ΜΕΡΟΣ 1

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1Β
Ρυθμοί Μεταβολής

1β.1 Εξισώσεις

1. Πλεγμένες συναρτήσεις.

Η σχέση συνάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών μπορεί να εκφραστεί και ως εξίσωση στη μορφή :

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y - f(x) = 0 \ .$$

Η παραπάνω είναι ειδική περίπτωση της γενικότερης μορφής εξίσωσης:

$$f(x,y) = c \ .$$

Στις εξισώσεις αυτής της μορφής οι δύο μεταβλητές αντιμετωπίζονται συμμετρικά, και καταρχήν δεν γίνεται διάκριση μεταξύ εξαρτημένης και ανεξάρτητης. Το γράφημά μιας εξίσωσης αποτελείται από τα σημεία (x,y) που την ικανοποιούν. Αν θελήσουμε να εκφράσουμε τη μία από τις δύο μεταβλητές ως συνάρτηση της άλλης, τότε γενικά βρίσκουμε περισσότερες από μια συναρτήσεις. Τέτοιες συναρτήσεις που ορίζονται μέσω εξισώσεων καλούνται *πλεγμένες συναρτήσεις* (implicit functions), ακόμη και αν δεν μπορούμε να τις εκφράσουμε αναλυτικά. Μάλιστα λύνοντας την ίδια εξίσωση ως προς y ή ως προς x βρίσκουμε συναρτήσεις που είναι αντίστροφες μεταξύ τους:

$$f(x,y) = c \Rightarrow y = y(x) \ \text{ή} \ x = x(y) \ .$$

Παράδειγμα.
Δίνουμε παρακάτω τα γραφήματα μερικών απλών εξισώσεων, και βρίσκουμε τις αντίστοιχες πλεγμένες συναρτήσεις.

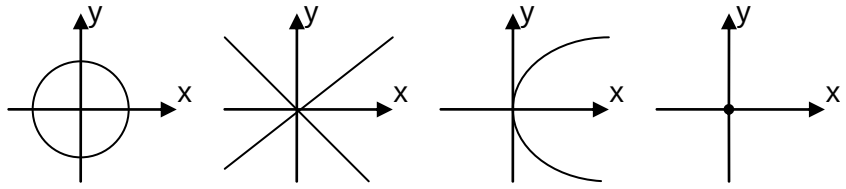
1. $x^2+y^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=1-x^2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2} & \text{δύο συναρτήσεις} \\ x^2=1-y^2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{1-y^2} & \text{δύο συναρτήσεις} \end{cases}$

2. $x^2-y^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=x^2 \Leftrightarrow y=\pm x & \text{δύο συναρτήσεις} \\ x^2=y^2 \Leftrightarrow x=\pm y & \text{δύο συναρτήσεις} \end{cases}$

3. $x-y^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=x-1 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{x-1} & \text{δύο συναρτήσεις} \\ x=y^2 & \text{μία συνάρτηση} \end{cases}$

4. $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow (x=0,\ y=0)$ ένα σημείο, καμία συνάρτηση

5. $x^2+y^2=-1$: κανένα σημείο δεν την επαληθεύει, το σύνολο των σημείων είναι το κενό σύνολο.



$x^2+y^2=1$ $x^2-y^2=1$ $x-y^2=0$ $x^2+y^2=0$

γραφήματα εξισώσεων

Παράδειγμα.
Σε πολλές εφαρμογές εμφανίζεται η εξίσωση:

$$x^{\alpha}y^{\beta}=c \text{ με } x\geq 0,\ y\geq 0 \text{ και } c\geq 0.$$

Λύνοντας ως προς y βρίσκουμε ότι η παραπάνω εξίσωση ορίζει πλεγμένα μια συνάρτηση δύναμης. Π.χ.

$$x^{1/2}y^{3/4}=2 \Leftrightarrow y^{3/4}=2x^{-1/2} \Leftrightarrow y=(2x^{-1/2})^{4/3}=2^{4/3}x^{-4/6}=2^{4/3}x^{-2/3}$$

$$x^{1/2}y^{-3/4}=2\Leftrightarrow y^{-3/4}=2x^{-1/2}\Leftrightarrow y=(2x^{-1/2})^{-4/3}=2^{-4/3}x^{2/3}.$$

Το πρόσημο της δύναμης εξαρτάται από τα πρόσημα των α και β. Είναι αρνητική αν έχουν το ίδιο πρόσημο όπως στην πρώτη εξίσωση, θετική αν έχουν αντίθετο πρόσημο όπως στη δεύτερη.

2. Πλεγμένη παραγώγιση.

Όταν έχουμε μια εξίσωση:

$$f(x,y)=c\,,$$

τότε σε κάθε τιμή της μιας μεταβλητής μπορεί να αντιστοιχούν περισσότερες από μια τιμές της άλλης. Έτσι για να καθορίσουμε ένα σημείο (x,y) χρειάζεται γενικά να δώσουμε τις τιμές αμφότερων των μεταβλητών, που να ικανοποιούν βέβαια την εξίσωση. Γενικά, κάθε τέτοια επιλογή σημείου ανήκει σε μια πλεγμένη συνάρτηση που ορίζεται από την εξίσωση, την οποία μπορούμε και να παραγωγίσουμε. Η παραγώγιση μπορεί να εκτελεστεί έμμεσα χωρίς να βρεθεί πρώτα η αντίστοιχη πλεγμένη συνάρτηση, παραγωγίζοντας στην εξίσωση $f(x,y)=c$ ως προς την μία μεταβλητή, θεωρώντας την άλλη ως συνάρτησή της, οπότε έχουμε την ταυτότητα:

$$\{f(x,y(x))\equiv c\Rightarrow f'\equiv 0\}\quad \text{ή}\quad \{f(x(y),y)\equiv c\Rightarrow f'\equiv 0\}\,,$$

για όλα τα x ή y αντίστοιχα. Στην παραπάνω σχέση το c παριστάνει σταθερή συνάρτηση. Η διαδικασία αυτή καλείται *πλεγμένη παραγώγιση.* Η παράγωγος που βρίσκουμε καλείται *πλεγμένη παράγωγος* (implicit derivative) διότι γενικά εκφράζεται μέσω των τιμών του x και του y.

Παράδειγμα.

Έστω η εξίσωση δύο μεταβλητών $x^2+y^2=5$. Παραγωγίζουμε πλεγμένα ως προς x, θεωρώντας το y ως την αντίστοιχη πλεγμένη συνάρτηση του x:

$$x^2+y(x)^2\equiv 5$$

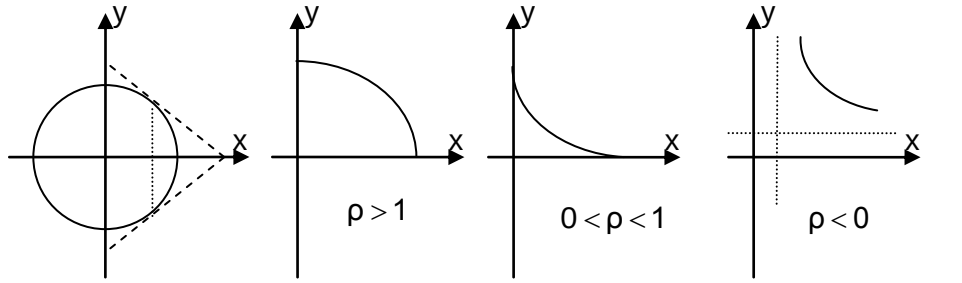
και βρίσκουμε:

$$(x^2)'+(y^2)'=5'\Rightarrow 2x+2yy'=0\Rightarrow y'(x)=-x/y$$

Π.χ. στο $x=1$ αντιστοιχούν δύο σημεία, όπως φαίνεται στο πρώτο από τα παρακάτω γραφήματα. Ανάλογα της τιμής του y που θα επιλέξουμε θα βρούμε για την αντίστοιχη πλεγμένη παράγωγο:

για $x=1$ η εξίσωση γίνεται:

$$1+y^2=5 \Rightarrow \begin{cases} y=2 \ \ \& \ y'\big|_{y=2}=-1/2 \\ y=-2 \ \ \& \ y'\big|_{y=-2}= \ \ 1/2 \end{cases}$$



$x^2+y^2=5$ $\quad x^2+y^2=c$ $\quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=c$ $\quad x^{-1}+y^{-1}=c \Leftrightarrow y=\dfrac{x}{cx-1}$

γραφήματα εξισώσεων

Παράδειγμα.

Στη θετική περιοχή $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y\geq 0\}$, θα μελετήσουμε τις εξισώσεις της μορφής:

$$x^\rho+y^\rho=c \ \text{ με } \rho\neq\{0,1\} \text{ και } c>0.$$

Παραγωγίζοντας πλεγμένα ως προς x, βρίσκουμε:

$$(x^\rho)'+(y^\rho)'=c' \ \Rightarrow \rho x^{\rho-1}+\rho y^{\rho-1}y'=0 \ \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x^{\rho-1}}{y^{\rho-1}}.$$

Εφόσον οι συντεταγμένες είναι θετικές έχουμε πάντοτε $y'<0$ και επομένως η συνάρτηση $y=y(x)$ που ορίζεται πλεγμένα από την εξίσωση είναι γνήσια φθίνουσα. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις όσον αφορά το γράφημα της εξίσωσης:

1. $\rho > 1$. Τέμνει τους δύο άξονες καθέτως, διότι στα σημεία τομής έχουμε:

$$\{x = 0,\ y = c^{1/\rho} \text{ με } y'\big|_{x=0} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0\} \ \&$$

$$\{y = 0,\ x = c^{1/\rho} \text{ με } y'\big|_{y=0} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=0} = -\infty\}$$

2. $0 < \rho < 1$. Τέμνει τους δύο άξονες εφαπτομενικά (δηλ. στα σημεία τομής οι άξονες είναι εφαπτόμενες της καμπύλης), διότι στα σημεία τομής έχουμε:

$$\{x = 0,\ y = c^{1/\rho} \text{ με } y'\big|_{x=0} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = -\infty\} \quad \&$$

$$\{y = 0,\ x = c^{1/\rho} \text{ με } y'\big|_{y=0} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=0} = 0\}$$

3. $\rho < 0$. Δεν τέμνει τους άξονες. Έχει οριζόντια και κατακόρυφη ασύμπτωτη, την οποία βρίσκουμε παίρνοντας τα όρια:

για $x \to \infty$ οπότε $y \to c^{1/\rho}$ και για $y \to \infty$ οπότε $x \to c^{1/\rho}$, αντίστοιχα.

Στο παραπάνω σχήμα δίνουμε το γράφημα της εξίσωσης στις τρεις περιπτώσεις. Για την κάθε περίπτωση δίνουμε και μια χαρακτηριστική εξίσωση.

3. Μετασχηματισμοί (transformations).
Θα εξετάσουμε τρία είδη μετασχηματισμών εξισώσεων και των αντίστοιχων καμπύλων τους.

1. *Αντανάκλαση* (reflection) ως προς τους άξονες, καλείται ο μετασχηματισμός της αρχικής εξίσωσης που προκύπτει αν κάνουμε την αντικατάσταση: $x \to -x$ ή $y \to -y$ ή και τις δύο.

Παράδειγμα.
Αν στην παραβολική εξίσωση: $y = x^2$, αντικαταστήσουμε το y με το $-y$ θα βρούμε την εξίσωση:

$$y = x^2 \;\rightarrow\; -y = x^2 \Leftrightarrow y = -x^2,$$

της οποίας η καμπύλη προκύπτει από την αρχική με κατακόρυφη αντανάκλαση ως προς τον $x-$άξονα. Πράγματι, ένα σημείο (ζ,η) ικανοποιεί τη νέα εξίσωση $\Leftrightarrow$ το κατακόρυφα συμμετρικό του $(\zeta,-\eta)$ ικανοποιεί την αρχική. Αντίστοιχα αν αντικαταστήσουμε το x με το $-x$ θα έχουμε οριζόντια αντανάκλαση ως προς τον $y-$άξονα που στη συγκεκριμένη περίπτωση λόγω συμμετρίας της αρχικής θα συμπίπτει με την αρχική καμπύλη.

2. *Μετατόπιση* (Translation), καλείται ο μετασχηματισμός της αρχικής εξίσωσης που προκύπτει αν κάνουμε την αντικατάσταση: $x \to x - x_0$ ή $y \to y - y_0$ ή και τις δύο, οπότε η καμπύλη μετατοπίζεται κατά το *διάνυσμα:* (x_0, y_0), δηλαδή παράλληλα με τον οριζόντιο άξονα κατά x_0 και παράλληλα με τον κατακόρυφο άξονα κατά y_0.

Παράδειγμα.
Αν στην υπερβολική εξίσωση: $x^{1/2}y^{1/3} = 4 \Rightarrow y = 4^3 x^{-3/2}$, αντικαταστήσουμε $x \to x - 1$ και $y \to y + 2$, τότε θα βρούμε την εξίσωση:

$$x^{1/2}y^{1/3} = 4 \;\Leftrightarrow\; (x-1)^{1/2}(y+2)^{1/3} = 4,$$

η οποία προκύπτει από την αρχική μετατοπίζοντας κατά 1 στην κατακόρυφη κατεύθυνση και κατά -2 στην οριζόντια. Έτσι έχουμε τις νέες ασύμπτωτες:

- Κατακόρυφη: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, μετατόπιση κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά.

- Οριζόντια: $y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$, μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.

3. *Αλλαγή κλίμακας* (scaling), καλείται ο μετασχηματισμός της αρχικής εξίσωσης που προκύπτει αν κάνουμε την αντικατάσταση: $x \to \alpha x$ ή $y \to \beta y$ ή και τις δύο.

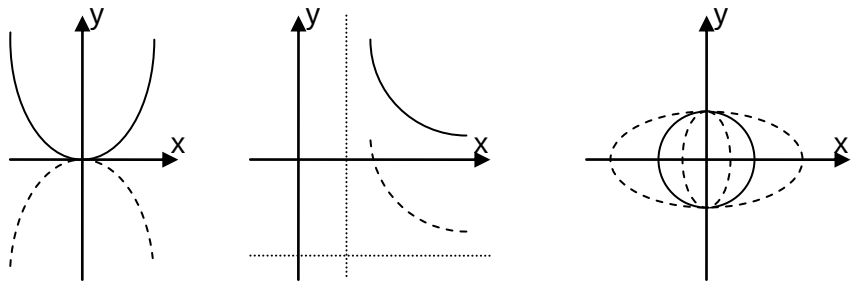
Παράδειγμα.
Θεωρούμε τη εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

1. Αν αντικαταστήσουμε $x \to 2x$, θα βρούμε την εξίσωση:

$$(2x)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow 4x^2 + y^2 = 1.$$

Αυτή η καμπύλη τέμνει τον $y-$άξονα στα ίδια σημεία: $y = \pm 1$, αλλά τον $x-$άξονα στα σημεία $x = \pm 1/2$. Δηλαδή έχουμε *συστολή* (contraction) στην $x-$κατεύθυνση κατά τον συντελεστή $1/2$. Πράγματι: ένα σημείο (ζ,η) θα ικανοποιεί την νέα εξίσωση $\Leftrightarrow$ το $(2\zeta,\eta)$ ικανοποιεί την αρχική.



$y = x^2 \to$ $\quad -y = x^2$ αντανάκλαση

$x^{1/2}y^{1/3} = c \to$ $\quad (x-1)^{1/2}(y+2)^{1/3} = 4$ μετατόπιση

$x^2 + y^2 = 1 \to \begin{cases} (2x)^2 + y^2 = 1 \\ (x/2)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ αλλαγή κλίμακας

μετασχηματισμοί

2. Αν αντικαταστήσουμε $x \to x/2 = 0{,}5x$, θα βρούμε την εξίσωση:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

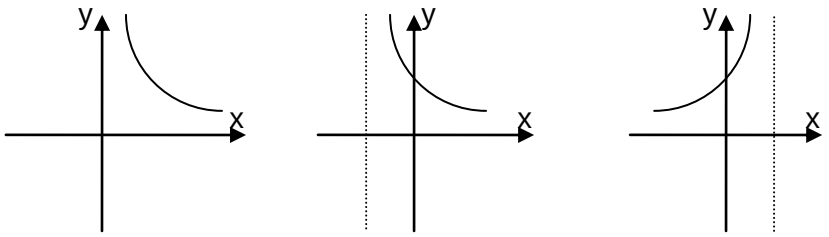
Τώρα τέμνει τον $x-$άξονα στα σημεία $x = \pm 2$. Δηλαδή έχουμε *διαστολή* (expansion) στην $x-$κατεύθυνση κατά τον συντελεστή 2. Πράγματι: ένα σημείο (ζ,η) θα ικανοποιεί την νέα εξίσωση $\Leftrightarrow$ το σημείο $(\zeta/2,\eta)$ ικανοποιεί την αρχική.

Τέλος θα δώσουμε και ένα παράδειγμα όπου έχουμε συνδυασμό μετασχηματισμών:

Παράδειγμα.

Η εξίσωση $(1-x)^{1/2}y^{1/3}=c$, προκύπτει από την εξίσωση: $x^{1/2}y^{1/3}=c$ με τους παρακάτω διαδοχικούς μετασχηματισμούς:

1. $x^{1/2}y^{1/3}=c \to (x+1)^{1/2}y^{1/3}=c$: οριζόντια μετατόπιση κατά -1
2. $(x+1)^{1/2}y^{1/3}=c \to (-x+1)^{1/2}y^{1/3}=c$: αντανάκλαση ως προς τον $y-$ άξονα.



$x^{1/2}y^{1/3}=c$ $\qquad$ $(x+1)^{1/2}y^{1/3}=c$ $\qquad$ $(1-x)^{1/2}y^{1/3}=c$

διαδοχικοί μετασχηματισμοί

4. Παραμετρικές εξισώσεις.

Σε πολλές περιπτώσεις η σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών x,y δεν εκφράζεται άμεσα σε μορφή εξίσωσης αλλά έμμεσα μέσω μιας τρίτης μεταβλητής την οποία ονομάζουμε *παράμετρο* (parameter):

$$\{x=x(t),\ y=y(t)\} \quad \text{με παράμετρο } t.$$

Για κάθε τιμή του t τα x,y ορίζουν ένα σημείο (x,y) στο επίπεδο. Καθώς το t μεταβάλλεται, το σημείο (x,y) κινείται στο επίπεδο σχηματίζοντας μια καμπύλη, της οποίας τα σημεία καθορίζονται από τις αντίστοιχες τιμές της παραμέτρου. Καλείται *παραμετρική καμπύλη* (parametric curve), ενώ οι δύο εξισώσεις που την ορίζουν καλούνται *παραμετρικές εξισώσεις* (parametric equations). Γενικά μπορούμε να

βρούμε την εξίσωσή της καμπύλης στη γνωστή μορφή απαλείφοντας το t από τις δύο εξισώσεις:

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x = x(t), y = y(t),\ t\in[a,b]\} \Rightarrow f(x,y) = c\ ,$$

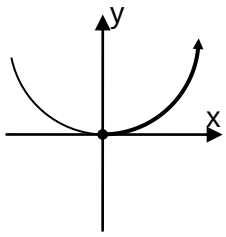
π.χ. λύνοντας τη μια εξίσωση ως προς t και αντικαθιστώντας στην άλλη. Η κατεύθυνση αύξησης των τιμών της παραμέτρου κατά μήκος της αντίστοιχης καμπύλης καλείται *θετική φορά* (positive direction). Το γράφημα της καμπύλης μαζί με τη θετική φορά καλείται *τροχιά* (orbit).

Παράδειγμα.

1. $\{x = 2t,\ \ y = t^2\} \Rightarrow \{t = x/2,\ \ y = t^2\} \Rightarrow y = x^2/4$
2. $\{x = -2t - 1, y = -t + 2\} \Rightarrow \{x = -2t - 1, t = -y + 2\} \Rightarrow x = 2y - 5$
3. $\{x = \cos t,\ \ y = \cos t\} \Rightarrow \{\cos^2 t + \sin^2 t = 1\} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$
4. $\{x = \cos 2t, y = \sin 2t\} \Rightarrow \{\cos^2 2t + \sin^2 2t = 1\} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$

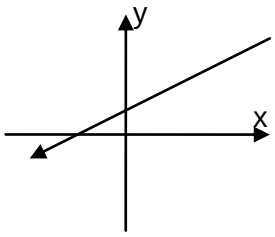
Παρατηρούμε τα εξής:

1. Μια τροχιά μπορεί να μην καλύπτει ολόκληρη την καμπύλη. Π.χ. αν στο πρώτο παράδειγμα πάρουμε: $t \ge 0$, τότε η τροχιά θα καλύπτει μόνο το τμήμα της παραβολής στη θετική περιοχή όπως φαίνεται στο πρώτο γράφημα παρακάτω. Επίσης αν στο τρίτο παράδειγμα πάρουμε $0 \le t \le \pi/2$ τότε η τροχιά θα αποτελείται μόνο από το τόξο στη θετική περιοχή όπως φαίνεται στο τρίτο γράφημα παρακάτω.
2. Μια τροχιά μπορεί να διέρχεται από κάποιο τμήμα της καμπύλης περισσότερες φορές. Π.χ. στα παραδείγματα 3 και 4 η τροχιά καλύπτει πολλές φορές την καμπύλη καθώς η παράμετρος μεταβάλλεται.



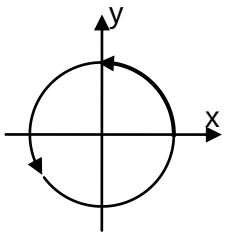
$\{x = \ln t, y = t^2 + 1\}$

$\Rightarrow y = e^{2x} + 1$



$\{x = -2t - 1, y = -t + 2\}$

$\Rightarrow x = 2y - 2$



$\{x = \cos t, y = \sin t\}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

τροχιές

3. Η ίδια καμπύλη μπορεί να περιγραφεί παραμετρικά με πολλές διαφορετικές παραμετρικές εξισώσεις κάνοντας αλλαγή παραμέτρου. Π.χ. αντικαθιστώντας στις εξισώσεις 3: $t \to 2t$, βρίσκουμε τις εξισώσεις 4 που παριστάνουν την ίδια καμπύλη του τρίτου γραφήματος παραπάνω.

5. Σχετιζόμενοι ρυθμοί.

Θεωρούμε δύο παραμετρικές εξισώσεις και την αντίστοιχη εξίσωση της τροχιάς:

$$\{x = x(t),\ y = y(t)\} \Rightarrow f(x, y) = c\,.$$

Οι αντίστοιχες παράγωγοι συνδέονται με την παρακάτω σχέση *σχετιζόμενων ρυθμών* (related rates).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad \text{ή ανίστροφα} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dt} \Big/ \frac{dy}{dt} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}},$$

όπου με πάνω τελεία συμβολίζουμε τις παραγώγους ως προς την παράμετρο t.

Πράγματι, χρησιμοποιώντας τους τύπους αλυσωτής και αντίστροφης παραγώγισης, βρίσκουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} = \frac{dy/dt}{dx/dt}.$$

Παράδειγμα. Θα επαληθεύσουμε την σχέση σχετιζόμενων ρυθμών στην τροχιά:

$$\{x = 1 + 2\sin t,\ y = \cos t\} \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$$

Βρίσκουμε:

αριστερό μέρος:

$$(x-1)/2 + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -(x-1)/4y = \sin t / 2\cos t$$

δεξιό μέρος: $\dot{y}/\dot{x} = -\sin t / 2\cos t$.

Για την παράγωγο στο αριστερό μέρος παραγωγίσαμε πλεγμένα ως προς x.

1β.2 Κυρτές Περιοχές

1. Ευθεία.

Μια *ευθεία* (line) στο επίπεδο παριστάνεται με μια *γραμμική εξίσωση* (linear equation):

$$\alpha x + \beta y = c .$$

Ειδικότερα, για μία ευθεία που διέρχεται από κάποιο συγκεκριμένο σημείο (x_0, y_0) θα ισχύει λόγω της παραπάνω: $\alpha x_0 + \beta y_0 = c$, και η εξίσωση θα γράφεται:

$$\alpha x + \beta y = \alpha x_0 + \beta y_0 \Leftrightarrow \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0 .$$

Η εξίσωση και η αντίστοιχη ευθεία καλείται *ομογενής* (homogeneous) αν διέρχεται από το σημείο $(0,0)$, οπότε θα γράφεται:

$$\alpha x + \beta y = 0 .$$

Μια ευθεία στο επίπεδο μπορεί να παρασταθεί και παραμετρικά, με δύο παραμετρικές γραμμικές εξισώσεις:

$$\{x = \gamma + \zeta t,\ y = \delta + \eta t\} \text{ με παράμετρο } t \text{ και } \gamma, \zeta, \delta, \eta \text{ σταθερές.}$$

Αν στην τιμή της παραμέτρου $t = 0$ έχουμε το σημείο (x_0, y_0) της ευθείας, τότε οι παραμετρικές εξισώσεις μπορούν να γραφούν στη μορφή:

$$\{x = x_0 + \zeta t,\ y = y_0 + \eta t\} .$$

Παραμετρική ευθεία μπορεί να οριστεί και με μη γραμμικές παραμετρικές εξισώσεις. Π.χ. οι παρακάτω παραβολικές εξισώσεις ορίζουν παραμετρική ευθεία:

$$\{x = t^2, y = 2t^2 + 1\} \Rightarrow y = 2x + 1.$$

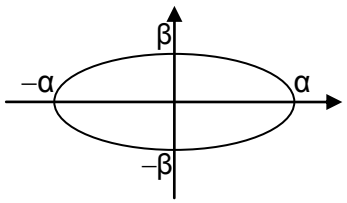
2. Έλλειψη.

Θεωρούμε τον κύκλο με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα α:

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1.$$

Η γενική μορφή της παραπάνω εξίσωσης όπου οι παρανομαστές μπορεί να είναι και διαφορετικοί, καλείται *έλλειψη* (ellipse):

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \ .$$



έλλειψη

Οι τομές με τους άξονες είναι:

$$x = 0 \Rightarrow y = \pm\beta \qquad \text{και}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \pm\alpha .$$

Τα $\{\alpha,\beta\}$ καλούνται *ακτίνες* της έλλειψης, μία μικρή και μία μεγάλη. Αν είναι ίσες έχουμε την ειδική περίπτωση του κύκλου. Η παραπάνω έλλειψη έχει το κέντρο της στο σημείο $(0,0)$. Γενικότερα, η έλλειψη με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνες $\{\alpha,\beta\}$, παριστάνεται με την εξίσωση:

$$\frac{(x - x_o)^2}{\alpha^2} + \frac{(y - y_o)^2}{\beta^2} = 1.$$

Προκύπτει από την παραπάνω κανονική με μετατόπιση κατά το διάνυσμα (x_0, y_0). Αντίστροφα, συμπληρώνοντας τα τετράγωνα, βρίσκουμε ότι:

- *Κάθε τετραγωνική εξίσωση δύο μεταβλητών της μορφής:*

$$Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + Z = 0 \ \ \mu\varepsilon \ \ AB > 0,$$

όπου τα A,B *έχουν γνήσια το ίδιο πρόσημο, παριστάνει έλλειψη (κύκλο αν* $A = B$*) ή σημείο ή κενό.*

Παράδειγμα.

1. Η $x^2 + y^2 - 2x + 2 = c \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = c - 1$, παριστάνει:

κύκλο αν $c>1$, το σημείο $(1,0)$ αν $c=1$, το κενό αν $c<1$.

2. Η $2x^2+y^2+x-y=c$, γράφεται:

$$2(x^2+\frac{1}{2}x)+(y^2-y)=2\left(x^2+2\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)+\left(y^2-2\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=c \quad \Leftrightarrow 2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=c+\frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1/4)^2}{(c+3/8)/2}+\frac{(y-1/2)^2}{(c+3/8)}=1.$$

Παριστάνει έλλειψη $\Leftrightarrow c+3/8>0 \Leftrightarrow c>-3/8$. Για όλες τις τιμές του c, οι ελλείψεις που προκύπτουν είναι ομόκεντρες, με κέντρο: $(x_0=-1/4,\ y_0=1/2)$, και ακτίνες:

$\alpha=\frac{\sqrt{c+3/8}}{\sqrt{2}}$, $\beta=\sqrt{c+3/8}$, οπότε η σχέση μεταξύ των ακτίνων είναι για όλες τις ελλείψεις: $\beta=\sqrt{2}\alpha$.

Η μεγάλη ακτίνα είναι στη κατεύθυνση του $y-$άξονα.

- Αν $c=-3/8$, βρίσκουμε την εκφυλισμένη έλλειψη με μηδενική ακτίνα και η εξίσωση παριστάνει ένα σημείο, το κέντρο.
- Αν $c<-3/8$, η εξίσωση δεν ικανοποιείται από κανένα σημείο και το σύνολο των σημείων που παριστάνει είναι το κενό.

3. Ανισότητες.

Κάθε εξίσωση: $f(x,y)=c$, εκτός από μια καμπύλη στο επίπεδο καθορίζει γενικά και δύο περιοχές εκατέρωθεν της καμπύλης. Αποτελούνται από τα σημεία των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν τη μια από τις *ανισότητες* (inequality):

$$f(x,y)\geq c \quad \text{ή} \quad f(x,y)\leq c\ .$$

Για να αντιστοιχήσουμε μια περιοχή με την αντίστοιχη ανισότητα αρκεί να ελέγξουμε ένα σημείο της. Ειδικά στη περίπτωση που η εξίσωση έχει τη μορφή συνάρτησης: $y=f(x)$, τότε οι περιοχές πάνω και κάτω από την καμπύλη της ικανοποιούν τις ανισότητες:

$$y\geq f(x) \quad \& \quad y\leq f(x),$$

αντίστοιχα. Αν η συνάρτηση δίνεται στη μορφή $x = f(y)$, τότε η δεξιά και η αριστερή περιοχή θα ικανοποιούν τις ανισότητες*:*

$$x \geq f(y) \quad \& \quad x \leq f(y),$$

αντίστοιχα. Στις παραπάνω ανισότητες κάθε περιοχή περιλαμβάνει και την καμπύλη που αντιστοιχεί στην ισότητα. Λέμε ότι η περιοχή είναι *κλειστή* (closed). Η ίδια η καμπύλη αποτελεί το *σύνορο* (boundary) της περιοχής. Αν αφαιρέσουμε το σύνορο αυτό που μένει καλείται *εσωτερικό* (interior)της περιοχής και περιγράφεται με την αντίστοιχη *γνήσια ανισότητα* (strict inequality):

$$f(x,y) > c \text{ ή } f(x,y) < c.$$

Τέτοιες περιοχές καλούνται *ανοικτές* (open).

Παράδειγμα.

1. Μια ευθεία $\alpha x + \beta y = c$, χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα που ικανοποιούν τις ανισότητες:

$$\alpha x + \beta y \geq c \quad \text{και} \quad \alpha x + \beta y \leq c,$$

αντίστοιχα. Για να αντιστοιχήσουμε ένα ημιεπίπεδο σε μια ανισότητα αρκεί να ελέγξουμε ένα σημείο, π.χ. το $(0,0)$. Ειδικά αν και οι τρεις σταθερές $\{\alpha,\beta,c\}$ είναι θετικές, όπως στο πρώτο γράφημα παρακάτω, τότε η περιοχή που περιέχει το $(0,0)$ αντιστοιχεί στην ανισότητα $\alpha x + \beta y \leq c$.

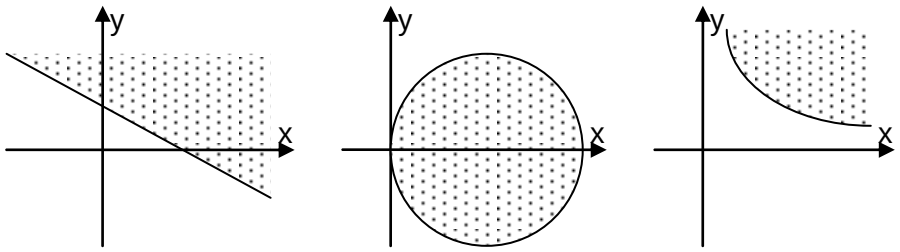
2. Μια έλλειψη χωρίζει το επίπεδο σε δύο περιοχές, την *εντός* και την εκτός, οι οποίες χαρακτηρίζονται από τις ανισότητες:

$$\frac{(x-x_o)^2}{\alpha^2} + \frac{(y-y_o)^2}{\beta^2} \leq 1 \quad \& \quad \frac{(x-x_o)^2}{\alpha^2} + \frac{(y-y_o)^2}{\beta^2} \geq 1,$$

αντίστοιχα. Στο δεύτερο γράφημα παρακάτω δείχνουμε την εντός περιοχή ενός κύκλου.

3. Η εξίσωση $x^{1/4}y^{3/4} = 4$ ορίζει μια υπερβολική καμπύλη που χωρίζει τη θετική περιοχή σε δύο υποπεριοχές. Ειδικά η ανισότητα $x^{1/4}y^{3/4} \geq 4$ αντιστοιχεί στη περιοχή η οποία δεν περιέχει το $(0,0)$ διότι το σημείο αυτό ικανοποιεί την άλλη ανισότητα. Εξάλλου η ανισότητα μπορεί να γραφεί ως πάνω περιοχή υπερβολικής καμπύλης:

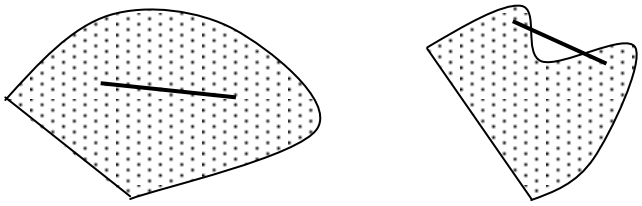
$$x^{1/4}y^{3/4} \geq 4 \Leftrightarrow y \geq 4^{4/3}x^{-1/3}.$$



$x + 2y \geq 1$ $\quad$ $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ $\quad$ $x^{1/4}y^{3/4} \geq 4$

γραφήματα ανισοτήτων

4. Κυρτή (convex) καλείται μια περιοχή του επιπέδου αν για κάθε δύο σημεία της περιλαμβάνει και όλα τα ενδιάμεσα, δηλαδή ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει. Μια κυρτή περιοχή μπορεί να είναι φραγμένη ή μη φραγμένη. Επίσης μπορεί να είναι κλειστή οπότε περιλαμβάνει την καμπύλη του συνόρου της, ή ανοικτή οπότε δεν την περιλαμβάνει.



κυρτή περιοχή $\quad$ **μη κυρτή περιοχή**

Παράδειγμα.

Εκτός από ολόκληρο το επίπεδο, οι παρακάτω είναι κλειστές κυρτές περιοχές:

1. Η θετική περιοχή: $\{x \geq 0, y \geq 0\}$.

2. Τα ημιεπίπεδα που ορίζονται με γραμμικές ανισότητες, στη μορφή:

$$\alpha x + \beta y \leq c \text{ ή } \alpha x + \beta y \geq c.$$

3. Οι πολυγωνικές περιοχές που ορίζονται ως τομές ημιεπιπέδων, δηλαδή από ένα σύνολο γραμμικών ανισοτήτων. Π.χ.

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\le 4 \;\&\; x-y\ge 1 \;\&\; x\ge 0\}.$$

4. Το τμήμα του επιπέδου εσωτερικό ενός κύκλου, π.χ. $x^2+y^2\le \alpha^2$

5. Το εντός μίας παραβολής τμήμα του επιπέδου, π.χ.
$\{y\ge x^2\}$ ή $\{y\le -x^2\}$.

Ειδικά το 3 προκύπτει από το 2 και την παρακάτω γενική ιδιότητα που είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της κυρτότητας:

- *Η τομή κυρτών περιοχών είναι κυρτή περιοχή.*

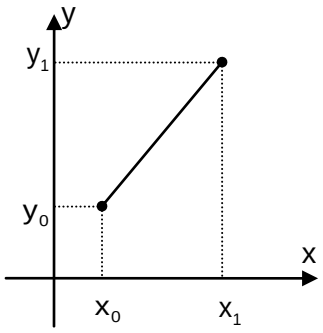
5. Κυρτός συνδυασμός.

Δύο σημεία στο επίπεδο: (x_0,y_0) & (x_1,y_1)
ορίζουν μια ευθεία με κλίση:

$$m=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

Η εξίσωση της ευθείας μπορεί να γραφτεί με διάφορους τρόπους, π.χ.

$$y=y_0+m(x-x_0)$$
$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$
$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$



κυρτός συνδυασμός

Θα ασχοληθούμε με την τρίτη μορφή. Συμβολίζοντας τον κοινό λόγο με t, μπορούμε να εκφράσουμε την εξίσωση της ευθείας παραμετρικά με τις εξισώσεις:

$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=t\Rightarrow\begin{cases}x=x_0+(x_1-x_0)t=(1-t)x_0+tx_1\\ y=y_0+(y_1-y_0)t=(1-t)y_0+ty_1\end{cases}.$$

Η παράμετρος t μετράει την προσημασμένη απόσταση του σημείου (x,y) από το σημείο (x_0,y_0), ως ποσοστό της συνολικής απόστασης μεταξύ των δύο αρχικών σημείων. Έτσι, τα σημεία που βρίσκονται ανάμεσά τους, δηλαδή τα σημεία στο ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει, προκύπτουν παίρνοντας τιμές της παραμέτρου στο διάστημα:

$$0 \le t \le 1.$$

Έτσι τα αρχικά σημεία είναι τα ακραία σημεία του διαστήματος, και αντιστοιχούν στις τιμές της παραμέτρου: $t = 0$ και $t = 1$.

Οι παραπάνω συνδυασμοί των συντεταγμένων δύο σημείων που μας δίνουν τα ενδιάμεσα καλούνται *κυρτοί συνδυασμοί* (convex combinations) των δύο σημείων. Αντικαθιστώντας την παράμετρο $s = 1 - t$, οι κυρτοί συνδυασμοί μπορούν να εκφραστούν και στη μορφή:

$$\{x = sx_0 + tx_1,\ y = sy_0 + ty_1\} \quad \text{με } 0 \le s \le 1,\ 0 \le t \le 1,\ s + t = 1\ .$$

Οι συντελεστές $\{s,t\}$ είναι θετικοί με άθροισμα 1 και αποτελούν τα *βάρη* (weights) με τα οποία συνδυάζονται τα αρχικά ακραία σημεία για να προκύψουν τα ενδιάμεσα. Όσο μεγαλύτερο είναι ένα βάρος τόσο πλησιέστερα βρισκόμαστε στο αντίστοιχο ακραίο σημείο. Συνδυάζοντας τις παραπάνω έννοιες, μπορούμε να πούμε ότι:

- *Μια περιοχή του επιπέδου είναι κυρτή αν περιέχει όλους τους κυρτούς συνδυασμούς των σημείων της.*

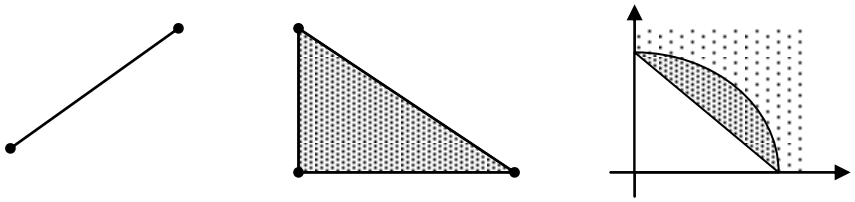
6. Κυρτοποίηση.

Σε πολλές εφαρμογές μας ενδιαφέρει οι περιοχές να είναι κυρτές. Αν μια περιοχή δεν είναι κυρτή μπορούμε να την κάνουμε κυρτή διευρύνοντάς την ώστε να περιέχει όλους τους κυρτούς συνδυασμούς των σημείων της. Η μικρότερη δυνατή τέτοια διεύρυνση καλείται *κυρτό κέλυφος* (convex hull) της αρχικής περιοχής, ενώ η διαδικασία σχηματισμού της καλείται *κυρτοποίηση* (convexification).

Παράδειγμα.

1. Το κυρτό κέλυφος δύο σημείων είναι το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει, όπως στο πρώτο γράφημα παρακάτω.

2. Το κυρτό κέλυφος τριών σημείων είναι η τριγωνική περιοχή που τα έχει ως κορυφές, όπως στο δεύτερο γράφημα παρακάτω.



κυρτοποίηση

3. Η περιοχή που βρίσκεται στη θετική περιοχή εκτός του μοναδιαίου κύκλου δεν είναι κυρτή. Για την κυρτοποίησή της αρκεί να συμπεριλάβουμε το τμήμα της που ορίζεται από την χορδή η οποία ενώνει τα σημεία τομής του κύκλου με τους θετικούς ημιάξονες, όπως στο τρίτο γράφημα του παραπάνω σχήματος.

7. Γραμμική παρεμβολή (linear interpolation) μιας συνάρτησης $f(x)$, μεταξύ δύο σημείων της (x_0,y_0) και (x_1,y_1) καλείται η γραμμική συνάρτηση της χορδής που τα συνδέει.

$$y = y_0 + m(x - x_0) \quad \text{για } x \text{ μεταξύ των } \{x_0, x_1\}, \text{ όπου } m = \frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o} .$$

Παράδειγμα.
Για την συνάρτηση $y = x^2$, μεταξύ των σημείων $(x_1,y_1) = (1,1)$ και $(x_2,y_2) = (2,4)$, βρίσκουμε την γραμμική παρεμβολή:

$$y = 1 + \frac{4-1}{2-1}(x-1) = 1 + 3(x-1) = 3x - 2 \quad \text{για } 1 \le x \le 2 .$$

1β.3 Ελαστικότητα

1. Ελαστικότητα.

Θεωρούμε δύο μεταβλητές $\{x, y\}$ που συνδέονται με κάποια σχέση συνάρτησης ή κάποιας γενικότερης μεταξύ τους σχέσης. Σε πολλές εφαρμογές αντί των μεγεθών:

$\Delta x,\ \Delta y$, δηλ των *μεταβολών* (changes)

από κάποιες αρχικές τιμές, μας ενδιαφέρουν τα σχετικά μεγέθη:

$\frac{\Delta x}{x},\ \ \frac{\Delta y}{y}$, δηλ. οι *σχετικές μεταβολές* (relative changes),

ή, εναλλακτικά, οι *ποσοστιαίες μεταβολές* (percentage changes) που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις σχετικές μεταβολές με τον συντελεστή 100:

$$\%\Delta x = 100\frac{\Delta x}{x},\ \ \%\Delta y = 100\frac{\Delta y}{y}.$$

Σ΄ αυτή την περίπτωση αντί του λόγου των μεταβολών παίρνουμε τον λόγο των σχετικών μεταβολών που είναι ίσος και με τον λόγο των ποσοστιαίων μεταβολών. Στο όριο $\Delta x \to 0$ βρίσκουμε ένα μέγεθος αντίστοιχο της παραγώγου το οποίο καλείται *ελαστικότητα* (elasticity):

$$\frac{\%\Delta y}{\%\Delta x} = \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{x}{y}\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{xy'}{y} : \textit{ελαστικότητα του } y \textit{ ως προς } x.$$

Παρατηρούμε ότι:

1. *Η παράγωγος μετράει την μεταβολή του* y *για αύξηση του* x *κατά 1, οριακά.*
2. *Η ελαστικότητα μετράει την ποσοστιαία μεταβολή του* y *για αύξηση του* x *κατά 1%, οριακά.*

Θα διακρίνουμε τα δύο μεγέθη χρησιμοποιώντας τους παρακάτω εναλλακτικούς συμβολισμούς για το κάθε μέγεθος:

1. $m = D_x y = y'$, για την παράγωγο του y ως προς x
2. $\varepsilon = E_x y = xy'/y$, για την ελαστικότητα του y ως προς x

Παράδειγμα.
Η γραμμική συνάρτηση έχει σταθερή παράγωγο, αλλά μεταβαλλόμενη ελαστικότητα:

$$y = \alpha x + \beta \Rightarrow m = \alpha,\ \varepsilon = \frac{x\alpha}{y} = \frac{\alpha x}{\alpha x + \beta}.$$

Παράδειγμα.
Θεωρούμε την εξίσωση $x^\alpha y^\beta = c$ σε κάποιο σημείο της (x,y). Παραγωγίζοντας πλεγμένα ως προς x, βρίσκουμε την παράγωγο:

$$(x^\alpha y^\beta)' = c' \Rightarrow \alpha x^{\alpha-1} y^\beta + \beta x^\alpha y^{\beta-1} y' = 0 \Rightarrow m = y' = -\frac{\alpha x^{\alpha-1} y^\beta}{\beta x^\alpha y^{\beta-1}} = -\frac{\alpha y}{\beta x}.$$

Η ελαστικότητα του y ως προς x είναι:

$$\varepsilon = \frac{xy'}{y} = -\frac{x}{y}\frac{\alpha y}{\beta x} = -\frac{\alpha}{\beta} : \text{σταθερή}.$$

Συμπεραίνουμε ότι το μέγεθος $x^\alpha y^\beta$ θα παραμείνει σταθερό οριακά, αν αύξηση του x κατά 1% συνοδευτεί με μείωση του y κατά $(\alpha/\beta)\%$, ή, ισοδύναμα, αύξηση του x κατά $\beta\%$ συνοδευτεί με μείωση του y κατά $\alpha\%$, ανεξάρτητα των αρχικών τιμών τους.

2. Ισοελαστικότητα.
Σε κάθε (x,y) το πρόσημο της ελαστικότητας καθορίζεται από αυτό της παραγώγου. Στις εφαρμογές ιδιαίτερη σημασία έχει το μέτρο της ελαστικότητας. Παρατηρούμε σχετικά ότι, ενώ τα μέτρα των μεταβολών:

$$|\Delta x|,\ |\Delta y|$$

δεν είναι συγκρίσιμα διότι εξαρτώνται από τις χρησιμοποιούμενες μονάδες μέτρησης, αντίθετα τα μέτρα των σχετικών και των ποσοστιαίων μεταβολών:

$$|\%\Delta x|,\ |\%\Delta y|$$

είναι συγκρίσιμα ως ανεξάρτητα της μονάδας μέτρησης. Η σύγκριση αφορά το λόγο τους, ο οποίος οριακά ισούται με το μέτρο της ελαστικότητας:

$$|\varepsilon| = |E_x y| = \lim \frac{|\%\Delta y|}{|\%\Delta x|}.$$

Λέμε ότι η εξάρτηση του y από το x είναι:

1. *ελαστική* (elastic) αν $|E_x y| > 1$
2. *ανελαστική* (inelastic) αν $|E_x y| < 1$
3. *ισοελαστική* (isoelastic) αν $|E_x y| = 1.$

Έτσι, η εξάρτηση είναι:
ελαστική αν οριακά μια ποσοστιαία μεταβολή του x *προκαλεί γνήσια μεγαλύτερη ποσοστιαία μεταβολή του* y *σε απόλυτες τιμές, και ανελαστική αν προκαλεί γνήσια μικρότερη.*

Παρατήρηση. Συχνά η ελαστικότητα ορίζεται ως το μέτρο:

$$|\varepsilon| = |xy'/y|$$

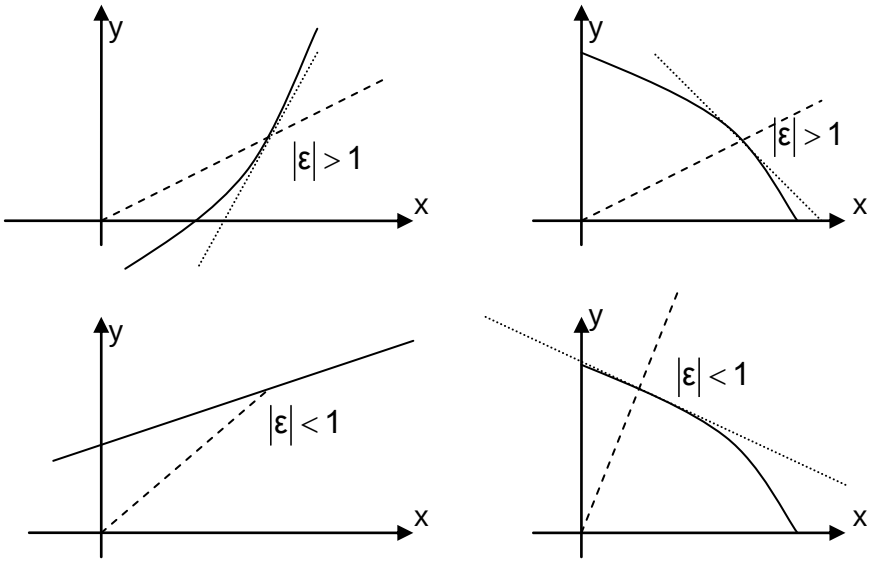
οπότε είναι πάντοτε θετική. Σ' αυτές τις περιπτώσεις θεωρούμε ότι το πρόσημο είναι γνωστό.

3. Γράφημα ελαστικότητας.
Προκειμένου να εκτιμήσουμε γραφικά την ελαστικότητα γράφουμε το μέτρο της στην παρακάτω εναλλακτική μορφή:

$$|\varepsilon| = |E_x y| = \left|\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}\right| = \left|\frac{dy}{dx}\right| / \left|\frac{y}{x}\right| = \frac{|\text{οριακος ρυθμος}|}{|\text{μεση τιμή}|}$$

Δηλαδή η ελαστικότητα συγκρίνει τον οριακό ρυθμό μεταβολής προς την μέση τιμή. Σε κάθε σημείο της καμπύλης $y = y(x)$ τα δυο αυτά μεγέθη έχουν την παρακάτω γεωμετρική παράσταση:

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| = |\text{κλιση εφαπτομενης}| \qquad \left|\frac{y}{x}\right| = |\text{κλιση ακτινας}|$$



μέτρο ελαστικότητας

Έτσι στο τυχόν σημείο (x, y) της καμπύλης του γραφήματος:

Η εξάρτηση του y *από το* x *είναι ελαστική αν η εφαπτόμενη είναι περισσότερο απότομη από την ακτίνα όπως στα δύο πάνω γραφήματα του παραπάνω σχήματος, ανελαστική αν είναι λιγότερο απότομη όπως στα δύο κάτω γραφήματα, ισοελαστική αν είναι το ίδιο απότομη.*

Τα τμήματα ελαστικότητας και ανελαστικότητας χωρίζονται μεταξύ τους από τα σημεία ισοελαστικότητας:

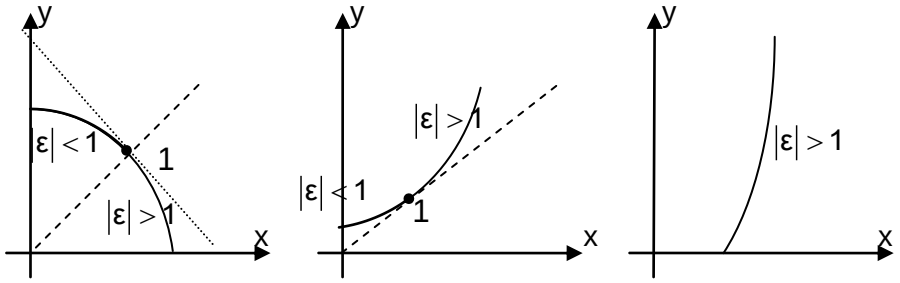
$$|\varepsilon| = 1 \Rightarrow xy'/y = \pm 1.$$

Αν δεν υπάρχουν τέτοια τότε έχουμε παντού ελαστικότητα ή παντού ανελαστικότητα.

Παράδειγμα.

Θα εξετάσουμε γραφικά την ελαστικότητα των παρακάτω συναρτήσεων στη θετική περιοχή $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$. Εφόσον τα x και y είναι θετικά το πρόσημο της ελαστικότητας συμπίπτει με το πρόσημο της παραγώγου. Ειδικότερα, η ισοελαστικότητα καθορίζεται από τη σχέση

$\varepsilon = 1$ αν η συνάρτηση είναι αύξουσα, $\varepsilon = -1$ αν είναι φθίνουσα. Ως προς το μέτρο της ελαστικότητας βρίσκουμε τα εξής για διάφορες περιπτώσεις:
1. Η $y = 2x$ έχει σταθερή ελαστικότητα ίση με 1. Όλα τα σημεία της είναι ισοελαστικά.
2. Η $y = 1 - x^2$ είναι φθίνουσα με $\varepsilon = x(-2x)/1 - x^2 = -2x^2/1 - x^2$.
Είναι ισοελαστική όταν $\varepsilon = -1 \Leftrightarrow -2x^2/1 - x^2 = -1 \Leftrightarrow x = 1/\sqrt{3}$, ανελαστική όταν $-1 < \varepsilon < 0 \Leftrightarrow 0 \le x < 1/\sqrt{3}$, ελαστική όταν $\varepsilon < -1 \Leftrightarrow 1/\sqrt{3} < x \le 1$, όπως στο πρώτο γράφημα του παρακάτω σχήματος.



$y = 1 - x^2$ $y = e^x$ $y = x^2 - 1$

ισοελαστικότητα

3. Η $y = e^x$ είναι αύξουσα, με $\varepsilon = xe^x/e^x = x$. Είναι ισοελαστική όταν $\varepsilon = 1 \Leftrightarrow x = 1$, ανελαστική όταν $0 \le x < 1$, ελαστική όταν $x > 1$, όπως στο δεύτερο γράφημα του παραπάνω σχήματος.
4. Η $y = x^2 - 1$ είναι αύξουσα με $\varepsilon = x2x/(x^2 - 1) = 2x^2/(x^2 - 1)$. Είναι ισοελαστική όταν $2x^2/x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = -1$, εξίσωση που δεν έχει λύση. Είναι παντού ελαστική, όπως στο τρίτο γράφημα του παραπάνω σχήματος.

4. Ομογένεια.
Οι γραμμικές είναι οι μόνες συναρτήσεις που έχουν σταθερή παράγωγο. Αντίστοιχα, οι δυνάμεις είναι οι μόνες συναρτήσεις που έχουν σταθερή ελαστικότητα. Καλούνται και *ομογενείς* συναρτήσεις (homogeneous):

$$y = \alpha x^{\varepsilon} \Rightarrow E_x y = \frac{x(\alpha \varepsilon x^{\varepsilon-1})}{\alpha x^{\varepsilon}} = \varepsilon .$$

Η ελαστικότητα είναι ίση με τη δύναμη. Λέμε ότι η συνάρτηση είναι *ομογενής βαθμού* ε. Μια ομογενής συνάρτηση είναι παντού ελαστική, ανελαστική ή ισοελαστική, διότι έχει σταθερή ελαστικότητα. Ανάλογα με τον βαθμό λέμε ότι η ομογενής συνάρτηση είναι:

- $|\varepsilon| > 1$: *αύξουσας απόδοσης κλίμακας* (increasing returns to scale)
- $|\varepsilon| < 1$: *φθίνουσας απόδοσης κλίμακας* (decreasing returns to scale)
- $|\varepsilon| = 1$: *σταθερής απόδοσης κλίμακας* (constant returns to scale).

Αγνοώντας τα πρόσημα, μια μεταβολή του x θα προκαλέσει μεταβολή του y σε μεγαλύτερο ποσοστό από αυτήν του x αν η σχέση είναι αύξουσας απόδοσης, σε μικρότερο ποσοστό αν είναι φθίνουσας απόδοσης, στο ίδιο ποσοστό αν είναι σταθερής απόδοσης, δηλαδή αν είναι *γραμμική ομογενής*: $y = \alpha x$.

Παράδειγμα.
Αν έχουμε $y = 10x^{-2/3}$ και το x αυξηθεί κατά 1% από οιαδήποτε αρχική τιμή, το y θα μεταβληθεί οριακά κατά $\varepsilon = -2/3\% = -0.666...\%$, δηλαδή θα ελαττωθεί οριακά κατά $0.666...\%$. Σε απόλυτες τιμές η μεταβολή του y είναι μικρότερη από την μεταβολή του x. Η συνάρτηση είναι ομογενής βαθμού $-2/3$, και επομένως φθίνουσας απόδοσης κλίμακας.

5. Ελαστικότητα αντίστροφης.
Όλα τα παραπάνω γραφήματα αφορούν την ελαστικότητα του y στον κατακόρυφο άξονα ως προς το x στον οριζόντιο άξονα. Από τον ορισμό της ως λόγου των ποσοστιαίων μεταβολών συμπεραίνουμε ότι στα ίδια (x, y) η ελαστικότητα του x ως προς y θα είναι το ανάστροφο του παραπάνω, όπως και για την παράγωγο:

$$f(x, y) = c \Rightarrow \quad E_y x = \frac{1}{E_x y} .$$

Πράγματι, έχουμε:

$$\frac{1}{E_x y} = \frac{y}{xy'(x)} = \frac{yx'(y)}{x} = E_y x \text{, διότι } y'(x) = \frac{1}{x'(y)}.$$

Ειδικότερα:
Μεταξύ των σχέσεων $y = y(x)$ *και* $x = x(y)$*, έχουμε ισοελαστικότητα στα ίδια σημεία, ενώ εναλλάσσονται τα τμήματα ελαστικότητας και ανελαστικότητας.*

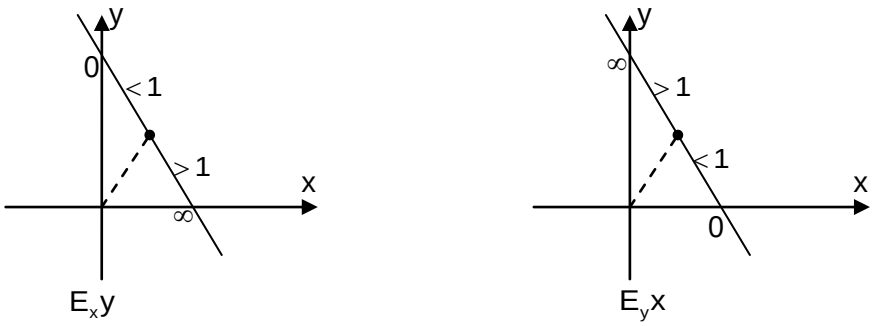
Παράδειγμα.
Επαληθεύουμε τον κανόνα της αντιστροφής:
1. Η $y = x^2$ έχει $E_x y = 2$, ως ομογενής.
2. Οι αντίστροφές της $x = \pm y^{1/2}$ έχουν $E_y x = 1/2$, ως ομογενείς.

Παράδειγμα.
Θεωρούμε τη γραμμική εξίσωση: $2x + y = 4$.

Θα έχουμε:

$$2x + y = 4 \Rightarrow \begin{cases} y = -2x + 4 \quad \mu\varepsilon\ y' = -2 \quad \Rightarrow E_x y = xy'/y = -2x/y \\ x = -y/2 + 2\ \mu\varepsilon\ x' = -1/2 \Rightarrow E_y x = yx'/x = -y/2x \end{cases}$$

Οι δύο ελαστικότητες είναι ανάστροφες μεταξύ τους. Στα δύο γραφήματα παρακάτω δίνουμε τα σημεία ισοελαστικότητας, ελαστικότητας και ανελαστικότητας για τις δύο σχέσεις. Επίσης τα σημεία όπου η ελαστικότητα είναι μηδενική ή άπειρη για την κάθε σχέση.



ελαστικότητα αντίστροφων σχέσεων

6. Ελαστικότητα γραμμικών.

Θεωρούμε μια γραμμική εξίσωση:

$$\alpha x + \beta y = c,$$

και εξετάζουμε την *ελαστικότητα του* x *στον οριζόντιο άξονα, ως προς το* y *στον κατακόρυφο.* Αν η εξίσωση είναι ομογενής τότε έχουμε παντού ισοελαστικότητα:

$$\alpha x + \beta y = 0 \Rightarrow x = -\frac{\beta}{\alpha} y \quad \text{με} \quad \varepsilon = 1$$

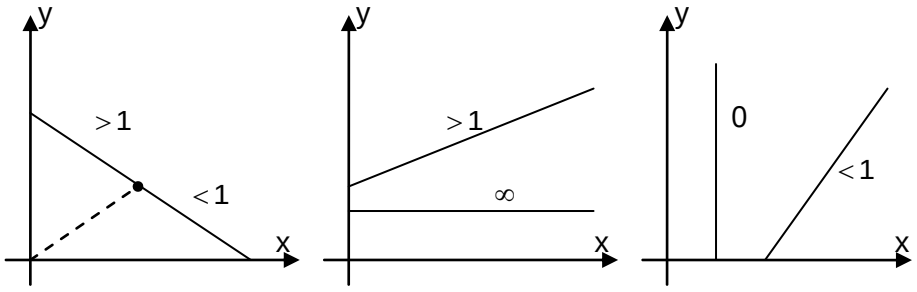
Αν δεν είναι ομογενής, τότε έχει ένα μοναδικό σημείο ισοελαστικότητας το οποίο βρίσκεται πάντοτε στο ενδιάμεσο της τομής με τους δύο άξονες:

$$x = -\frac{\beta}{\alpha} y + \frac{c}{\alpha} \Rightarrow E_y x = \frac{-\beta y}{-\beta y + c} \text{ και για } E_y x = -1 \text{ προσδιορίζουμε}$$

το σημείο

$$\left(y_0 = \frac{c}{2\beta}, x_0 = \frac{c}{2\alpha} \right).$$

Στο παρακάτω σχήμα δείχνουμε το μέτρο της ελαστικότητας του x ως προς y, για τις διάφορες περιπτώσεις, στη θετική περιοχή.



μέτρο ελαστικότητας του x ως προς y

Επισημαίνουμε τις ειδικές περιπτώσεις στο δεύτερο και στο τρίτο γράφημα του παραπάνω σχήματος.

1. Οριζόντια ευθεία με $E_y x = \infty$. Λέμε ότι η εξάρτηση του x από το y είναι *πλήρως ελαστική* (totally elastic)
2. Κατακόρυφη ευθεία με $E_y x = 0$. Λέμε ότι η εξάρτηση του x από το y είναι *πλήρως ανελαστική* (totally inelastic).

Παράδειγμα.

1. Η $y = 2x + 4$ αντιστοιχεί στο δεύτερο από τα παραπάνω γραφήματα. Συμπεραίνουμε ειδικά ότι στη θετική περιοχή: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ το x είναι παντού ελαστικό ως προς το y, δηλαδή η ποσοστιαία μεταβολή του είναι μεγαλύτερη σε απόλυτη τιμή.

2. Η $y = 2x - 4$ αντιστοιχεί στο τρίτο από τα παραπάνω γραφήματα. Συμπεραίνουμε ειδικά ότι στη θετική περιοχή: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ το x είναι παντού ανελαστικό ως προς το y, δηλαδή η ποσοστιαία μεταβολή του είναι μικρότερη σε απόλυτη τιμή.

7. Ποσοστιαία διαφορικά.

Σε αντιστοιχία με τα διαφορικά που αναφέραμε σε προηγούμενη ενότητα, ορίζονται και τα *σχετικά διαφορικά* ή, ισοδύναμα, τα *ποσοστιαία διαφορικά* ως προσεγγίσεις των αντίστοιχων σχετικών ή ποσοστιαίων μεταβολών:

$$\left\{\frac{dx}{x}, \frac{dy}{y}\right\} \text{ ή } \left\{\%dx = 100\frac{dx}{x}, \%dy = 100\frac{dy}{y}\right\}.$$

Από τον ορισμό τους διαπιστώνουμε ότι η ελαστικότητα ισούται με το λόγο των σχετικών ή ισοδύναμα των ποσοστιαίων διαφορικών:

$$\varepsilon = E_x y = \frac{dy/y}{dx/x} = \frac{\%dy}{\%dx}.$$

Παράδειγμα.

Η συνάρτηση $y = 1 + x^2$, έχει παράγωγο και ελαστικότητα:

$$m = y' = 2x, \quad \varepsilon = xy'/y = 2x^2/(1+x^2),$$

αντίστοιχα. Π.χ. στο $x = 2$, βρίσκουμε: $m(2) = 4$, $\varepsilon(2) = 8/5$. Επομένως οι μεταβολές και οι ποσοστιαίες μεταβολές από τις τιμές: $(x = 2, y = 5)$, θα συνδέονται οριακά με τις σχέσεις:

$$(dy) = 4(dx) \quad \text{και} \quad (\%dy) = (8/5)(\%dx).$$

1β.4 Σχετικός Ρυθμός

1. Σχετικός ρυθμός.

Θεωρούμε δύο μεταβλητές x και y που συνδέονται με μια εξίσωση. Ορίσαμε την παράγωγο παίρνοντας τον λόγο των μεταβολών και την ελαστικότητα παίρνοντας τον λόγο των σχετικών ή ποσοστιαίων μεταβολών. Σε πολλές εφαρμογές, π.χ. όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή x είναι ο *χρόνος* (time), μας ενδιαφέρει ο λόγος της σχετικής μεταβολής του y προς τη μεταβολή του x. Στο όριο βρίσκουμε το μέγεθος:

$$\frac{\Delta y / y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{1}{y} \to \frac{y'(x)}{y(x)},$$

ονομαζόμενο *σχετικός ρυθμός* (relative rate) και το οποίο μετράει τη σχετική μεταβολή του y ανά μοναδιαία αύξηση του x, οριακά. Αν το πολλαπλασιάσουμε με 100 βρίσκουμε το ισοδύναμο ποσοστιαίο μέγεθος, το οποίο στις εφαρμογές καλείται και *ρυθμός ανάπτυξης* (growth rate):

$$100\frac{y'(x)}{y(x)}.$$

Το μέγεθος αυτό μετράει την ποσοστιαία μεταβολή του y ανά μοναδιαία αύξηση του x, οριακά.

Έτσι έχουμε τελικά τρία μεγέθη που μετράνε τη σχέση μεταξύ οριακών μεταβολών:

1. $m = D_x y = y'(x) = \frac{dy}{dx}$, *ρυθμός*

2. $\varepsilon = E_x y = \dfrac{xy'(x)}{y(x)} = \dfrac{dy/y}{dx/x} = \dfrac{\%dy}{\%dx}$, *ελαστικότητα*

3. $r = R_x y = \dfrac{y'(x)}{y(x)} = \dfrac{dy/y}{dx}$ ή $\%r = 100r = \dfrac{\%dy}{dx}$, *σχετικός ρυθμός*.

Παρατηρούμε ότι μηδενίζονται στα ίδια σημεία, δηλαδή τα στάσιμα σημεία είναι τα ίδια και στις τρεις περιπτώσεις. Επίσης αν τα μεγέθη x και y είναι και τα δύο θετικά, τότε όλοι οι ρυθμοί έχουν το ίδιο πρόσημο.

Παράδειγμα.
Η συνάρτηση $y = 1 + x^2$, έχει:

$$m = y' = 2x,\ \ \varepsilon = xy'/y = 2x^2/(1+x^2),\ r = y'/y = 2x/(1+x^2).$$

Έτσι, π.χ. στο $x = 2$, βρίσκουμε:

$$m(2) = 4,\ \varepsilon(2) = 8/5,\ \ r(2) = 4/5 \Rightarrow \%r(2) = 100r = 80$$

Επομένως, οι οριακές μεταβολές των $\{x, y\}$ από αρχικές τιμές: $\{x = 2, y = 5\}$, θα συνδέονται με τις σχέσεις:

$$dy = 4dx,\ \ \%dy = (8/5)\%dx,\ \ \%dy = 80dx.$$

2. Σταθεροί ρυθμοί.
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι συναρτήσεις που έχουν κάποιον από τους ρυθμούς σταθερό. Διαπιστώνουμε ότι:

1. *Οι γραμμικές:* $y = mx + \beta$, *έχουν σταθερό ρυθμό* m
2. *Οι δυνάμεις:* $y = cx^{\varepsilon}$, *έχουν σταθερή ελαστικότητα* ε
3. *Οι εκθετικές:* $y = ce^{rx}$, *έχουν σταθερό σχετικό ρυθμό* r.

Παράδειγμα.
Για οιοδήποτε αρχικό x:

1. Αν $y = 2x + \beta$ τότε $dy = 2dx$
2. Αν $y = c\sqrt{x} = cx^{1/2}$ τότε $(\%dy) = 0{,}5(\%dx)$
3. Αν $y = ce^{-0{,}02x}$ τότε $\%dy = 100(-0{,}02)dx = -2dx$.

3. Λογαριθμική κλίμακα.

Η παράγωγος μιας σχέσης παριστάνεται γραφικά με την κλίση της αντίστοιχης καμπύλης στο κανονικό σύστημα συντεταγμένων. Για να παραστήσουμε γραφικά την ελαστικότητα χρησιμοποιούμε αντί των αρχικών μεταβλητών x και y, τους λογαρίθμους των απόλυτων τιμών τους:

$$u = \log|x| \quad \& \quad v = \log|y| .$$

Έτσι μια εξίσωση του ζεύγους (x, y) μπορούμε να την παραστήσουμε ως εξίσωση του ζεύγους (u, v) .

Δηλαδή στους δύο άξονες τοποθετούμε αντί των τιμών των μεταβλητών τις τιμές των λογαρίθμων των απόλυτων τιμών τους. Λέμε ότι χρησιμοποιούμε *λογαριθμικό σύστημα συντεταγμένων* ή *λογαριθμική κλίμακα* (logarithmic scale). Διαπιστώνουμε τώρα ότι η κλίση του γραφήματος στην λογαριθμική κλίμακα μας δίνει την ελαστικότητα. Δηλαδή:

Η ελαστικότητα του y *ως προς* x *ισούται με την παράγωγο του* $\log|y|$ *ως προς* $\log|x|$*, σε οιαδήποτε βάση.*

Πράγματι, ειδικά για τη βάση e έχουμε:

$$\frac{dv}{du} = \frac{d(\ln|y|)}{d(\ln|x|)} = \frac{d(\ln|y|)}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\ln|x|} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\frac{1}{1/x} = E_x y .$$

Παράδειγμα. Στη λογαριθμική κλίμακα, οι δυνάμεις, που είναι οι ομογενείς συναρτήσεις, γίνονται γραμμικές με σταθερή κλίση ε ίση με την ελαστικότητα:

$$y = cx^{\varepsilon} \Rightarrow |y| = |c||x|^{\varepsilon} \Rightarrow \ln|y| = \ln|c| + \varepsilon \ln|x| \Rightarrow v = \varepsilon u + \ln|c| .$$

4. Ημιλογαριθμική κλίμακα.

Με το ίδιο τρόπο μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά τον σχετικό ρυθμό, παίρνοντας τον λογάριθμο μόνο της εξαρτημένης μεταβλητής. Τώρα αντί των αρχικών μεταβλητών x και y, έχουμε τις νέες μεταβλητές:

x και v, όπου: $v = \ln|y| .$

Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι χρησιμοποιούμε *ημιλογαριθμική κλίμακα* (semi-logarithmic scale). Η κλίση του γραφήματος στην ημιλογαριθμική κλίμακα παριστάνει τον σχετικό ρυθμό. Πράγματι:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{d\ln|y|}{dx}=\frac{d\ln|y|}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=R_x y\,.$$

Παράδειγμα.
Σε ημιλογαριθμική κλίμακα η εκθετική συνάρτηση γίνεται γραμμική με σταθερή κλίση r ίση με τον σχετικό ρυθμό. :

$$y=ce^{rx}\Rightarrow|y|=|c|e^{rx}\Rightarrow\ln|y|=\ln|c|+rx\Rightarrow v=rx+\ln|c|\,.$$

5. Αρνητικά μεγέθη.
Όσον αφορά τη χρήση των απόλυτων τιμών στις παραπάνω σχέσεις, παρατηρούμε ότι η σχετική μεταβολή ενός μεγέθους συμπίπτει με την σχετική μεταβολή του αρνητικού του, επομένως και με τη σχετική μεταβολή της απόλυτης τιμής του. Το ίδιο ισχύει και για τις ποσοστιαίες μεταβολές:

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta(-x)}{-x}=\frac{\Delta|x|}{|x|}\qquad\text{και}\qquad \%\Delta x=\%\Delta(-x)=\%\Delta|x|\,.$$

Πράγματι αν το x μεταβληθεί από την τιμή x_1 στην τιμή x_2 τότε το $-x$ θα μεταβληθεί από την τιμή $-x_1$ στην τιμή $-x_2$. Έχουμε:

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{x_2-x_1}{x_1}\quad\&\quad\frac{\Delta(-x)}{-x}=\frac{-x_2-(-x_1)}{-x_1},$$

με τα δύο κλάσματα να είναι ίσα.
Συμπεραίνουμε ειδικά ότι:
1. *Η ελαστικότητα μεταξύ μεταβλητών συμπίπτει με την ελαστικότητα μεταξύ των απόλυτων τιμών τους.*
2. *Ο σχετικός ρυθμός μιας μεταβλητής συμπίπτει με το σχετικό ρυθμό της απόλυτης τιμής της.*
Έτσι, όσον αφορά ελαστικότητες και σχετικούς ρυθμούς μπορούμε να παίρνουμε τα μεγέθη πάντοτε θετικά.

6. Εκτιμήσεις ρυθμών.
Θεωρούμε μια σχέση $y=y(x)$, και δύο γειτονικά σημεία (x_1,y_1) & (x_2,y_2), που την ικανοποιούν.
Σύμφωνα με τους ορισμούς οι τρεις ρυθμοί αναφέρονται στα μεγέθη:

$$m \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \varepsilon \approx \frac{x\Delta y}{y\Delta x} = \frac{x_1(y_2 - y_1)}{y_1(x_2 - x_1)}, \quad r \approx \frac{\Delta y}{y\Delta x} = \frac{(y_2 - y_1)}{y_1(x_2 - x_1)}.$$

Όσον αφορά την ελαστικότητα και τον σχετικό ρυθμό, σε πολλές εφαρμογές χρησιμοποιούνται εναλλακτικά τα μεγέθη που προκύπτουν από την χρήση των λογαριθμικών μεταβλητών:

$$\varepsilon \approx \frac{\Delta \ln|y|}{\Delta \ln|x|} = \frac{\ln|y_2| - \ln|y_1|}{\ln|x_2| - \ln|x_1|}, \quad r \approx \frac{\Delta \ln|y|}{\Delta x} = \frac{\ln|y_2| - \ln|y_1|}{x_2 - x_1}$$

Μάλιστα οι παραπάνω δύο τύποι δίνουν ακριβώς τους αντίστοιχους ρυθμούς αν αυτοί είναι σταθεροί. Η σχέση μεταξύ των δύο εναλλακτικών διατυπώσεων δίνεται από τη γνωστή γραμμική προσέγγιση του λογαρίθμου:

$$\ln(1+h) \approx h \quad \text{για μικρά } |h| \approx 0.$$

Έτσι τα αρχικά προκύπτουν από τα λογαριθμικά αντικαθιστώντας:

$$\ln|x_2| - \ln|x_1| = \ln\left|\frac{x_2}{x_1}\right| = \ln\frac{x_2}{x_1} = \ln\left(1 + \frac{x_2 - x_1}{x_1}\right) \approx \frac{x_2 - x_1}{x_1}$$

και αντίστοιχα για το y. Στη δεύτερη ισότητα καταργήσαμε τις απόλυτες τιμές διότι υποθέτουμε κοντινά σημεία οπότε θα έχουμε θετικό λόγο: $x_2 / x_1 \approx 1$. Στο όριο $x_2 - x_1 \to 0$, οι δύο διατυπώσεις δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

7. Πράξεις ρυθμών.

Οι παραπάνω τρεις ρυθμοί ορίζονται επίσης για συναρτήσεις και αφορούν τη σχέση μεταξύ οριακών μεταβολών στην τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής και στην τιμή της συνάρτησης. Έτσι έχουμε τους τρεις ρυθμούς μεταβολής συναρτήσεων:

$$Df(x) = f'(x), \quad Ef(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)}, \quad Rf(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Θα αναφερθούμε τώρα σε ορισμένες ιδιότητες των ρυθμών που αφορούν πράξεις μεταξύ συναρτήσεων. Έτσι, αν έχουμε δύο μεταβλητές που εξαρτώνται από την ίδια μεταβλητή:

$$u = u(x) \quad \& \quad v = v(x),$$

τότε, ενώ η παράγωγος έχει απλές ιδιότητες ως προς γραμμικούς συνδυασμούς, η ελαστικότητα και ο σχετικός ρυθμός έχουν απλές ιδιότητες ως προς το γινόμενο και το πηλίκο:

$$D(\alpha u)=\alpha Du,\quad D(u+v)=Du+Dv,\quad D(u-v)=Du-Dv,$$

$$E(\alpha u)=E(u),\quad E(uv)=Eu+Ev,\qquad E(u/v)=Eu-Ev,$$

$$R(\alpha u)=R(u),\quad R(uv)=Ru+Rv,\qquad R(u/v)=Ru-Rv.$$

Π.χ. για την ελαστικότητα του γινομένου βρίσκουμε:

$$E(uv)=\frac{x(uv)'}{uv}=\frac{x(u'v+uv')}{uv}=\frac{xu'}{u}+\frac{xv'}{v}=Eu+Ev.$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύονται και οι άλλοι τύποι.

8. Σύνθεση ρυθμών.

Αν έχουμε σύνθεση συναρτήσεων τότε στην ελαστικότητα, όπως και στην παράγωγο, πολλαπλασιάζονται οι επιμέρους ελαστικότητες, ενώ στον σχετικό ρυθμό πολλαπλασιάζεται ο σχετικός ρυθμός με την ελαστικότητα:

Αν έχουμε $z=z(y)\ \&\ y=y(x)\ \Rightarrow z=z(y(x))\ \Rightarrow z=z(y(x))=z(x)$

τότε: $D_xz=(D_yz)(D_xy)$, $E_xz=(E_yz)(E_xy)$ και $R_xz=(E_yz)(R_xy)$.

Οι παραπάνω σχέσεις προκύπτουν από τους τύπους της παραγώγου, αλλά και απευθείας από τους ορισμούς, παίρνοντας όρια, οπότε βρίσκουμε:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx},\quad \frac{\%dz}{\%dx}=\frac{\%dz}{\%dy}\frac{\%dy}{\%dx},\quad \frac{\%dz}{dx}=\frac{\%dz}{\%dy}\frac{\%dy}{dx}.$$

Όσον αφορά την αντιστροφή συναρτήσεων, ως γνωστόν οι παράγωγοι και οι ελαστικότητες αναστρέφονται. Οι σχετικοί ρυθμοί των αντίστροφων δεν σχετίζονται διότι αφορούν διαφορετικά μεγέθη.