμικές, αντί των κάτω, είναι κυρτές και επομένως ενδιάμεσοι συνδυασμοί των $\{X, Y\}$ έχουν μεγαλύτερο κόστος από τους ακραίους, όπως διαπιστώνουμε στο γράφημα.

7. Βελτιστοποίηση στο κόστος

Σε μια σύνθετη παραγωγική διαδικασία με δύο παραγόμενα προϊόντα $\{X, Y\}$ που έχουν κόστος $C(X, Y)$ και αποφέρουν έσοδο $R(X, Y)$, εμφανίζονται τα παρακάτω προβλήματα βελτιστοποίησης:

$\max\{R = R(X, Y) \,||\, C(X, Y) \le c\}$, **μέγιστο έσοδο για κόστος το πολύ** c

$\min\{C = C(X, Y) \,||\, R = R(X, Y) \ge r\}$, **ελάχιστο κόστος για έσοδο τουλάχιστον** r

$\max\{\Pi = R(X, Y) - C(X, Y)\}$, **μέγιστο κέρδος**

Ειδικά στην περίπτωση που οι μοναδιαίες τιμές των προϊόντων $\{v, w\}$ είναι εξωγενώς καθορισμένες, όπως συμβαίνει σε συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού στην αγορά των προϊόντων, τότε τα προβλήματα αυτά παίρνουν την παρακάτω μορφή:

$\max\{R = vX + wY \,||\, C(X, Y) \le c\}$, **μέγιστο έσοδο για κόστος το πολύ** c

$\min\{C = C(X, Y) \,||\, R = vX + wY \ge r\}$, **ελάχιστο κόστος για έσοδο τουλάχιστον** r

$\max\{\Pi = vX + wY - C(X, Y)\}$, **μέγιστο κέρδος**

Παρατήρηση. Σε όλα τα παραπάνω προβλήματα περιορισμένης βελτιστοποίησης **συνήθως** μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις ανισότητες στους περιορισμούς με τις αντίστοιχες ισότητες:

$\max\{R = R(X, Y) \,||\, C(X, Y) = c\}$, **μέγιστο έσοδο για κόστος** c

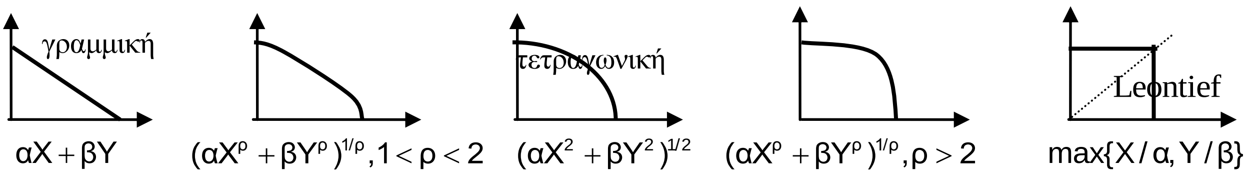
$\min\{C = C(X, Y) \,||\, R = (X, Y) = r\}$, **ελάχιστο κόστος για έσοδο** r

Αυτό ισχύει εφόσον οι συναρτήσεις είναι γνήσια αύξουσες οπότε **στη βέλτιστη λύση εξαντλείται ο περιορισμός.** .

▲

8. Κόστος Σταθερής Ελαστικότητας Υποκατάστασης (CES)

Αναφέρουμε και τις παρακάτω καμπύλες ισοκόστους μιας σημαντικής κατηγορίας συναρτήσεων κόστους με **Σταθερή Ελαστικότητα Υποκατάστασης** (**C**onstant **E**lasticity of **S**ubstitution,**CES**). Αρχίζουμε με πλήρως υποκατάστατα προιόντα (γραμμική) και καταλήγουμε σε πλήρως συμπληρωματικά (Leontief max), περνώντας από ενδιάμεσους βαθμούς υποκατάστασης-συμπληρωματικότητας, περιλαμβανομένης της τετραγωνικής.



▲

9. Μη αγαθά

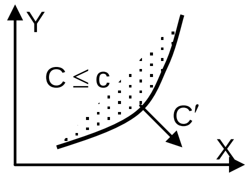
Τα παραγόμενα προϊόντα δεν είναι πάντοτε «αγαθά». Π.χ. στη διαδικασία παραγωγής ενός προϊόντος, εκτός από το παραγόμενο αγαθό $\{X\}$ μπορεί να έχουμε και παραγωγή **ρύπου** $\{Y\}$ που είναι «**μη αγαθό**». Αύξηση του ρύπου συνοδεύεται συνήθως από μείωση του κόστους, π.χ. λόγω μη χρήσης αντιρρυπαντικής τεχνολογίας. Σαυτή την περίπτωση η συνάρτηση κόστους:

$$C = C(X, Y),$$

θα έχει γενικά τις παρακάτω ιδιότητες, όπως φαίνεται και στο γράφημα.

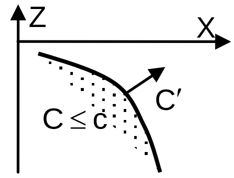
1. Είναι μη κανονική ως προς την μονοτονία, και η καμπύλη ισοκόστους έχει θετική κλίση:

$$\{C_X > 0,\ C_Y < 0\} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = -\frac{C_X}{C_Y} > 0$$



Αντί υποκατάστασης έχουμε **αντιστάθμιση.** Αυξάνοντας την παραγωγή μπορούμε να διατηρήσουμε το κόστος αυξάνοντας και τον παραγόμενο ρύπο.

2. Συνήθως είναι κανονική ως προς την καμπυλότητα, οιονεί κυρτή, με την κάτω σταθμική $C \le c$ κυρτή, οπότε ενδιάμεσοι συνδυασμοί παραγωγής και ρύπων έχουν μικρότερο κόστος από τους αντίστοιχους ακραίους συνδυασμούς. Έχει αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης (αντιστάθμισης) της παραγωγής από τον ρύπο, με την έννοια ότι για σταθερό κόστος κάθε επιπλέον αύξηση της παραγωγής X απαιτεί όλο και μεγαλύτερη αύξηση του παραγόμενου ρύπου Y.



3. Αν αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή του ρύπου που είναι μη αγαθό με το αρνητικό του $Z = -Y \Rightarrow Y = -Z$ που είναι αγαθό, τότε η συνάρτηση κόστους θα είναι κανονική και ως προς τη μονοτονία και ως προς την κυρτότητα, αλλά τώρα θα ορίζεται στο αρνητικό του κατακόρυφου ημιάξονα. **Π.χ.**

$$C = X^2 - Y \Rightarrow C = X^2 + Z \text{ με } X \ge 0,\ Z \le 0$$

ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ

10. Δύο εισροές-καταναλωτικά αγαθά

Θεωρούμε κατανάλωση δύο αγαθών όπου μεταξύ των διαφόρων συνδυασμών κατανάλωσης $\{X, Y\}$ υπάρχει μια σχέση προτίμησης, για την οποία υποθέτουμε ότι εκφράζεται μέσω μιας **συνάρτησης χρησιμότητας** (utility function) που «μετράει» την παραγόμενη χρησιμότητα:

$$U = U(X, Y)$$

Η συνάρτηση χρησιμότητας καθορίζει μια **σχέση προτίμησης** (preference relation) μεταξύ των συνδυασμών $\{X, Y\}$. Οι ισοσταθμικές της συνάρτησης χρησιμότητας καλούνται εξισώσεις **αδιαφορίας** (indifference):

$$U(X, Y) = u$$

Ο καταναλωτής είναι **αδιάφορος** (indifferent) μεταξύ συνδυασμών που βρίσκονται στην ίδια ισοσταθμική, ενώ **προτιμάει** (prefers) τους συνδυασμούς που βρίσκονται στη αντίστοιχη πάνω σταθμική. Γράφουμε:

$(x_1, y_1) \approx (x_2, y_2) \Leftrightarrow U(x_1, y_1) = U(x_2, y_2)$, **συνδυασμοί με την ίδια προτίμηση**

$(x_1, y_1) \succ (x_2, y_2) \Leftrightarrow U(x_1, y_1) > U(x_2, y_2)$, **ο πρώτος συνδυασμός είναι (γνήσια) προτιμότερος**

Γενικά η συνάρτηση χρησιμότητας έχει μαθηματικές ιδιότητες αντίστοιχες της συνάρτησης παραγωγής όπου τα δύο αγαθά αντιστοιχούν στους συντελεστές παραγωγής. Υπάρχουν όμως και διαφορές που οφείλονται κυρίως στο γεγονός ότι η συνάρτηση χρησιμότητας μπορεί να μην εκφράζει κάποιο άμεσα μετρήσιμο μέγεθος. Μάλιστα, αν ο μοναδικός ρόλος της είναι να εκφράζει τη σχέση προτίμησης μεταξύ διαφόρων συνδυασμών, τότε λέμε ότι δύο συναρτήσεις χρησιμότητας $U(X, Y)$ και $V(X, Y)$, είναι μονότονα ή **διατακτικά ισοδύναμες** (order equivalent), με την έννοια ότι ορίζουν την ίδια σχέση προτίμησης, αν η κάθε μια είναι γνήσια αύξων μετασχηματισμός της άλλης:

$$V = V(U) \text{ με } V'(U) > 0$$

Έτσι: *δύο συναρτήσεις χρησιμότητας είναι ισοδύναμες ως προς τη σχέση προτίμησης αν έχουν τις ίδιες ισοσταθμικές, με την ίδια διάταξη, ανεξάρτητα των τιμών τους.* Σαυτό το πλαίσιο βασικές θεωρούνται μόνο οι ιδιότητες που διατηρούνται όταν πάρουμε έναν γνήσια αύξοντα μετασχηματισμό της συνάρτησης χρησιμότητας, δηλαδή **βασικές θεωρούνται οι ιδιότητες των καμπύλων αδιαφορίας και όχι της ίδιας της συνάρτησης χρησιμότητας.** Ειδικότερα:

1. Οι τιμές της χρησιμότητας U, και ειδικά τα πρόσημα της δεν είναι βασικά μεγέθη. Γενικά η συνάρτηση χρησιμότητας μπορεί να έχει και αρνητικές τιμές.

2. Οι οριακές χρησιμότητες $\{U_X, U_Y\}$ είναι βασικές μόνο ως προς τα πρόσημά τους και όχι ως προς τις συγκεκριμένες τιμές τους. Αλλά ο λόγος τους αφορά τον ρυθμό υποκατάστασης μεταξύ των αγαθών και ισούται με την κλίση της ισοσταθμικής που είναι βασικό μέγεθος. Πράγματι, δύο διατακτικά ισοδύναμες συναρτήσεις χρησιμότητας ορίζουν τον ίδιο ρυθμό υποκατάστασης:

$$V = V(U) \text{ με } V'(U) > 0 \Rightarrow \{V_x = V'U_x, V_Y = V'U_Y\} \text{ με } \frac{V_X}{V_Y} = \frac{U_X}{U_Y}$$

3. Οι ιδιότητες κυρτότητας των ισοσταθμικών καθώς και των σταθμικών περιοχών είναι βασικά μεγέθη.

Στο παραπάνω πλαίσιο, μια συνάρτηση χρησιμότητας θα λέγεται **κανονική ως προς τη σχέση προτίμησης**, αν έχει τις παρακάτω ιδιότητες των ισοσταθμικών της, αντίστοιχες με αυτές της συνάρτησης παραγωγής:

1. *Είναι **αύξουσα**, με θετικά οριακά προϊόντα:*

$$U_X \geq 0,\ U_Y \geq 0$$

2. *Έχει αρνητικό και **φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης,** δηλαδή η συνάρτηση υποκατάστασης μεταξύ των δύο αγαθών είναι φθίνουσα κυρτή**:***

$$U(X, Y) = u \Rightarrow \{Y'(X) \leq 0\ , Y''(X) \geq 0\}\ \&\ \{X'(Y) \leq 0,\ X''(Y) \geq 0\}$$

3. *Είναι οιονεί κοίλη, με **κυρτές τις πάνω σταθμικές,** δηλαδή υπάρχει προτίμηση για ενδιάμεσους συνδυασμούς ποσοτήτων κατανάλωσης παρά για ακραίους.*

Σε πολλές περιπτώσεις η χρησιμότητα ποσοτικοποιείται. Συνήθως ποσοτικοποιείται όχι η ίδια η χρησιμότητα αλλά η διαφορά της από κάποια κατανάλωση αναφοράς: $\{X_0, Y_0\}$. Σαυτή την περίπτωση η κατανάλωση αναφοράς και η μονάδα μέτρησης της χρησιμότητας συνήθως ορίζονται συμβατικά, οπότε λέμε ότι δύο συναρτήσεις χρησιμότητας $U(X,Y)$ και $V(X,Y)$ είναι **γραμμικά ισοδύναμες** (linearly equivalent) αν η μια είναι αύξων γραμμικός μετασχηματισμός της άλλης:

$$V = \alpha U + \beta \quad \text{με} \quad \alpha > 0$$

Σε κάθε περίπτωση, σε αντίθεση με τις συναρτήσεις παραγωγής, μια συνάρτησης χρησιμότητας:

- μπορεί να έχει και αρνητικές τιμές.
- **συχνά** εμφανίζει και φαινόμενα κορεσμού, οπότε μετά από ένα επίπεδο κατανάλωσης το αγαθό μπορεί να γίνεται και βλαβερό με αρνητική οριακή χρησιμότητα.

Παράδειγμα. Οι συναρτήσεις χρησιμότητας, **C-D** και **λογαριθμικές C-D**:

$$U = X^\alpha Y^\beta \;,\; V = \ln(X^\alpha Y^\beta) = \alpha \ln X + \beta \ln Y \quad \text{με } \alpha > 0 \,, \beta > 0$$

είναι διατακτικά ισοδύναμες ως προς την σχέση προτίμησης, με την έννοια ότι η κάθε μια είναι αύξων μετασχηματισμός της άλλης. Έχουν τις γνωστές ισοσταθμικές των συναρτήσεων τύπου C-D και είναι αμφότερες οιονεί κοίλες, δηλαδή έχουν τις πάνω σταθμικές κυρτές. Αλλά η πρώτη παίρνει μόνο θετικές τιμές ενώ η δεύτερη παίρνει και αρνητικές τιμές.

11. Βελτιστοποίηση στην κατανάλωση

Στην κατανάλωση δύο αγαθών $\{X, Y\}$ με συνάρτηση χρησιμότητας $U(X,Y)$ και συνάρτηση κόστους $C(X,Y)$, εμφανίζονται τα παρακάτω δύο προβλήματα **βελτιστοποίησης με περιορισμούς:**.

$\min\{C = C(X,Y) \,||\, U(X,Y) \geq u\}$, **ελάχιστη δαπάνη για χρησιμότητα τουλάχιστον** u

$\max\{U = U(X,Y) \,||\, C(X,Y) \leq c\}$, **μέγιστη χρησιμότητα για δαπάνη το πολύ** c

Αν η χρησιμότητα ποσοτικοποιείται, π.χ. αν εκφράζει την δαπάνη που θα ήταν διατεθειμένος να καταβάλει ο καταναλωτής για την συγκεκριμένη κατανάλωση, τότε έχουμε και το πρόβλημα μεγιστοποίησης του **οφέλους** ή του **πλεονάσματος,** σε αντιστοιχία με το πρόβλημα μεγιστοποίησης του κέρδους:

$\max\{B = U(X,Y) - C(X,Y)\}$, **μέγιστο όφελος**

Αν έχουμε πλήρως ανταγωνιστική αγορά αγαθών με δοσμένες μοναδιαίες τιμές $\{v, w\}$ τότε τα παραπάνω προβλήματα βελτιστοποίησης παίρνουν την μορφή:

$$\min\{C = vX + wY \,||\, U(X,Y) \geq u\}$$

$$\max\{U = U(X,Y) \,||\, C = vX + wY \leq c\}$$

$$\max\{B = U(X,Y) - (vX + wY)\}$$

Στα παραπάνω προβλήματα περιορισμένης βελτιστοποίησης συνήθως μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις ανισότητες στους περιορισμούς με τις αντίστοιχες ισότητες, οπότε θα έχουμε:

$\min\{C = vX + wY \,||\, U(X,Y) = u\}$, **ελάχιστη δαπάνη για χρησιμότητα** u

$\max\{U = U(X,Y) \,||\, C = vX + wY = c\}$, **μέγιστη χρησιμότητα για δαπάνη** c

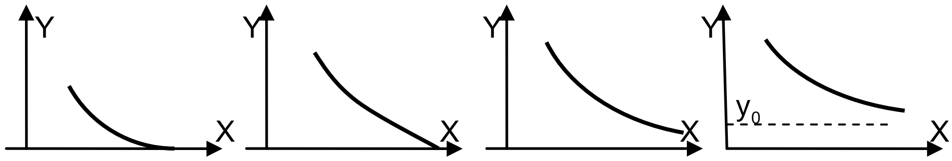
Αυτό ισχύει εφόσον βρισκόμαστε σε επίπεδα κατανάλωσης στα οποία η συνάρτηση χρησιμότητας είναι γνήσια αύξουσα, οπότε στη βέλτιστη λύση εξαντλείται ο περιορισμός. Σε ειδικές περιπτώσεις αυτό μπορεί να μην ισχύει. Π.χ. **για υψηλά επίπεδα κατανάλωσης, αν υπάρχει κορεσμός τότε μπορεί να μην εξαντλείται η δυνατότητα δαπάνης και το βέλτιστο να είναι εσωτερικό.**

Παρατήρηση. Υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ προβλημάτων βελτιστοποίησης στην κατανάλωση και προβλημάτων βελτιστοποίησης στην παραγωγή όπου τα καταναλωτικά αγαθά αντιστοιχούν στους συντελεστές παραγωγής και η συνάρτηση χρησιμότητας στην συνάρτηση εσόδου. Αναφέρουμε επίσης ότι *στα προβλήματα* ***βελτιστοποίησης με περιορισμούς*** *η λύση δεν αλλάζει αν χρησιμοποιήσουμε άλλη διατακτικά ισοδύναμη συνάρτηση χρησιμότητας που προκύπτει με γνήσια αύξοντα μετασχηματισμό, διότι θα έχει τις ίδιες ισοσταθμικές ως καμπύλες αδιαφορίας.*

▲

12. Καμπύλες αδιαφορίας

Εξετάζουμε παρακάτω κάποιες χαρακτηριστικές περιπτώσεις όσον αφορά την υποκατάσταση, καθώς μειώνεται η συμμετοχή του ενός αγαθού, π.χ. του $Y-$αγαθού και η καμπύλη αδιαφορίας πλησιάζει τον $X-$άξονα. Υποθέτουμε κανονική συνάρτηση χρησιμότητας, αύξουσα με φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης.



καμπύλες αδιαφορίας

1. Στα δύο πρώτα η καμπύλη αδιαφορίας τέμνει τον $X-$άξονα, που σημαίνει ότι το Y αγαθό μπορεί να υποκατασταθεί πλήρως από το X αγαθό. Ο ρυθμός υποκατάστασης μπορεί να τείνει στο μηδέν όπως στο πρώτο γράφημα ή να παραμένει φραγμένος από κάτω όπως στο δεύτερο γράφημα.
2. Στα δύο τελευταία η καμπύλη αδιαφορίας δεν τέμνει τον $X-$άξονα, οπότε το X αγαθό δεν μπορεί να υποκαταστήσει πλήρως το Y αγαθό. Καθώς το Y μειώνεται η διατήρηση της χρησιμότητας απαιτεί απεριόριστη αύξηση της συμμετοχής του X. Σαυτή την περίπτωση μπορεί η συμμετοχή του Y να τείνει οριακά στο μηδέν όπως στο τρίτο γράφημα ή να απαιτείται πάντοτε μια ελάχιστη $Y-$ποσότητα y_0 όπως στο τέταρτο γράφημα.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τις παρακάτω συναρτήσεις χρησιμότητες στη θετική περιοχή:
1. $U=\sqrt{X}+\sqrt{Y}$, με καμπύλες αδιαφορίας όπως στο πρώτο γράφημα ως προς αμφότερα τα αγαθά.
2. $U=(X^{-1}+Y^{-1})^{-1}$, με καμπύλες όπως στο τέταρτο γράφημα, ως προς αμφότερα τα αγαθά.
3. $U=\ln(X-x_0)^{\alpha}(Y-y_0)^{\beta}=\alpha\ln(X-x_0)+\beta\ln(Y-y_0)$, με καμπύλες αδιαφορίας τις υπερβολές:

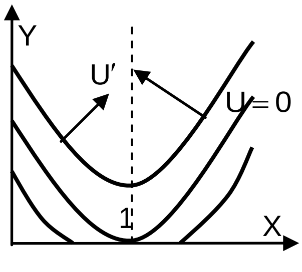
$$(X-x_0)^{\alpha}(Y-y_0)^{\beta}=c$$, με ασύμπτωτες τις ευθείες: $Y=y_0$, $X=x_0$

Με κατάλληλη επιλογή του πρόσημου των $\{x_0,y_0\}$, μπορούμε να πετύχουμε οιαδήποτε από τις συμπεριφορές στα τελευταία τρία γραφήματα παραπάνω.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση χρησιμότητας:

$$U=-(X-1)^2+Y$$

με τις παραβολικές ισοσταθμικές του παραπλεύρως σχήματος:



$$U=-(X-1)^2+Y=u\Rightarrow Y=u+(X-1)^2$$

και μερικές παραγώγους:

$$U_Y=1>0,\ U_X=-2(X-1)<0 \text{ αν } X>1$$

Το $X=1$ είναι ποσότητα κορεσμού και γίνεται **μη αγαθό** για $X>1$. Για $X\leq 1$ οι ισοσταθμικές έχουν την συνηθισμένη αρνητική κλίση, ενώ για $X\geq 1$ έχουν θετική κλίση, και αν αυξηθεί η μία κατανάλωση πρέπει να αυξηθεί και η άλλη για αντιστάθμιση. Είναι όμως κανονική ως προς την κυρτότητα, και είναι οιονεί κοίλη με τις πάνω σταθμικές κυρτές. Δηλαδή, υπάρχει προτίμηση για ενδιάμεσους συνδυασμούς κατανάλωσης παρά για ακραίους. Παρατηρούμε επίσης ότι παίρνει και αρνητικές τιμές, με μηδενική ισοσταθμική την παραβολή.

$$U=-(X-1)^2+Y=0\Rightarrow Y=(X-1)^2$$

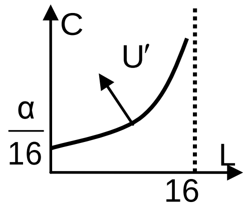
Παρατήρηση. Μια συνάρτηση χρησιμότητας θα είναι **μη κανονική** ως προς την κυρτότητα, δηλαδή με τις κάτω σταθμικές κυρτές αντί των πάνω, όταν **δύο αγαθά είναι ασύμβατα** και δεν συνδυάζονται. Σαυτή την περίπτωση υπάρχει προτίμηση για ακραίους συνδυασμούς, παρά για ενδιάμεσους, δηλαδή υπάρχει προτίμηση για κατανάλωση μόνο του ενός ή μόνο του άλλου. Σαν συνέπεια η συνάρτηση χρησιμότητας θα έχει χαμηλότερες τιμές στους ενδιάμεσους συνδυασμούς, δηλαδή θα έχει τις κάτω σταθμικές κυρτές, και θα είναι οιονεί κυρτή αντί να είναι οιονεί κοίλη.

▲

13. Λογαριθμική χρησιμότητα τύπου Stone-Geary

Ένας εργαζόμενος εργάζεται L ώρες ημερησίως, και έχει διαθέσιμο για κατανάλωση ποσό C ημερησίως, με συνάρτηση χρησιμότητας:

$$U = \ln[(16-L)C] = \ln(16-L) + \ln C \ \text{με}\ 0 \le L \le 16 \Rightarrow \begin{cases} U_L = -1/(16-L) < 0 \\ U_C = 1/C > 0 \end{cases}$$



Καλείται **λογαριθμική χρησιμότητα τύπου Stone-Geary,** και έχει τις εξής ιδιότητες μονοτονίας και κυρτότητας, όπως φαίνεται και στο γράφημα:

1. Είναι $L-$φθίνουσα (**μη αγαθό**), αλλά $C-$αύξουσα (**αγαθό**), με καμπύλες αδιαφορίας:

$$C(16-L) = \alpha \Rightarrow C = \frac{\alpha}{16-L},\ \{0 \le C,\ 0 \le L \le 16\},\ \alpha > 0$$

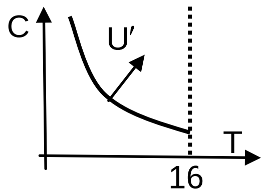
Έχουν θετική κλίση και ορίζουν αντιστάθμιση. **Η αύξηση της εργασίας αντισταθμίζεται με αύξηση της κατανάλωσης.**

2. Είναι οιονεί κοίλη με τις πάνω σταθμικές κυρτές, οπότε **ενδιάμεσοι συνδυασμοί κατανάλωσης-εργασίας είναι προτιμότεροι από ακραίους** όπου η εργασία και η κατανάλωση είναι αμφότερα πολύ μικρά ή αμφότερα πολύ μεγάλα.

3. Καθώς η εργασία αυξάνει πλησιάζοντας ασυμπτωτικά το πάνω όριο $L \to 16$, όλο και περισσότερη κατανάλωση απαιτείται για να αντισταθμίσει επιπλέον εργασία. Δηλαδή **έχει** αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης (αντιστάθμισης) της εργασίας με κατανάλωση. **Κάθε επιπλέον αύξηση της εργασίας αντισταθμίζεται με όλο και μεγαλύτερη αύξηση της κατανάλωσης.**

Παρατήρηση. Αν αντί της εργασίας L που είναι μη αγαθό, χρησιμοποιήσουμε την **σχόλη:**

$$T = 16 - L$$



που είναι αγαθό, τότε η συνάρτηση χρησιμότητας παίρνει κανονική μορφή:

$$U = \ln[TC] = \ln T + \ln C \ \text{με}\ C \ge 0,\ 0 \le T \le 16 \Rightarrow \begin{cases} U_L = 1/T > 0 \\ U_C = 1/C > 0 \end{cases}$$

και οι καμπύλες αδιαφορίας έχουν το κανονικό σχήμα παραπλεύρως.