

ΜΕΡΟΣ 0

ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ

0α.1 Σύνολα

1. Η έννοια του συνόλου και η σχέση του 'ανήκειν'.

Ο εποπτικοδιαισθητικός «ορισμός» που έδωσε ο Γερμανός μαθηματικός Georg Cantor (1845-1918), ο πρώτος που αποπειράθηκε να διαμορφώσει μία συστηματική θεωρία για το ζήτημα, συνιστά μία εύλογη περιγραφή της έννοιας του «συνόλου»:

► **Σύνολο** είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διάνοησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

Στα σύγχρονα μαθηματικά το «σύνολο» συνήθως αντιμετωπίζεται ως μία πρωτογενής έννοια (primitive), που τίθεται αξιωματικά εξ' αρχής (όπως, λόγου χάρη, η έννοια του «σημείου» στη Γεωμετρία).

Τα αντικείμενα που απαρτίζουν κάποιο σύνολο ονομάζονται *στοιχεία* του συνόλου. Για ένα στοιχείο α ενός τυχόντος συνόλου A λέμε ότι το α *ανήκει* στο A και συμβολίζουμε:

$$\alpha \in A ,$$

ενώ, αν θέλουμε να δηλώσουμε ότι κάποιο άλλο αντικείμενο β δεν περιέχεται στο εν λόγω σύνολο, γράφουμε:

$$\beta \notin A .$$

Υπάρχουν βασικά δύο τρόποι για να οριστεί ένα σύνολο:

- Όταν δίνονται όλα τα στοιχεία του και είναι σχετικά λίγα σε πλήθος, τότε γράφουμε τα στοιχεία αυτά μεταξύ δύο αγκίστρων, χωρίζοντάς τα με κόμμα. Έτσι, π.χ., αν το σύνολο A έχει ως στοιχεία τους αριθμούς -2 , 13 και 196 , γράφουμε:

$$A = \{-2, 13, 196\} .$$

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε έναν παρόμοιο συμβολισμό και για σύνολα που έχουν πολλά ή άπειρα στοιχεία, γράφοντας μερικά μόνο από αυτά και αποσιωπώντας τα υπόλοιπα, αρκεί να είναι σαφές ποια είναι αυτά που παραλείπονται. Έτσι για παράδειγμα το σύνολο B των άρτιων φυσικών από το 1 μέχρι το 100 , μπορεί να δοθεί ως:

$$B = \{2, 4, 6, \dots, 100\} .$$

Ο παραπάνω τρόπος ορισμού ενός συνόλου χαρακτηρίζεται με τον όρο *παράσταση του συνόλου με αναγραφή των στοιχείων του*.

Προσοχή: Η σειρά αναγραφής των στοιχείων δεν παίζει κανένα ρόλο, αλλά δεν θα πρέπει κάποιο στοιχείο να αναγράφεται πάνω από μία φορά.

Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω, π.χ., για το σύνολο

$$A = \{\alpha, \beta, \gamma, 4, 6, -\sqrt{3}\} \text{ μπορούμε να γράψουμε } \gamma \in A, \text{ ενώ } 7 \notin A .$$

Προβλέπουμε, για θεωρητικούς λόγους (στον αφηρημένο κόσμο των μαθηματικών), ακόμα και ένα σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Το σύνολο αυτό ονομάζεται *κενό σύνολο* και συμβολίζεται με:

$$\emptyset \quad \text{ή} \quad \{ \} .$$

- Αν τα στοιχεία ενός συνόλου τα προσδιορίζει επαρκώς μία συγκεκριμένη ιδιότητα, το σύνολο μπορεί να δοθεί με τη δήλωση της ιδιότητας αυτής. Αν ονομάσουμε την ιδιότητα με I τότε το σύνολο A όλων των στοιχείων x που έχουν αυτήν την ιδιότητα δίνεται ως εξής:

$$A = \{x \mid x \text{ έχει την ιδιότητα } I\} \quad \text{ή} \quad A = \{x : x \text{ έχει την ιδιότητα } I\} .$$

Για παράδειγμα, το σύνολο των περιττών φυσικών θα είναι:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k + 1 \text{ με } k \in \mathbb{N}\} .$$

Ο τρόπος αυτός παράστασης ενός συνόλου χαρακτηρίζεται με τον όρο *παράσταση του συνόλου με περιγραφή των στοιχείων του*.

2. Πληθάριθμος συνόλου, πεπερασμένα σύνολα και απειροσύνολα.

Το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου ονομάζεται *πληθάριθμος* του συνόλου. Αν το πλήθος είναι κάποιος φυσικός αριθμός τότε μιλάμε για ένα *πεπερασμένο σύνολο*. Αν το σύνολο περιέχει άπειρο πλήθος στοιχείων κάνουμε λόγο για ένα *απειροσύνολο*.

Τα γνωστά μας σύνολα:

- Το σύνολο των φυσικών αριθμών: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Το σύνολο των ακεραίων αριθμών: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$
- Το σύνολο των ρητών αριθμών:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \text{τα κλάσματα } \frac{\alpha}{\beta} : \alpha \in \mathbb{Z} \text{ και } \beta \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

(όπου $\mathbb{Z}^*$ το σύνολο των ακεραίων χωρίς το 0)

- Το σύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$, που απαρτίζεται από όλους τους ρητούς στους οποίους προστίθενται όλοι οι άρρητοι αριθμοί (δηλ. όσοι αριθμοί δεν μπορούν να γραφούν σε δεκαδική μορφή, όπως για παράδειγμα το $\sqrt{2}$ ή ο γνωστός μας από τη γεωμετρία αριθμός π),

είναι όλα απειροσύνολα.

3. Σχέσεις μεταξύ δύο συνόλων.

Δύο σύνολα A και B ονομάζονται *ίσα* αν και μόνον αν κάθε στοιχείο του A ανήκει στο B και κάθε στοιχείο του B ανήκει στο A. Ουσιαστικά, τα ίσα σύνολα απαρτίζονται από τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Γράφουμε τότε

$$A = B \quad .$$

Ένα σύνολο B λέγεται *υποσύνολο* ενός συνόλου A αν και μόνον αν όλα τα στοιχεία του B ανήκουν στο A. Τότε συμβολίζουμε:

$$B \subseteq A \quad .$$

Στην παραπάνω σχέση δεν αποκλείεται το B να είναι και ίσο με το A.

Αν τα παραπάνω σύνολα δεν είναι ίσα, δηλ. υπάρχουν στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B , λέμε ότι το B είναι *γνήσιο υποσύνολο* του A και συμβολίζουμε: $B \subset A$.

Κατά σύμβαση θεωρούμε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου, δηλ. για κάθε σύνολο A ισχύει $\emptyset \subseteq A$.

4. Πράξεις με σύνολα.

- Για δύο οποιαδήποτε σύνολα A και B , το σύνολο που απαρτίζεται από τα κοινά στοιχεία των A και B ονομάζεται *τομή* των δύο συνόλων και συμβολίζεται:

$$A \cap B.$$

Παράδειγμα.

Αν $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, 12, -\sqrt{3}\}$ και $B = \{\beta, \gamma, \epsilon, \zeta, 13, \frac{3}{5}, \sqrt{7}\}$, η τομή τους θα είναι $A \cap B = \{\beta, \gamma\}$.

Αν δεν υπάρχουν κοινά στοιχεία για κάποια σύνολα A και B , δηλ. όταν η τομή τους είναι το κενό σύνολο ($A \cap B = \emptyset$), τότε αυτά ονομάζονται *ξένα* μεταξύ τους σύνολα.

- Το σύνολο που απαρτίζεται από όλα τα στοιχεία, κοινά και μη κοινά, δύο οποιονδήποτε συνόλων A και B , ονομάζεται *ένωση* των δύο συνόλων και συμβολίζεται:

$$A \cup B.$$

Για τα σύνολα του προηγούμενου παραδείγματος θα είναι:

$$A \cup B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, 12, 13, \frac{3}{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{7}\}.$$

Ορίζουμε: $A \cup B \cup \Gamma = (A \cup B) \cup \Gamma$ και $A \cap B \cap \Gamma = (A \cap B) \cap \Gamma$.

Για την τομή και την ένωση ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- (1) $A \cup B = B \cup A$
- (2) $A \cap B = B \cap A$
- (3) $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$

$$(4) \quad (A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$$

$$(5) \quad (A \cup B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$$

- Για $A \subseteq B$ ονομάζουμε *συμπληρωματικό* του B ως προς το A και συμβολίζουμε με A' ή $\bar{A}$ ή A_B^c , το σύνολο των στοιχείων του B που δεν ανήκουν στο A .

Εύκολα συμπεραίνουμε ότι: $A \cap A' = \emptyset$, $A \cup A' = B$ και $(A')' = A$.

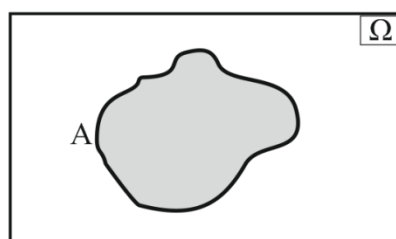
Συνήθως στο πλαίσιο ενός συγκεκριμένου μαθηματικού πεδίου, ή και γενικότερα, όλα τα εξεταζόμενα σύνολα απαρτίζονται από στοιχεία με κάποιες κοινές ιδιότητες. Δηλαδή, όλα τα εξεταζόμενα σύνολα είναι υποσύνολα ενός ευρύτερου συνόλου που περιλαμβάνει όλα τα αντικείμενα αυτά. Το σύνολο αυτό αποκαλείται *μέγιστο σύνολο* ή *χώρος έρευνας* ή *υπερσύνολο αναφοράς* και συμβολίζεται συνήθως με Ω . Έτσι, όλα τα σύνολα στο συγκεκριμένο μαθηματικό πεδίο είναι υποσύνολα του Ω .

Για παράδειγμα, στη Γεωμετρία όλα τα σύνολα σημείων είναι υποσύνολα του συνόλου Ω όλων των σημείων του χώρου. Στη στατιστική μελέτη ενός πληθυσμού μίας χώρας το Ω είναι το σύνολο των κατοίκων της, κλπ.

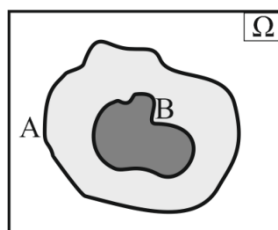
- Για δύο οποιαδήποτε σύνολα A και B ορίζουμε ως *διαφορά* του A μείον το B και συμβολίζουμε με $A-B$ το σύνολο που προκύπτει αν από τα στοιχεία του A αφαιρεθούν αυτά του B (δεν είναι απαραίτητο το B να είναι υποσύνολο του A).

Μία εποπτικά εύληπτη απεικόνιση των συνόλων και των μεταξύ τους σχέσεων επιτυγχάνεται με τα ονομαζόμενα *διαγράμματα Venn*:

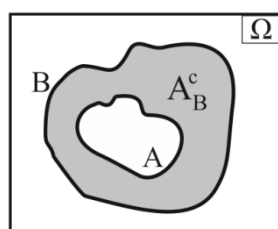
Το μέγιστο σύνολο Ω συμβολίζεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου, ενώ το κάθε σύνολο παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό του παραπάνω ορθογωνίου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



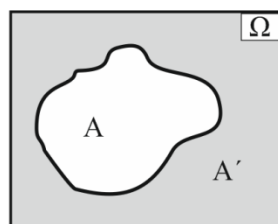
Έτσι, λόγου χάρη, εξεικονίζουμε:
τη σχέση υποσυνόλου $B \subseteq A$:



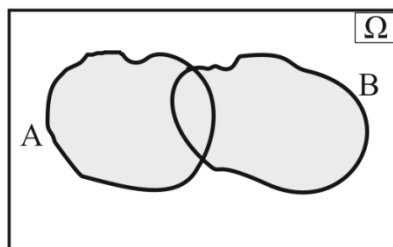
το συμπληρωματικό του A ως προς B :



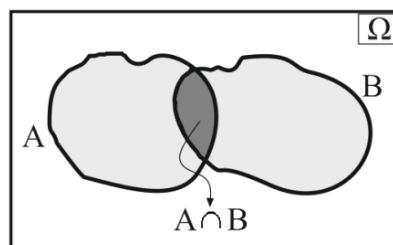
το συμπληρωματικό του A ως προς Ω :



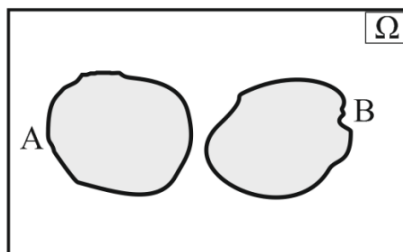
την ένωση δύο συνόλων A και B :



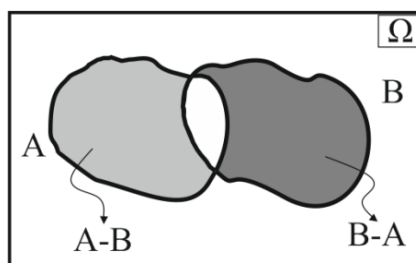
την τομή δύο συνόλων A και B :



δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα:



τη διαφορά $A-B$ ή τη $B-A$ ή και την ένωση $(A-B) \cup (B-A)$ που αποτελείται και από τις δύο γραμμοσκιασμένες περιοχές:



Κ. Ο. Κ.

- Όπως προαναφέρθηκε η σειρά αναγραφής των στοιχείων ενός συνόλου είναι αδιάφορη, δηλ. ισχύει για οποιοδήποτε διμελές σύνολο $\{\alpha, \beta\} = \{\beta, \alpha\}$.

Αν, όμως, επιθυμούμε να σε ένα διμελές σύνολο η σειρά των στοιχείων να είναι αυστηρά καθορισμένη, χαρακτηρίζουμε το διμελές αυτό σύνολο ως *διατεταγμένο ζεύγος* και το συμβολίζουμε (α, β) . Δηλαδή, στην περίπτωση του διατεταγμένου ζεύγους έχουμε: $(\alpha, \beta) \neq (\beta, \alpha)$.

(Ο τυπικός ορισμός του διατεταγμένου ζεύγους, χρησιμοποιώντας μόνον την πρωτογενή έννοια του συνόλου είναι: $(\alpha, \beta) = \{\alpha, \{\alpha, \beta\}\}$).

Παρατηρούμε, τότε, ότι όντως: $(\beta, \alpha) = \{\beta, \{\beta, \alpha\}\} = \{\beta, \{\alpha, \beta\}\} \neq (\alpha, \beta)$.

Αν έχουμε δύο σύνολα A και B και σχηματίσουμε όλα τα διατεταγμένα ζεύγη, στα οποία το πρώτο στοιχείο ανήκει στο A και το δεύτερο στο B , δημιουργείται ένα σύνολο από ζεύγη που ονομάζεται *καρτεσιανό γινόμενο* των A και B και συμβολίζεται με $A \times B$.

Δηλαδή, ορίζουμε: $A \times B = \overset{\text{op}}{=} \{(\alpha, \beta) : \alpha \in A \text{ και } \beta \in B\}.$

Για παράδειγμα το καρτεσιανό γινόμενο των $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ και $B = \{2, -\sqrt{3}\}$ είναι το σύνολο:

$$A \times B = \{(\alpha, 2), (\alpha, -\sqrt{3}), (\beta, 2), (\beta, -\sqrt{3}), (\gamma, 2), (\gamma, -\sqrt{3})\}.$$

Στην περίπτωση που $A=B$ το $A \times A$ μπορεί να γραφεί και ως A^2 .

Έτσι, λόγου χάρη: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ και } y \in \mathbb{R}\}.$

Με εντελώς ανάλογο τρόπο ορίζουμε:

$$A \times B \times \Gamma = \overset{\text{op}}{=} \{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha \in A, \beta \in B \text{ και } \gamma \in \Gamma\},$$

όπου το (α, β, γ) είναι η *διατεταγμένη τριάδα*, δηλ. ένα τριμελές σύνολο με αυστηρά καθορισμένη σειρά των στοιχείων του.

Και γενικεύοντας κατ' αναλογία:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_v = \overset{\text{op}}{=} \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v) : \alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2, \dots, \alpha_v \in A_v\}$$

και:

$$A \times A \times \dots \times A \overset{\text{συμβ}}{=} A^v \overset{\text{op}}{=} \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v) : \alpha_1 \in A, \alpha_2 \in A, \dots, \alpha_v \in A\}.$$

0α.2 Συναρτήσεις

1. Η έννοια της συνάρτησης.

Αν έχουμε δύο μη κενά σύνολα A και B ονομάζουμε *συνάρτηση* ή *απεικόνιση* του συνόλου A στο σύνολο B ένα υποσύνολο του $A \times B$, για τα όλα τα ζεύγη $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ του οποίου ισχύει:

$$y_1 \neq y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

ή ισοδύναμα:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2 ,$$

για όλα τα στοιχεία $x_1 \in A, x_2 \in A$ και οποιαδήποτε $y_1 \in B, y_2 \in B$.

Ο παραπάνω ορισμός μπορεί να διατυπωθεί με πιο οικείο τρόπο και ως εξής:

Συνάρτηση ή *απεικόνιση* του συνόλου A στο σύνολο B ονομάζεται μία αντιστοίχιση μεταξύ των στοιχείων των δύο αυτών συνόλων, στην οποία κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε ένα και μόνον ένα στοιχείο του B .

Το πρώτο στοιχείο κάθε ζεύγους, που είναι στοιχείο του πρώτου συνόλου A , συμβολίζεται συνήθως με x και ονομάζεται *ανεξάρτητη μεταβλητή*, ενώ το δεύτερο στοιχείο του συνόλου B με y , και, εφ' όσον εξαρτάται από την τιμή του x , λέγεται *εξαρτημένη μεταβλητή*. Ενίοτε, η ανεξάρτητη μεταβλητή αποκαλείται και *αρχέτυπο* ενώ η εξαρτημένη αποκαλείται *εικόνα* του x .

Παρά το ότι τα σύνολα A και B μπορεί να περιέχουν στοιχεία κάθε είδους, εδώ ενδιαφερόμαστε αποκλειστικά για σύνολα με στοιχεία

αριθμούς και κυρίως για υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Έτσι, θα επικεντρωθούμε στις συναρτήσεις στις οποίες το σύνολο A , που λέγεται *πεδίο ορισμού* της συνάρτησης, είναι υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, ενώ το B , που λέγεται *σύνολο άφιξης*, είναι επίσης υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται *πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής*.

Οι συναρτήσεις συμβολίζονται παραδοσιακά με ένα από τα μικρά γράμματα f, g, h, φ, σ , κτλ. του λατινικού ή του ελληνικού αλφαβήτου. Έστω, λοιπόν μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , ας τη συμβολίσουμε με f . Αν με τη συνάρτηση αυτή το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε

$$y = f(x)$$

και το στοιχείο $f(x)$, την εικόνα δηλ. του x μέσω της απεικόνισης, το αποκαλούμε και *τιμή της f στο x* .

Στις συναρτήσεις που το πεδίο ορισμού είναι κάποιο απειροσύνολο (συνήθως πρόκειται για διαστήματα του $\mathbb{R}$ (δηλ. για όλους τους πραγματικούς που περιέχονται ανάμεσα σε δύο συγκεκριμένους πραγματικούς), οπότε είναι αδύνατον να δοθούν όλες τις τιμές των αρχετύπων x , η συνάρτηση δίνεται βάσει ενός αλγεβρικού τύπου που καθορίζει τον τρόπο που υπολογίζεται το $f(x)$ για κάθε τιμή του x .

Λόγου χάρη, δίνουμε την f βάσει της σχέσης:

$$f(x) = 1 - x^2,$$

οπότε η εικόνα του $x=2$, για παράδειγμα, είναι: $f(2) = 1 - 2^2 = 1 - 4 = -3$, κ.ο.κ. και έτσι εν δυνάμει η εικόνα οποιουδήποτε πραγματικού x μπορεί να θεωρηθεί δεδομένη.

Η σχέση αυτή ονομάζεται *τύπος (formula) της συνάρτησης*.

Βέβαια, για να οριστεί πλήρως η συνάρτηση, εκτός από τον τρόπο προσδιορισμού της εικόνας κάθε x , θα πρέπει να καθοριστεί επακριβώς ποιες τιμές μπορεί να πάρει το x . Συνήθως όταν αυτό δεν αναφέρεται ρητά εννοείται ότι το x μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το σύνολο των πραγματικών, τιμή που όμως θα είναι επιτρεπτή από τους περιορισμούς που ενδέχεται να προκύπτουν από τη δομή του τύπου της.

Παράδειγμα.

Για την παραπάνω συνάρτηση με τύπο $f(x)=1-x^2$, δεν υφίσταται κάποιος περιορισμός που να καθιστά προβληματική την αντικατάσταση του x από κάποια συγκεκριμένο πραγματικό αριθμό.

Αν, όμως, είχαμε μία άλλη συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\sqrt{1-x^2}$, η υπόριξη παράσταση, για να έχει νόημα στους πραγματικούς, οφείλει να είναι ≥ 0 .

Στην περίπτωση αυτή, εφ' όσον δεν εξειδικεύεται ρητά το πεδίο ορισμού, ως πεδίο ορισμού εκλαμβάνεται το «ευρύτερο» υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει:

$$1-x^2 \geq 0$$

ανίσωση, της οποίας η λύση είναι $-1 \leq x \leq 1$, οπότε το πεδίο ορισμού της g είναι το κλειστό διάστημα:

$$A = [-1, 1].$$

Με παρόμοια λογική βρίσκουμε τα αντίστοιχα πεδία ορισμού για τις συναρτήσεις των παρακάτω παραδειγμάτων:

για τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$ το

$$A = \mathbb{R} - \{1, -1\},$$

για τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ το

$$A = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty),$$

για τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$ το $A = [3, +\infty)$,

(Υπενθυμίζεται ότι ο *νεπέρειος λογάριθμος* ενός θετικού πραγματικού x (συμβολίζεται με $\ln x$) είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψωθεί ο αριθμός e (η ονομαζόμενη *βάση των νεπέρειων λογαρίθμων*, ένας άρρητος με τιμή περίπου 2,7182818284 ...) ώστε να δώσει τον x :

$$\ln x = a \Leftrightarrow e^a = x.$$

Αντίστοιχα, ορίζεται ο *δεκαδικός λογάριθμος* όταν η βάση είναι ο αριθμός 10:

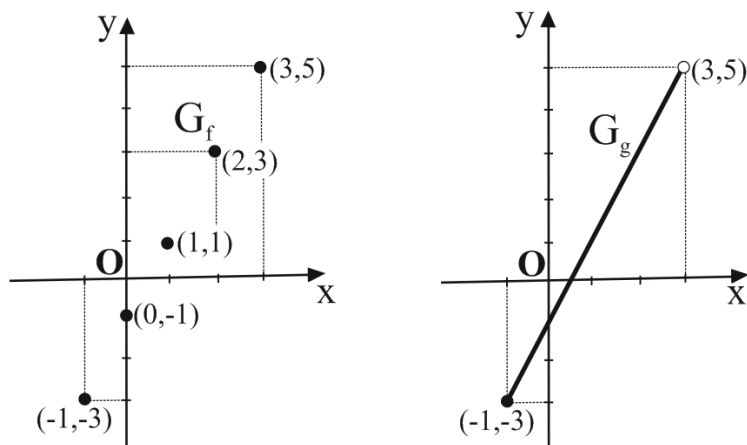
$$\log x = a \Leftrightarrow 10^a = x.$$

Πιο πολλές λεπτομέρειες για τις λογαριθμικές και εκθετικές συναρτήσεις δίνονται παρακάτω στο κεφάλαιο 1Α του βιβλίου.)

Μπορούμε να απεικονίσουμε γραφικά μία συνάρτηση f χρησιμοποιώντας το οικείο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων σε ένα επίπεδο, βάσει του οποίου κάθε σημείο του επιπέδου αυτού συνδέεται μονοσήμαντα με δύο πραγματικούς, την τετμημένη x και την τεταγμένη y . Παίρνοντας όλα τα σημεία του καρτεσιανού επιπέδου για τα οποία $y = f(x)$, δηλ. όλα τα σημεία με συντεταγμένες που δίνονται από τα ζεύγη $(x, f(x))$ έχουμε όλα τα στοιχεία της εν λόγω συνάρτησης ως σημεία στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων αυτών συνιστά το *γράφημα* της συνάρτησης f (συνήθως συμβολίζεται με G_f).

Παράδειγμα.

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα παράδειγμα γραφήματος για τις συναρτήσεις $f(x) = 2x - 1$ με πεδίο ορισμού $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ (αριστερά) και $g(x) = 2x - 1$ με πεδίο ορισμού $B = [-1, 3]$ (δεξιά).



- Αν έχουμε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A και σύνολο άφιξης ένα άλλο σύνολο B , το σύνολο των εικόνων όλων των $x \in A$ ονομάζεται *πεδίο τιμών* της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Γενικά ισχύει: $f(A) \subseteq B$. Αν, όμως, ισχύει $f(A) = B$, δηλ. αν δεν υπάρχει στοιχείο του B

που να μην είναι εικόνα κάποιου στοιχείου του A , τότε η συνάρτηση ονομάζεται *συνάρτηση επί*.

- Αν κάθε στοιχείο του συνόλου B είναι εικόνα ενός και μόνον στοιχείου του A , δηλ. αν:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ή ισοδύναμα: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$,

για όλα τα $x_1, x_2 \in A$, τότε η συνάρτηση ονομάζεται *συνάρτηση ένα-προς-ένα (1-1)*. Σε μία τέτοια συνάρτηση δεν επιτρέπεται δύο στοιχεία να έχουν την ίδια εικόνα στο B .

Παράδειγμα.

Η $f(x) = 3x + 5$ είναι 1-1, αλλά η $f(x) = 2x^2$ δεν είναι, εφ' όσον οι αντίθετοι πραγματικοί έχουν την ίδια εικόνα.

2. Πράξεις με συναρτήσεις.

Ορίζοντας πράξεις με στοιχειώδεις γνωστές συναρτήσεις μπορούμε να δημιουργήσουμε νέες συναρτήσεις με πιο περίπλοκους τύπους.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο των πραγματικών A και μία άλλη συνάρτηση g με πεδίο ορισμού ένα άλλο υποσύνολο των πραγματικών B . Τότε μπορούμε να ορίσουμε μία νέα συνάρτηση, την οποία ονομάζουμε *άθροισμα* των f και g , συμβ. $f + g$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A \cap B$ και τύπο που δίνεται από την:

$$(f + g)(x) \stackrel{\text{op}}{=} f(x) + g(x),$$

Δηλ. η νέα συνάρτηση ορίζεται για τα κοινά στοιχεία των δύο πεδίων ορισμού και η εικόνα ενός τυχόντος αριθμού x μέσω της καινούργιας συνάρτησης $f + g$ ισούται με το άθροισμα των εικόνων του αριθμού αυτού μέσω των επιμέρους συναρτήσεων.

Παράδειγμα.

Για παράδειγμα για την f με $f(x) = \frac{3x+13}{(1-x)(1+x)}$ ορισμένη στο

$A = \mathbb{R} - \{1, -1\}$ και την g με $g(x) = \frac{x^2+3}{(x-2)(x+11)}$ ορισμένη στο

$B = \mathbb{R} - \{2, -11\}$, μπορεί να οριστεί η συνάρτηση $f + g$ με τύπο:

$$(f+g)(x) = \frac{3x+13}{(1-x)(1+x)} + \frac{x^2+3}{(x-2)(x+11)}$$

και πεδίο ορισμού το $A \cap B = \mathbb{R} - \{1, -1, 2, -11\}$.

Με εντελώς ανάλογο τρόπο για δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B , αντίστοιχα ορίζουμε:

- το *γινόμενο* των f και g , συμβ. $f \cdot g$, μία συνάρτηση, η οποία έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A \cap B$ και τύπο που δίνεται από την:

$$(f \cdot g)(x) \stackrel{\text{op}}{=} f(x) \cdot g(x),$$

- τη *διαφορά* των f και g , συμβ. $f - g$, με πεδίο ορισμού το σύνολο $A \cap B$ και τύπο:

$$(f - g)(x) \stackrel{\text{op}}{=} f(x) - g(x),$$

- το *γινόμενο πραγματικού αριθμού λ επί μία συνάρτηση f* , συμβ. λf , με πεδίο ορισμού το A και τύπο:

$$(\lambda f)(x) \stackrel{\text{op}}{=} \lambda \cdot f(x),$$

- και γενικότερα τον *γραμμικό συνδυασμό* δύο συναρτήσεων f και g , συμβ. $\lambda f + \mu g$, για τυχόντες πραγματικούς λ, μ , με πεδίο ορισμού $A \cap B$ και τύπο:

$$(\lambda f + \mu g)(x) \stackrel{\text{op}}{=} \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)$$

- το *πηλίκο* των f και g , συμβ. $\frac{f}{g}$, με πεδίο ορισμού το σύνολο $A \cap B^*$

, όπου $B^* = \{x \in B: g(x) \neq 0\}$ και τύπο:

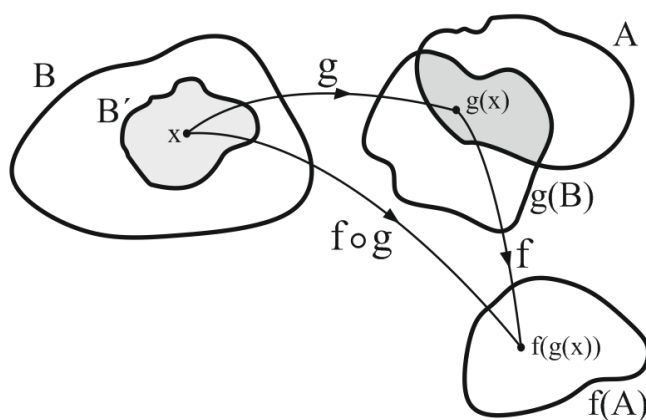
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \stackrel{\text{op}}{=} \frac{f(x)}{g(x)}$$

- τη *σύνθεση* της g με την f , συμβ. $f \circ g$, με πεδίο ορισμού το σύνολο $B' = \{x \in B: g(x) \in A\}$ και τύπο:

$$(f \circ g)(x) \stackrel{\text{op}}{=} f(g(x))$$

Το πεδίο ορισμού της σύνθεσης ορίζεται έτσι ώστε η εικόνα του τυχόντος στοιχείου x μέσω της πρώτης συνάρτησης g να εμπίπτει στο πεδίο ορισμού της δεύτερης συνάρτησης f , ώστε να μπορεί να οριστεί η εικόνα του νέου αυτού στοιχείου $g(x)$ μέσω της f .

Στη διπλανή σχηματική παράσταση για τη σύνθεση των δύο συναρτήσεων, με $f(A)$ δηλώνεται το σύνολο όλων των εικόνων των στοιχείων του A μέσω της f και $g(B)$ το σύνολο όλων των εικόνων των στοιχείων του B μέσω της g .



3. Όριο συνάρτησης.

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, η οποία δεν ορίζεται για $x = 1$. Αν

υπολογίσουμε τις τιμές των $f(x)$ για τιμές του x που προσεγγίζουν πολύ κοντά στον αριθμό 1, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

$x < 1$	$f(x)$	$x > 1$	$f(x)$
0,5	1,500000	1,5	2,500000
0,9	1,900000	1,1	2,100000
0,99	1,990000	1,01	2,010000
0,999	1,999000	1,001	2,001000
0,9999	1,999900	1,0001	2,000100

Όπως είναι σαφές από τον παραπάνω πίνακα, όταν το x παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 1 (προσεγγίζοντας το 1 όντας είτε μικρότερο του 1 είτε μεγαλύτερο του 1), το $f(x)$ παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 2 και εύλογα αναμένουμε ότι όσο περισσότερα δεκαδικά προστεθούν στον x , τόσο περισσότερο το $f(x)$ θα τείνει να συμπίπτει με τον αριθμό 2.

Διαπιστώνουμε, επίσης, ότι στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήξουμε αν παρατηρήσουμε ότι για $x \neq 1$ ισχύει:

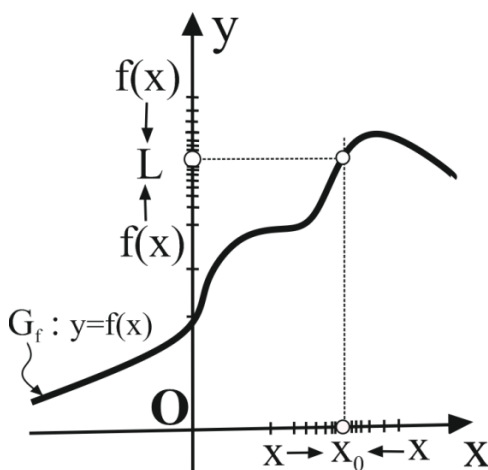
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1,$$

οπότε όταν το x παίρνει τιμές που προσεγγίζουν όσο περισσότερο επιθυμούμε το 1 (συμβολ. με $x \rightarrow 1$), τότε το $f(x) = x + 1$ παίρνει τιμές που τείνουν στο 2 ($x + 1 \rightarrow 2$).

Λέμε λοιπόν ότι η f έχει στο σημείο $x_0 = 1$ όριο τον αριθμό 2 και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται η κατάσταση με το x να προσεγγίζει όσο κοντά επιθυμούμε τυχόντα πραγματικό x_0 και τις εικόνες $f(x)$ να προσεγγίζουν αντίστοιχα τον αριθμό L . Ας σημειωθεί ότι το σημείο $(x_0, f(x_0))$ μπορεί να μην ανήκει στο γράφημα της f (όπως στο διπλανό σχήμα), χωρίς όμως να αποκλείεται και να ανήκει.



Με το προηγούμενο παράδειγμα περιγράφηκε όσο γίνεται απλούστερα και χωρίς απαιτήσεις μαθηματικής αυστηρότητας η έννοια του ορίου μίας συνάρτησης f σε έναν πραγματικό x_0 , ο οποίος δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής. Όταν ο αριθμός δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , για να έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου μίας συνάρτησης στο x_0 θα πρέπει η συνάρτηση να ορίζεται όσο θέλουμε «κοντά στο x_0 » δηλ. το πεδίο ορισμού της να είναι τουλάχιστον κάποιο σύνολο της μορφής¹:

$$(a, x_0) \cup (x_0, \beta) \quad \text{ή} \quad (a, x_0) \quad \text{ή} \quad (x_0, \beta)$$

Προφανώς, όταν ένα x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης, η αναζήτηση το ορίου δεν παρουσιάζει κανένα πρόβλημα:

για παράδειγμα, για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{3}{11}x^2 + 5$, με πεδίο ορισμού το σύνολο όλων των πραγματικών, και για $x_0 = 0$, παρατηρούμε ότι όταν $x \rightarrow 0$, το $f(x) \rightarrow 5$, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 5$.

► **Προσοχή:** όταν λέμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, όπου $L \in \mathbb{R}$, δεν εννοούμε

ότι το $f(x)$ παίρνει την τιμή L , αλλά μόνον ότι προσεγγίζει όσο κοντά επιθυμούμε το L .

Δεν είναι, επιπλέον, απαραίτητο το x να προσεγγίζει μόνον κάποιον πραγματικό αριθμό x_0 . Μπορεί να μεγαλώνει απεριόριστα. Τότε κάνουμε λόγο για *όριο της συνάρτησης στο $+\infty$* , και την κατάσταση αυτή συμβολίζουμε με: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

¹ Να είναι, δηλαδή, όπως λέγεται στην ανάλυση, το x_0 σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της. *Σημείο συσσώρευσης* ενός συνόλου ονομάζεται ένας αριθμός του οποίου κάθε περιοχή (δηλ. κάθε διάστημα των πραγματικών που περιέχει το εν λόγω σημείο) περιέχει οπωσδήποτε ένα τουλάχιστον σημείο του συνόλου. Για παράδειγμα, το 3 είναι σημείο συσσώρευσης του ανοιχτού συνόλου $[1,3)$ γιατί κάθε διάστημα που περιέχει το 3 θα έχει οπωσδήποτε κοινά σημεία με το $[1,3)$. Όμως, το 3,01 δεν είναι σημείο συσσώρευσης γιατί υπάρχουν άπειρα διαστήματα που περιέχουν το 3,01 και δεν έχουν κοινά σημεία με το $[1,3)$. Έτσι, αν μία συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $[1,3)$ δεν ορίζεται, π.χ., το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

Ενδέχεται, τότε, το $f(x)$ να προσεγγίζει απεριόριστα έναν συγκεκριμένο πραγματικό, έστω $L \in \mathbb{R}$, οπότε γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L.$$

Ενδέχεται, όμως, το $f(x)$ να μεγαλώνει και αυτό απεριόριστα όπως το x , οπότε στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Τέλος, υπάρχει το ενδεχόμενο το $f(x)$ να μικραίνει απεριόριστα, οπότε λέμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Στην περίπτωση που το x μικραίνει απεριόριστα, υπάρχουν αντίστοιχα οι εξής εκδοχές:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Παράδειγμα.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{x} + 3 \right) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^4 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 + 12) = -\infty.$$

.

Μία συνάρτηση μπορεί να ορίζεται με διαφορετικό τύπο σε διαφορετικά υποδιαστήματα του πεδίου ορισμού της. Λόγου χάρη, η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{για } x > 1 \\ -2x + 5, & \text{για } x < 1 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι:

- Όταν το x προσεγγίζει το 1, παίρνοντας όμως τιμές μικρότερες του 1 (δηλ όταν $x < 1$), τότε οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο επιθυμούμε τον πραγματικό αριθμό 3. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$$

και κάνουμε λόγο για *πλευρικό όριο της συνάρτησης από αριστερά* του $x_0 = 1$.

- Όταν το x προσεγγίζει το 1, παίρνοντας τιμές μεγαλύτερες του 1 (δηλ όταν $x > 1$), τότε οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο κοντά επιθυμούμε τον πραγματικό αριθμό 4. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$$

και κάνουμε λόγο για *πλευρικό όριο της συνάρτησης από δεξιά* του $x_0 = 1$.

Γενικά:

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο κοντά θέλουμε τον πραγματικό αριθμό L_1 καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές (δηλ. $x < x_0$), τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_1 ,$$

διαβάζοντας: *το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα αριστερά, είναι L_1 ,*

ενώ όταν τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο κοντά θέλουμε τον πραγματικό αριθμό L_2 καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μεγαλύτερες τιμές (δηλ. $x > x_0$), τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L_2 ,$$

διαβάζοντας: *το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά, είναι L_2* .

Τους πραγματικούς αριθμούς L_1 και L_2 τους αποκαλούμε *πλευρικά όρια* της συνάρτησης f στο x_0 .

Τα ίδια ισχύουν και όταν $x \rightarrow +\infty$ ή $x \rightarrow -\infty$.

Ισχύει η εξής πρόταση:

Το όριο μιας συνάρτησης f στο a , όπου $a=x_0$ ή $a=+\infty$ ή $a=-\infty$, υπάρχει και είναι ίσο με L αν και μόνον αν τα δύο πλευρικά όρια της f στο a υπάρχουν και είναι ίσα με L . Δηλ.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad .$$

Παράδειγμα.

Δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1}$, εφ' όσον:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1, \text{ ενώ} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1) = -1, \end{aligned}$$

δηλ. τα δύο πλευρικά όρια είναι διαφορετικά.

4. Πράξεις με όρια συναρτήσεων.

Αν υπάρχουν τα όρια δύο συναρτήσεων f και g $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$,

όπου $a=x_0$ ή $a=+\infty$ ή $a=-\infty$, τότε ισχύουν οι εξής ιδιότητες για τις πράξεις μεταξύ των συναρτήσεων και τα όριά τους:

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} [\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \mu \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$, για οποιονδήποτε $n \in \mathbb{N}^*$
- (5) $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right|$

$$(6) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \quad , \text{ αν } f(x) \geq 0 \text{ κοντά στο } x_0 .$$

5. Όρια και διάταξη.

Ισχύουν οι εξής προτάσεις για ανισωτικές σχέσεις μεταξύ ορίων:

$$(1) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0 \text{ τότε } f(x) > 0 \text{ κοντά στο } a .$$

$$(2) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow a} f(x) < 0 \text{ τότε } f(x) < 0 \text{ κοντά στο } a .$$

$$(3) \text{ Αν υπάρχουν τα } \lim_{x \rightarrow a} f(x) , \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ και } f(x) < g(x) \text{ κοντά}$$

στο a τότε:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x) .$$

$$(4) \text{ Αν } f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ κοντά στο } a \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L \text{ τότε:}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L . \quad (\text{Κριτήριο παρεμβολής})$$

6. Συνέχεια συνάρτησης.

Μία συνάρτηση f ονομάζεται *συνεχής* στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν και μόνον αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει και ισούται με την τιμή της

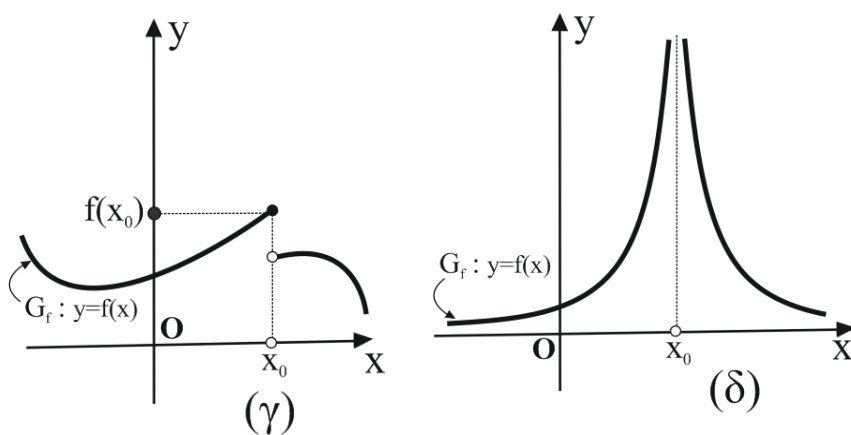
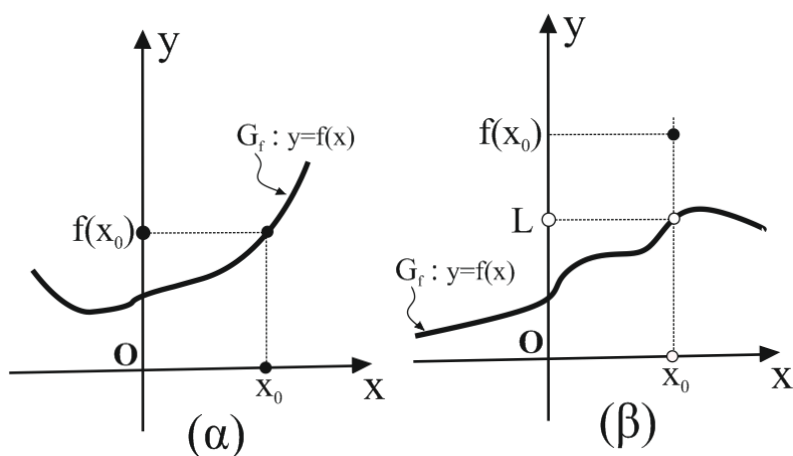
συνάρτησης στο x_0 , δηλ. όταν: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) .$

Αν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο σημείο x_0 λέμε ότι είναι *ασυνεχής* στο x_0 και χαρακτηρίζουμε το σημείο αυτό ως σημείο *ασυνέχειας*.

Στα παρακάτω σχήματα έχουμε: (α) μία συνάρτηση συνεχή στο x_0 (β) μία συνάρτηση για την οποία το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει μεν, αλλά είναι

διαφορετικό του $f(x_0)$ (γ) μία συνάρτηση για την οποία δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ (τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά) (δ) μία συνάρτηση για την

οποία το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει μεν, αλλά είναι $+\infty$. Στις περιπτώσεις (β), (γ) και (δ) έχουμε ασυνέχεια στο x_0 .



Το γράφημα μίας συνεχούς συνάρτησης που είναι ορισμένη σε υποδιάστημα του συνόλου των πραγματικών είναι μία καμπύλη χωρίς διακοπές.

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) .

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) και επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta).$$

Στην περίπτωση ασυνέχειας μίας συνάρτησης f σε κάποιο σημείο x_0 έχουμε:

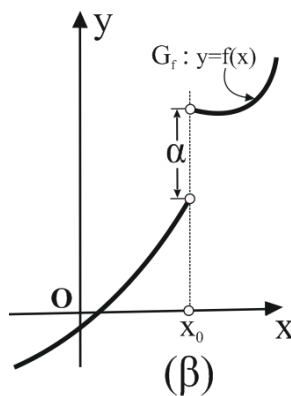
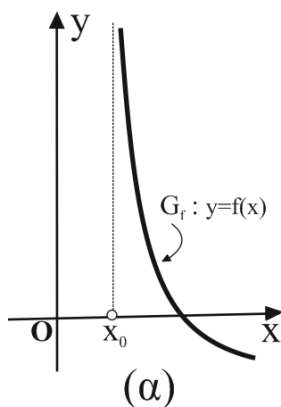
- *άπειρη ασυνέχεια (infinite discontinuity)* αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$, όπως στο

γράφημα (α) του παρακάτω σχήματος. Αν μια συνάρτηση εκφράζεται ως κλάσμα δύο συναρτήσεων $f(x) = g(x)/h(x)$, τότε τα σημεία μηδενισμού του παρονομαστή, δηλ. τα x_0 για τα οποία $h(x_0) = 0$ και $g(x_0) \neq 0$, είναι σημεία άπειρης ασυνέχειας της f .

- *βηματική ασυνέχεια (step discontinuity)* αν τα πλευρικά όρια της f στο x_0 υπάρχουν αλλά δεν συμπίπτουν, όπως στο γράφημα (β) του παρακάτω σχήματος (ή στην περίπτωση (γ) του προηγούμενου σχήματος). Στην περίπτωση βηματικής ασυνέχειας ονομάζουμε *βήμα της ασυνέχειας*, τη διαφορά:

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Στο παράδειγμα του γραφήματος (β) το βήμα της ασυνέχειας είναι θετικό.



Σχετικά με τις πράξεις συνεχών συναρτήσεων ισχύει η παρακάτω πρόταση:

- Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 τότε και οι συναρτήσεις

$$\lambda f + \mu g, \text{ για } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, f \cdot g, \frac{f}{g}, |f| \text{ και } \sqrt[k]{f}$$

επίσης συνεχείς στο x_0 , υπό την προϋπόθεση ότι ορίζονται στο x_0 .

Ισχύει, ακόμη, και η εξής πρόταση όσον αφορά την πράξη της σύνθεσης δύο συναρτήσεων:

- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η σύνθεση $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

0α.3 Στοιχεία γραμμικής άλγεβρας

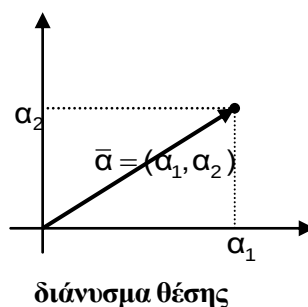
Παρουσιάζονται συνοπτικά τα βασικά στοιχεία της Γραμμικής Άλγεβρας που αφορούν διανύσματα, πίνακες, ορίζουσες, γραμμικά συστήματα, τετραγωνικές μορφές.

1. Διανύσματα διάστασης n (n -dimensional vectors) ονομάζονται οι διατεταγμένες n -άδες αριθμών. Συνήθως τα εμφανίζουμε σε μορφή στήλης ή γραμμής, οπότε και τα παριστάνουμε με:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \vec{a} = (a_1, \dots, a_n),$$

αντίστοιχα. Οι n το πλήθος αριθμοί που τα αποτελούν καλούνται *συντεταγμένες* (coordinates) του διανύσματος. Το σύνολο των διανυσμάτων της ίδιας διάστασης n , καλείται n -διάστατος διανυσματικός χώρος (n -dimensional vector space). Θα συμβολίζεται με:

$$\mathbb{R}^n \quad \text{ή} \quad \mathbb{R}^n.$$



Εκτός από διανύσματα, τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$, όπως και κάθε συνόλου γενικά, καλούνται και *σημεία* (points). Σ' αυτή την περίπτωση ερμηνεύουμε τα διανύσματα ως *διανύσματα θέσης*, οπότε τα ταυτίζουμε με τα αντίστοιχα σημεία που έχουν τις ίδιες συντεταγμένες, όπως στο

διπλανό σχήμα. Δύο διανύσματα είναι *ίσα* αν έχουν την ίδια διάσταση και είναι ίσες οι αντίστοιχες συντεταγμένες. Έτσι μια εξίσωση μεταξύ διανυσμάτων διάστασης n αντιστοιχεί σε n αριθμητικές εξισώσεις. Το διάνυσμα με όλες τις συντεταγμένες του μηδενικές, καλείται *μηδενικό διάνυσμα*:

$$\mathbf{0} \quad \text{ή} \quad \vec{0} = (0, 0, \dots, 0).$$

Μεταξύ διανυσμάτων της ίδιας διάστασης εκτελούνται οι γνωστές αλγεβρικές πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, προσθέτοντας ή αφαιρώντας τις αντίστοιχες συντεταγμένες. Επίσης, πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε διάνυσμα με αριθμό πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας αντίστοιχα κάθε συντεταγμένη του με τον αριθμό. Γενικότερα ορίζονται οι *γραμμικοί συνδυασμοί* (linear combinations) διανυσμάτων, στη μορφή:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k \quad .$$

Κάθε τέτοιος γραμμικός συνδυασμός δίνει ένα συγκεκριμένο διάνυσμα.

2. Πίνακας διάστασης $m \times n$ ή m/n (matrix) καλείται μια διάταξη $m \cdot n$ το πλήθος αριθμών σε m γραμμές και n στήλες.

$$A = A_{m/n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

όπου

a_{ij} είναι το στοιχείο της i – γραμμής και j – στήλης.

Συχνά παριστάνουμε τον πίνακα με το γενικό στοιχείο του, δείχνοντας και την διάσταση αν χρειάζεται:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \quad .$$

Οι μηδενικοί πίνακες έχουν όλα τα στοιχεία τους μηδενικά:

$$\mathbf{0} = (\mathbf{0})_{m \times n}$$

Δύο πίνακες είναι ίσοι μεταξύ τους αν έχουν την ίδια διάσταση και ίσα τα αντίστοιχα στοιχεία. Έτσι μια εξίσωση μεταξύ πινάκων διάστασης m/n

αντιστοιχεί σε $m \cdot n$ αριθμητικές εξισώσεις. Μεταξύ πινάκων της ίδιας διάστασης εκτελούνται οι γνωστές αλγεβρικές πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, προσθέτοντας ή αφαιρώντας τις αντίστοιχες συντεταγμένες. Επίσης, πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε πίνακα με αριθμό πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας αντίστοιχα κάθε συντεταγμένη του με τον αριθμό.

Παρατήρηση. Τα μεγέθη διακρίνονται σε αριθμούς, σε διανύσματα και σε πίνακες. Τα αριθμητικά μεγέθη καλούνται και *βαθμωτά* (scalar). Γενικά ένας πίνακας με μόνο μία στήλη ή μόνο μία γραμμή ταυτίζεται με το αντίστοιχο διάνυσμα.

3. Ανάστροφος (transpose) ενός πίνακα, καλείται ο πίνακας που προκύπτει αν κάνουμε τις γραμμές του στήλες ή ισοδύναμα τις στήλες του γραμμές, στην ίδια σειρά. Έτσι αν ένας πίνακας έχει διάσταση m/n τότε ο ανάστροφος του έχει διάσταση n/m . Ο ανάστροφος του A παριστάνεται με A^t . Έχουμε:

$$A = (\alpha_{ij})_{m \times n} \Rightarrow A^t = (\alpha_{ij}^t)_{n \times m}, \text{ όπου } \alpha_{ij}^t = \alpha_{ji}.$$

Ειδικά το ανάστροφο ενός διανύσματος στήλη $\vec{a}$ είναι το αντίστοιχο διάνυσμα γραμμή $\vec{a}^t$, και αντιστρόφως:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{a}^t = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Παράδειγμα.

$$(1 \ -2 \ 0)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Τετραγωνικός (square) καλείται ένας πίνακας αν το πλήθος των γραμμών του συμπίπτει με το πλήθος των στηλών του. Έτσι, η διάσταση ενός τετραγωνικού πίνακα χαρακτηρίζεται με έναν μόνο αριθμό. Ένας τετραγωνικός πίνακας καλείται *συμμετρικός* (symmetric) αν συμπίπτει με τον ανάστροφό του, δηλαδή αν τα συμμετρικά ως προς τη διαγώνιο στοιχεία είναι ίσα μεταξύ τους:

$$A = A^t \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \quad \text{για όλα τα } \{i, j\}.$$

Τα *διαγώνια* στοιχεία ενός τετραγωνικού πίνακα είναι αυτά για τα οποία ο δείκτης γραμμής συμπίπτει με τον δείκτη στήλης:

$$a_{ij} \text{ με } i = j, \text{ δηλ. τα στοιχεία } a_{ii} \text{ για όλα τα } i.$$

Ένας τετραγωνικός πίνακας καλείται *διαγώνιος* (diagonal) αν όλα τα στοιχεία του εκτός διαγωνίου είναι μηδενικά. Μεταξύ των διαγωνίων πινάκων ξεχωρίζουμε τον *ταυτοτικό* (identity) πίνακα με διαγώνια στοιχεία ίσα με την μονάδα. Παριστάνεται με:

$$I = I_{n/n} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Γινόμενο πινάκων.

Υπό ορισμένες συνθήκες μπορούμε και να πολλαπλασιάσουμε πίνακες. Καταρχάς ορίζουμε το γινόμενο ενός διανύσματος γραμμή με ένα διάνυσμα στήλη σ' αυτή τη σειρά, εφόσον έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων, ως τον αριθμό που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία και προσθέσουμε:

$$\vec{\alpha}^t \vec{\beta} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \cdots + \alpha_n \beta_n.$$

Θεωρούμε τώρα δύο πίνακες A, B όπου οι γραμμές του A έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων με τις στήλες του B , και ορίζουμε το γινόμενο ως τον πίνακα του οποίου το στοιχείο ij βρίσκεται πολλαπλασιάζοντας την i -γραμμή του A με την j -στήλη του B όπως παραπάνω. Έτσι το γινόμενο AB έχει τον αριθμό γραμμών του πρώτου πίνακα A και τον αριθμό στηλών του δεύτερου πίνακα B . Έτσι για τους πίνακες

$$A = (a_{ij})_{m \times p}, B = (\beta_{jk})_{p \times n}, \text{ ορίζουμε τον πίνακα } AB, \text{ ώστε:}$$

$$A_{m \times p} B_{p \times n} = C_{m \times n} \Leftrightarrow (a_{ij})_{m \times p} (\beta_{jk})_{p \times n} = (c_{ik})_{m \times n},$$

όπου:

$$c_{ik} = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ip}) \begin{pmatrix} \beta_{1k} \\ \vdots \\ \beta_{pk} \end{pmatrix} = \alpha_{i1}\beta_{1k} + \dots + \alpha_{ij}\beta_{jk} + \dots + \alpha_{ip}\beta_{pk} = \sum_{j=1}^p \alpha_{ij}\beta_{jk}.$$

Παράδειγμα.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 4} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 & 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1 & 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix}_{3 \times 4}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 4}$$

Αναφέρουμε ειδικά το γινόμενο πίνακα με διάνυσμα στήλη ή διάνυσμα γραμμή που μας δίνει αντίστοιχο διάνυσμα:

$$A_{m \times n} \vec{\beta}_{n \times 1} = \vec{\gamma}_{m \times 1} \quad \text{και} \quad \vec{\beta}_{1 \times m}^t A_{m \times n} = \vec{\gamma}_{1 \times n}^t$$

Παράδειγμα.

$$A_{2 \times 3} B_{3 \times 1} = C_{2 \times 1} : \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \text{όπου}$$

$$\begin{cases} c_1 = \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \alpha_3 \gamma_3 \\ c_2 = \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 \end{cases}$$

Παράδειγμα.

Σε αντίθεση με το γινόμενο αριθμών, στο γινόμενο πινάκων παίζει ρόλο η σειρά γραφής:

$$A_{1 \times n} B_{n \times 1} = C_{1 \times 1} : (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = (c), \quad \text{με } c = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n$$

$$\text{ενώ} \quad B_{n \times 1} A_{1 \times n} = C_{n \times n} : \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} (\alpha_1 \dots \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1 & \dots & \alpha_n \beta_n \\ & \ddots & \\ \alpha_n \beta_1 & \dots & \alpha_n \beta_n \end{pmatrix},$$

δηλ. το αποτέλεσμα είναι τελείως διαφορετικό.

Όπως διαπιστώσαμε στο τελευταίο παράδειγμα, το γινόμενο πινάκων δεν είναι *αντιμεταθετικό* (commutative) με την έννοια ότι εκτός ειδικών περιπτώσεων, γενικά έχουμε:

$$AB \neq BA$$

Εξ' άλλου το ένα από τα δύο γινόμενα μπορεί και να μην ορίζεται αν οι διαστάσεις δεν είναι κατάλληλες. Ισχύουν όμως οι υπόλοιπες ιδιότητες που αφορούν το γινόμενο. Αναφέρουμε ειδικά την *προσεταιριστική* (associative) ιδιότητα που μας επιτρέπει να γράψουμε ένα γινόμενο περισσοτέρων πινάκων σε κάποια συγκεκριμένη σειρά χωρίς παρενθέσεις:

$$ABC = (AB)C = A(BC),$$

αρκεί οι διαστάσεις να είναι τέτοιες ώστε να ορίζεται το γινόμενο των διαδοχικών πινάκων στη σειρά που εμφανίζονται. Λόγου χάρη:

$$A_{m \times n} B_{n \times k} C_{k \times r} = D_{m \times r}$$

5. Ορίζουσα.

Σε κάθε τετραγωνικό πίνακα A αντιστοιχούμε κατά τρόπο μοναδικό έναν αριθμό, τον οποίο συμβολίζουμε με: $|A|$

και ο οποίος καλείται *ορίζουσα* (determinant) του A . Οι ορίζουσες υπολογίζονται επαγωγικά ως προς την διάσταση αρχίζοντας με την ορίζουσα διάστασης 2:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2$$

Για να υπολογίσουμε μια ορίζουσα διάστασης n ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

1. Σε κάθε στοιχείο της ορίζουσας αντιστοιχούμε ένα πρόσημο. Τα πρόσημα εναλλάσσονται αρχίζοντας με θετικό πρόσημο για το πρώτο στοιχείο πάνω αριστερά, όπως φαίνεται παρακάτω.
2. Σε κάθε στοιχείο της ορίζουσας αντιστοιχούμε την ορίζουσα διάστασης $n-1$ που προκύπτει από την αρχική αν της αφαιρέσουμε τη γραμμή και τη στήλη του συγκεκριμένου στοιχείου.
3. Για να υπολογίσουμε την αρχική ορίζουσα επιλέγουμε μια οιαδήποτε γραμμή ή στήλη της και προσθέτουμε τους n όρους που προκύπτουν αν πάρουμε κάθε στοιχείο της με το αντίστοιχο πρόσημο που ορίστηκε στο 1 και το πολλαπλασιάσουμε με την αντίστοιχη ορίζουσα διάστασης $n-1$ που ορίστηκε στο 2. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο, ανεξάρτητα της γραμμής ή στήλης που θα χρησιμοποιήσουμε και είναι η ζητούμενη ορίζουσα.

Παράδειγμα.

Θεωρούμε μια ορίζουσα διάστασης $n=3$, και βρίσκουμε πρώτα τα πρόσημα:

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Το ανάπτυγμα ως προς την 1η γραμμή μας δίνει:

$$|A| = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

Αρκεί τώρα να αντικαταστήσουμε για τις ορίζουσες διάστασης 2 από τον παραπάνω τύπο. Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι το ίδιο αποτέλεσμα θα προκύψει αν πάρουμε το ανάπτυγμα ως προς την 2η γραμμή:

$$|A| = -\beta_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \beta_2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \beta_3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

Για συγκεκριμένες ορίζουσες συνήθως αναπτύσσουμε ως προς μια γραμμή ή στήλη που έχει πολλά μηδενικά. Π.χ. αναπτύσσοντας την παρακάτω ορίζουσα ως προς την τρίτη στήλη βρίσκουμε:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1(4+3) - 2(8+1) + 0 = -25$$

Αναπτύσσοντας την ίδια ορίζουσα ως προς την τρίτη γραμμή, βρίσκουμε:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1(2+3) - 4(4+1) + 0 = -25$$

Οι ορίζουσες έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Η ορίζουσα ενός διαγώνιου πίνακα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων στη διαγώνιο
2. Η εναλλαγή δύο γραμμών (στηλών) αλλάζει το πρόσημο της ορίζουσας
3. Η πρόσθεση σε μια γραμμή (στήλη) ενός πολλαπλάσιου μιας άλλης δεν αλλάζει την ορίζουσα
4. Ο πολλαπλασιασμός μιας γραμμής (στήλης) με αριθμό, πολλαπλασιάζει την ορίζουσα με τον ίδιο αριθμό. Επομένως, αν πολλαπλασιάσουμε έναν τετραγωνικό πίνακα διάστασης n με έναν αριθμό λ , τότε η ορίζουσά του πολλαπλασιάζεται με λ^n .

6. Κανονικοί πίνακες.

Ένας τετραγωνικός πίνακας A καλείται κανονικός ή ομαλός (regular) αν η ορίζουσα του είναι μη μηδενική

$$|A| \neq 0.$$

Γενικότερα, ένας πίνακας διάστασης $m \times n$ με $m \leq n$ καλείται κανονικός ως προς τις γραμμές αν περιέχει έναν κανονικό τετραγωνικό υποπίνακα διάστασης m , δηλαδή η ορίζουσά του περιέχει μια μη μηδενική υποορίζουσα διάστασης m . Αντίστοιχα, με $m \geq n$ καλείται κανονικός ως προς τις στήλες αν η ορίζουσά του έχει μια μη μηδενική υποορίζουσα διάστασης n .

Παράδειγμα. Θεωρούμε τους παρακάτω πίνακες διάστασης 2×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ο A είναι κανονικός ως προς τις γραμμές, με μη μηδενική υποορίζουσα διάστασης 2 αυτή που σχηματίζεται από τις στήλες $\{1,3\}$. Ο B δεν είναι κανονικός, διότι όλες οι υποορίζουσες διάστασης 2 είναι μηδενικές.

7. Αντίστροφος (inverse) ενός τετραγωνικού πίνακα A καλείται ένας τετραγωνικός πίνακας B της ίδιας διάστασης, που ικανοποιεί τις σχέσεις $AB=I$ και $BA=I$.

Παρατηρούμε αμέσως ότι ένας αντίστροφος τετραγωνικός πίνακας, αν υπάρχει, είναι μοναδικός. Πράγματι αν B' είναι επίσης αντίστροφος τότε πολλαπλασιάζοντας τη σχέση $AB'=I$ από αριστερά με B , βρίσκουμε:

$$B(AB') = BI \Rightarrow (BA)B' = B \Rightarrow IB' = B \Rightarrow B' = B.$$

Θα συμβολίζουμε τον μοναδικό αντίστροφο ενός τετραγωνικού πίνακα A , αν υπάρχει, με:

$$A^{-1}.$$

Αποδεικνύεται στα πλαίσια της γενικής θεωρίας της Γραμμικής Άλγεβρας, ότι:

Ένας πίνακας A έχει αντίστροφο $A^{-1} \Leftrightarrow$ είναι κανονικός: $|A| \neq 0$.

Σε αυτή την περίπτωση, θεωρώντας τα στοιχεία του αντίστροφου πίνακα ως αγνώστους, η εξίσωση πινάκων:

$$AA^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

αντιστοιχεί σε $n \cdot n$ το πλήθος εξισώσεις για τα $n \cdot n$ άγνωστα στοιχεία x_{ij} του αντίστροφου πίνακα. Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε τον αντίστροφο.

Παρατήρηση. Παρ' ότι για τον αντίστροφο απαιτήσαμε και τις δύο σχέσεις: $AB=I$ και $BA=I$, συμπεραίνουμε από την παραπάνω πρόταση ότι για τετραγωνικούς πίνακες αν ισχύει η μία σχέση, τότε θα ισχύει και η άλλη.

Παράδειγμα.

Για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, αν ονομάσουμε τον αντίστροφό του

$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, η ορίζουσά του είναι $|A| = 2(-1) - 0(2) = -2 \neq 0$, δηλ. ο

πίνακας είναι κανονικός και προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + z = 1 \\ 2y - w = 0 \\ 0x - z = 0 \\ 0y - w = 1 \end{cases}$$

του οποίου η λύση δίνει: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Γραμμικά συστήματα.

Χρησιμοποιώντας διανυσματικό συμβολισμό, ένα γραμμικό σύστημα (linear system) m εξισώσεων με n αγνώστους εκφράζεται στη μορφή:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1 \\ &\vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_n &= \beta_m \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_{m \times n} \vec{x}_{n \times 1} = \vec{\beta}_{m \times 1}$$

Εκτός από τις μεταβλητές που σχηματίζουν διάνυσμα, διακρίνουμε του συντελεστές που σχηματίζουν πίνακα και τις σταθερές στο δεξιό μέρος που σχηματίζουν επίσης διάνυσμα. Οι λύσεις $\{\vec{x}\}$ ενός γραμμικού συστήματος μπορούν να θεωρηθούν ως σημεία του R^n . Το σύστημα μπορεί να έχει καμμία λύση, μια και μοναδική λύση ή πολλές λύσεις. Σε κάθε περίπτωση το σύνολο των λύσεων σχηματίζει ένα υποσύνολο του R^n που μπορεί να είναι και το κενό. Ένα γραμμικό σύστημα με $m \leq n$ καλείται κανονικό (regular) αν ο πίνακας των συντελεστών A είναι

κανονικός ως προς τις γραμμές. Ένα κανονικό σύστημα λύνεται εκφράζοντας m μεταβλητές ως γραμμικές συναρτήσεις των υπόλοιπων $n-m$ τις οποίες καλούμε *ελεύθερες* (free). Οι ελεύθερες μεταβλητές μπορούν να πάρουν αυθαίρετες τιμές ως ανεξάρτητες.

9. Κανόνας Cramer.

Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων με τον *ίδιο* αριθμό εξισώσεων και μεταβλητών:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 + \dots + \alpha_{nn}x_n = \beta_n \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_{n \times n} \vec{x}_{n \times 1} = \vec{\beta}_{n \times 1}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι αν ο τετραγωνικός πίνακας είναι κανονικός: $|A| \neq 0$, και επομένως αντιστρέψιμος, τότε πολλαπλασιάζοντας με A^{-1} από αριστερά και χρησιμοποιώντας την προσεταιριστική ιδιότητα του γινομένου, βρίσκουμε τη λύση στη μορφή:

$$A\vec{x} = \vec{\beta} \Leftrightarrow A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{\beta} \Leftrightarrow (A^{-1}A)\vec{x} = A^{-1}\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{\beta}.$$

Χρησιμοποιώντας στην παραπάνω λύση τον τύπο του αντίστροφου πίνακα που δίνεται στα πλαίσια της Γραμμικής Άλγεβρας, βρίσκουμε ότι: Ένα τετραγωνικό σύστημα $A\vec{x} = \vec{\beta}$ έχει μια και μοναδική λύση $\vec{x} \Leftrightarrow$ ο πίνακας A των συντελεστών είναι κανονικός: $|A| \neq 0$. Σε αυτή την περίπτωση η λύση του συστήματος εκφράζεται μέσω του κανόνα Cramer, σύμφωνα με τον οποίο η τιμή της κάθε μεταβλητής δίνεται από ένα κλάσμα όπου:

1. Στον παρανομαστή εμφανίζεται πάντοτε η ορίζουσα των συντελεστών στο αριστερό μέρος του συστήματος, την οποία υποθέτουμε μη μηδενική.
2. Στον αριθμητή εμφανίζεται η ορίζουσα που προκύπτει από την ορίζουσα στον παρανομαστή αν αντικαταστήσουμε την στήλη που αντιστοιχεί στους συντελεστές της συγκεκριμένης μεταβλητής με την στήλη των σταθερών στο δεξιό μέρος του συστήματος.

Παράδειγμα.

1. Οι τιμές των (x, y) στο παρακάτω σύστημα, βρίσκονται ως εξής:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 x + \beta_1 y = c_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = c_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & \beta_1 \\ c_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1 \beta_2 - c_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} = \frac{\alpha_1 c_2 - \alpha_2 c_1}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}$$

2. Η τιμή του x στο 2×3 σύστημα: $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = c_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = c_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = c_3 \end{cases}$, δίνεται από

την παράσταση:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ c_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ c_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}}$$

και εντελώς όμοια υπολογίζονται οι τιμές των $\{y, z\}$.