

ΜΕΡΟΣ 1

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1Α

Παράγωγος

1α.1 Βασικές Συναρτήσεις

1. Γενικά στοιχεία.

Όπως αναφέρθηκε ήδη στο εισαγωγικό Μέρος 0 των προαπαιτούμενων, συνήθως η ανεξάρτητη ή εξωγενής (independent, exogenous) μεταβλητή x και η εξαρτημένη ή ενδογενής (dependent, endogenous) μεταβλητή y παίρνουν τιμές από ένα διάστημα (interval) στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, φραγμένο (bounded) ή μη φραγμένο (unbounded), όπως π.χ. το $(2, +\infty)$.

Εκτός από το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών, που είναι ένα μη φραγμένο διάστημα, αναφέρουμε και τα παρακάτω μη φραγμένα διαστήματα:

$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, που είναι οι θετικοί (positive),

$\mathbb{R}_{++} := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, που είναι οι γνήσια θετικοί (strictly positive).

Έτσι ο όρος «θετικός» θα σημαίνει συνήθως «μη αρνητικός». Ένα διάστημα μπορεί να περιλαμβάνει ή να μη περιλαμβάνει τα άκρα του, οπότε καλείται κλειστό (closed) και ανοικτό (open) αντίστοιχα. Έτσι, από τα φραγμένα διαστήματα:

$$\alpha \leq x \leq \beta, \quad \alpha < x < \beta$$

το πρώτο είναι κλειστό (συμβ. $[\alpha, \beta]$) και το δεύτερο ανοικτό (συμβ. (α, β)). Τα άκρα του διαστήματος καλούνται και συνοριακά (boundary) σημεία. Τα μη συνοριακά σημεία καλούνται εσωτερικά (interior).

Μπορούμε όταν σχεδιάζουμε το *γράφημα* (graph) μιας συνάρτησης να παριστάνουμε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων πολλές διαφορετικές συναρτήσεις που έχουν την ίδια ανεξάρτητη μεταβλητή, αλλά διαφορετική εξαρτημένη. Σ' αυτή την περίπτωση ο κατακόρυφος άξονας έχει διαφορετική ερμηνεία για την κάθε συνάρτηση. Δίνουμε παρακάτω τα γραφήματα και τις ιδιότητες ορισμένων βασικών συναρτήσεων.

2. Θετικές δυνάμεις (positive powers) καλούνται οι συναρτήσεις της μορφής:

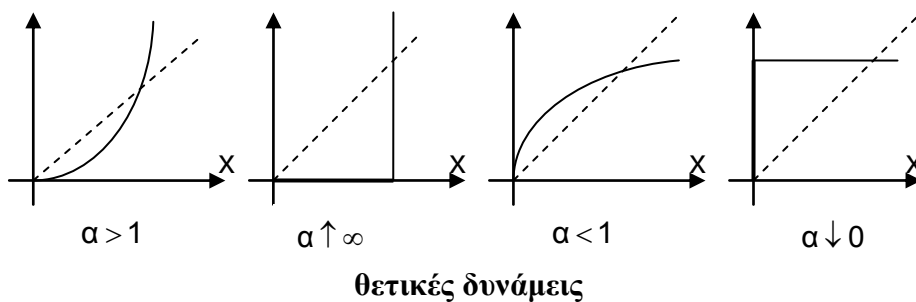
$$f(x) = x^{\alpha} \text{ με } \alpha > 0 .$$

Είναι αύξουσες με πεδίο ορισμού $x \geq 0$. Εκτός από την ειδική περίπτωση:

$$\alpha = 1 \Rightarrow f(x) = y = x ,$$

η οποία στα παρακάτω γραφήματα παριστάνεται με διακεκομμένη ευθεία, διακρίνουμε δύο βασικές κατηγορίες:

1. $\alpha > 1$. Αυξάνει γρήγορα καθώς το x μεγαλώνει, όπως φαίνεται στο πρώτο γράφημα. Στα όριο $\alpha \rightarrow \infty$ τείνει προς την σπαστή γραμμή του δεύτερου γραφήματος.
2. $\alpha < 1$. Αυξάνει αργά καθώς το x μεγαλώνει, όπως φαίνεται στο τρίτο γράφημα. Στα όριο $\alpha \rightarrow 0$ τείνει προς την σπαστή γραμμή του τελευταίου γραφήματος.



3. Αρνητικές δυνάμεις (negative powers) καλούνται οι ανάστροφες των θετικών δυνάμεων:

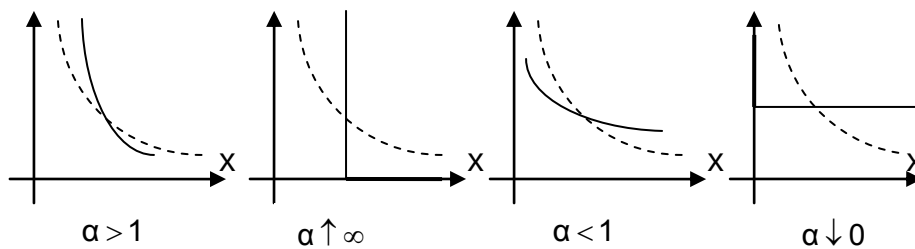
$$f(x) = x^{-\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha}} \text{ με } \alpha > 0.$$

Είναι φθίνουσες με πεδίο ορισμού $x > 0$. Εκτός από την ειδική περίπτωση:

$$\alpha = -1 \Rightarrow f(x) = y = x^{-1}$$

η οποία στα παρακάτω γραφήματα παριστάνεται με την διακεκομμένη καμπύλη που είναι συμμετρική ως προς τους δύο άξονες, διακρίνουμε δύο βασικές κατηγορίες:

1. $\alpha > 1$. Φθίνει γρήγορα καθώς το x μεγαλώνει, όπως φαίνεται στο πρώτο γράφημα. Στα όριο $\alpha \rightarrow \infty$ τείνει προς την σπαστή γραμμή του δεύτερου γραφήματος.
2. $\alpha < 1$. Φθίνει αργά καθώς το x μεγαλώνει, όπως φαίνεται στο τρίτο γράφημα. Στα όριο $\alpha \rightarrow 0$ τείνει προς την σπαστή γραμμή του τελευταίου γραφήματος.



αρνητικές δυνάμεις

4. Εκθετική (exponential) με *βάση* (base) τον αριθμό e , καλείται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x,$$

όπου ο μη ρητός αριθμός της βάσης ορίζεται ως το παρακάτω όριο (Βλ. και Κεφ. 0):

$$e = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{c} \right)^c = \lim_{h \rightarrow 0^+} (1+h)^{1/h} = 2.7 \dots$$

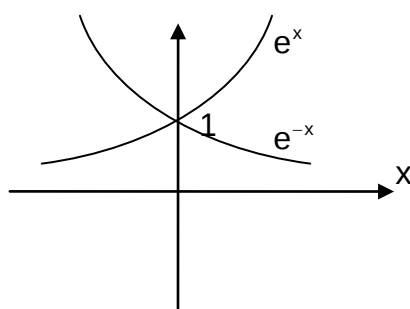
Έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών, και παίρνει γνήσια θετικές τιμές. Είναι αύξουσα, και μάλιστα αυξάνει ταχύτερα απ' όλες τις θετικές δυνάμεις. Αντίθετα, η ανάστροφή της:

$$f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

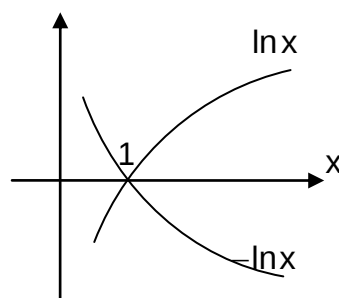
είναι φθίνουσα, και μάλιστα φθίνει πιο γρήγορα απ' όλες τις αρνητικές δυνάμεις.

Η εκθετική πράξη έχει και τις παρακάτω βασικές ιδιότητες, που είναι ειδικές περιπτώσεις των γενικότερων ιδιοτήτων των δυνάμεων:

$$e^{-\beta} = 1/e^{\beta}, \quad e^{\beta}e^{\gamma} = e^{\beta+\gamma}, \quad (e^{\beta})^{\gamma} = e^{\beta\gamma}, \quad e^0 = 1, \quad e^{-\infty} = 0.$$



εκθετική



λογαριθμική

5. Λογαριθμική (Logarithmic) (Βλ. και Κεφ. 0) με βάση τον αριθμό e καλείται η συνάρτηση:

$$f(x) = \log_e x = \ln x.$$

Έχει πεδίο ορισμού $x > 0$, και παίρνει ως τιμές το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Είναι αύξουσα αλλά αυξάνει πολύ αργά, πιο αργά απ' όλες τις θετικές δυνάμεις. Η λογαριθμική πράξη έχει και τις παρακάτω βασικές ιδιότητες:

$$\ln \frac{1}{\beta} = -\ln \beta, \quad \ln(\beta\gamma) = \ln \beta + \ln \gamma, \quad \ln(\beta^{\gamma}) = \gamma \ln \beta,$$

$$\ln 1 = 0, \quad \ln 0 = -\infty .$$

Η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση ως προς την βάση e συνδέονται με σχέσεις αντιστροφής:

$$\{u = e^v \Leftrightarrow v = \log_e u\}, \text{ δηλαδή: } \{e^{\ln u} = u \ \& \ \ln e^v = v\} .$$

Π.χ. οι παρακάτω σχέσεις είναι ισοδύναμες μεταξύ τους:

$$e^0 = 1, \quad \log_e 1 = 0, \quad e^{\ln 1} = 1, \quad \ln e^0 = 0 .$$

6. Αλλαγή βάσης.

Εκτός από την παραπάνω βάση, η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση μπορούν να οριστούν και ως προς οιαδήποτε θετική *βάση* (base) $\alpha \neq 1$, συνήθως $\alpha > 1$, οπότε συνδέονται μεταξύ τους με τις αντίστοιχες σχέσεις αντιστροφής:

$$\{u = \alpha^v \Leftrightarrow v = \log_\alpha u\}, \text{ δηλαδή } \{\alpha^{\log_\alpha u} = u \ \& \ \log_\alpha \alpha^v = v\} .$$

Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να τις εκφράσουμε με βάση e χρησιμοποιώντας τους παρακάτω τύπους αλλαγής βάσης:

$$\alpha^x = e^{x \ln \alpha}, \quad \log_\alpha x = \ln x / \ln \alpha .$$

Οι συναρτήσεις δυνάμεις που μελετήσαμε προηγουμένως μπορούν επίσης να εκφραστούν μέσω των εκθετικών-λογαριθμικών με τον τύπο:

$$x^c = e^{c \ln x} .$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε τις τελευταίες τρεις σχέσεις:

1. $\alpha = e^{\ln \alpha} \Rightarrow \alpha^x = (\alpha^{\ln \alpha})^x = \alpha^{x \ln \alpha}$
2. $\ln x = \ln \alpha^{\log_\alpha x} = (\log_\alpha x)(\ln \alpha) \Rightarrow \log_\alpha x = \ln x / \ln \alpha$
3. $x^c = (e^{\ln x})^c = e^{c \ln x} .$

Στον μαθηματικό λογισμό χρησιμοποιούμε συνήθως την εκθετική και την λογαριθμική συνάρτηση με βάση e διότι δίνει απλές ιδιότητες παραγώγισης. Η εκθετική συνάρτηση παριστάνεται εναλλακτικά και με τον συμβολισμό:

$$\exp x = e^x .$$

Ο λογάριθμος ως προς την βάση e καλείται και *φυσικός λογάριθμος* (natural logarithm, $\ln$).

Σε πολλές εφαρμογές χρησιμοποιούνται και οι παρακάτω βάσεις:

2: *δυαδική* (dyadic), 10: *δεκαδική* (decimal).

7. Πολυωνυμικές βαθμού n (polynomial of degree n), με πεδίο ορισμού το σύνολο των αριθμών $\mathbb{R}$, καλούνται οι συναρτήσεις:

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n \text{ με } \alpha_n \neq 0 \Rightarrow \text{βαθ}(P) = n.$$

Το γράφημα αποτελείται από το πολύ n μονότονα τμήματα. Σε ειδικές περιπτώσεις μπορεί να έχει λιγότερα: $n-2, n-4, \dots$. Εκτός από την σταθερή συνάρτηση που είναι μηδενικού βαθμού, αναφέρουμε τις παρακάτω πολυωνυμικές συναρτήσεις μέχρι τρίτου βαθμού:

1. *Γραμμική* (linear) καλείται η συνάρτηση της μορφής:

$$f(x) = \alpha x + \beta,$$

με συντελεστή α και προσθετικό όρο β . Αν ο προσθετικός όρος είναι μηδενικός, τότε καλείται *γραμμική ομογενής* (linear homogeneous) ή *γραμμική μορφή* (linear form) σε μία μεταβλητή:

$$f(x) = \alpha x.$$

2. *Τετραγωνική* ή *παραβολική* (quadratic, parabolic) καλείται η συνάρτηση που είναι πολώνυμο δευτέρου βαθμού:

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \text{ με } \alpha \neq 0.$$

Ειδικά η τετραγωνική συνάρτηση που έχει μόνο τον τετραγωνικό όρο:

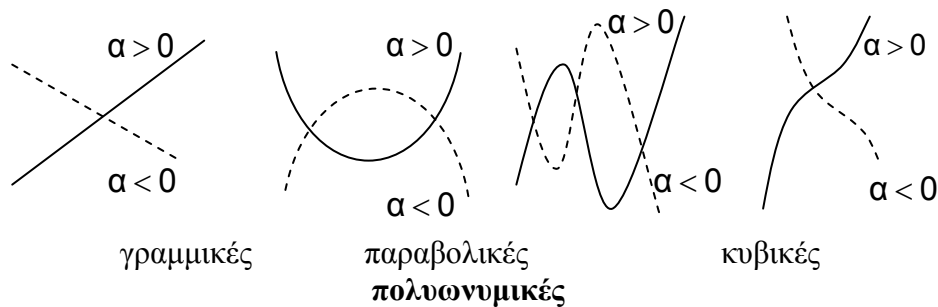
$$f(x) = \alpha x^2,$$

καλείται *τετραγωνική ομογενής* (quadratic homogeneous), ή και *τετραγωνική μορφή* (quadratic forms) σε μία μεταβλητή.

3. *Κυβική* (cubic) καλείται η πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού:

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \text{ με } \alpha \neq 0.$$

Γενικά έχει τρία μονότονα τμήματα αλλά για ορισμένες τιμές των συντελεστών μπορεί να έχει μόνο ένα, όπως φαίνεται στο τελευταίο γράφημα παρακάτω.



Παρατήρηση. Αντικαθιστώντας: $x = (x - x_0) + x_0$, και αναπτύσσοντας τις δυνάμεις μπορούμε να εκφράσουμε ένα πολυώνυμο σε δυνάμεις του $x - x_0$ για οιοδήποτε x_0 . Π.χ. σε δυνάμεις του $(x + 1)$:

$$x^2 - 2x + 1 = [(x + 1) - 1]^2 - 2[(x + 1) - 1] + 1 = (x + 1)^2 - 4(x + 1) + 1.$$

8. Ρητές (rational) καλούνται οι συναρτήσεις που ορίζονται παίρνοντας τον λόγο δύο πολυωνύμων:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n}{\beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_m x^m}.$$

Εκτελώντας την διαίρεση των πολυωνύμων μπορούμε να τη φέρουμε στη μορφή.

$$R(x) = \Pi(x) + \frac{Y(x)}{Q(x)},$$

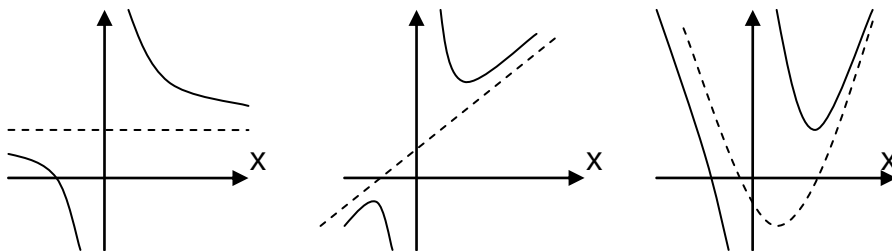
όπου :

$\Pi(x)$: πολυώνυμο πηλίκο με $\text{βαθ}(\Pi) = \text{βαθ}(P) - \text{βαθ}(Q)$

$Y(x)$: πολυώνυμο υπόλοιπο με $\text{βαθ}(Y) < \text{βαθ}(Q)$.

Τα σημεία μηδενισμού του παρονομαστή $Q(x)$ αποτελούν κατακόρυφες ασύμπτωτες της ρητής συνάρτησης. Παρακάτω δίνουμε τα γραφήματα τριών τέτοιων συναρτήσεων όπου ο παρονομαστής είναι το πολυώνυμο

1^{ου} βαθμού: $Q(x)=x$. Το πολυώνυμο πηλίκου παριστάνεται με διακεκομμένη γραμμή. Στο όριο $x \rightarrow \pm\infty$ όλες οι ρητές συναρτήσεις τείνουν ασυμπτωτικά προς το πολυώνυμο πηλίκου, οπότε έχουμε ασύμπτωτες, οριζόντια στη πρώτη, πλάγια στη δεύτερη, παραβολή στην τρίτη.



$$\frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x} \quad \frac{x^2+x+1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x} \quad \frac{x^3-x^2-x+2}{x} = x^2 - x - 1 + \frac{2}{x}$$

γραφήματα ρητών συναρτήσεων

9. Τριγωνομετρικές(trigonometric) καλούνται καταρχήν οι συναρτήσεις του *ημίτονου* (sine), και του *συνημίτονου* (cosine), με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$. Είναι περιοδικές με περίοδο 2π και συμβολίζονται με:

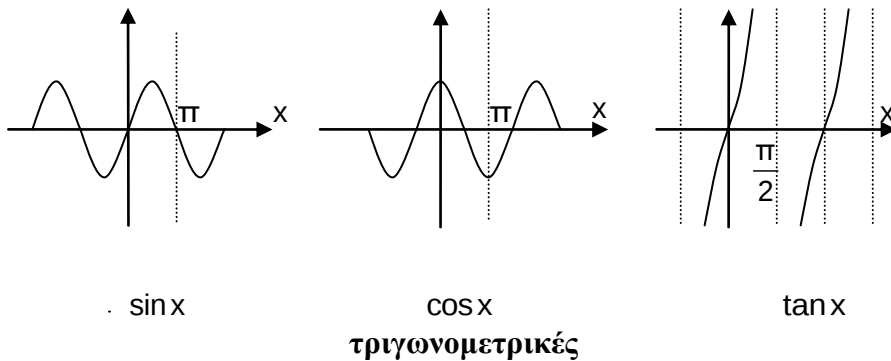
$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x \quad \text{ή} \quad f(x) = \eta\mu x, \quad f(x) = \sigma\upsilon\nu x.$$

Δίνουμε ορισμένες ενδεικτικές τιμές:

$$\sin 0 = 0, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin \pi = 0$$

$$\cos 0 = 1, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos \pi = -1$$

Τα γραφήματά τους απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



Αναφέρουμε επίσης ότι το ημίτονο είναι *περιττή* (odd) συνάρτηση ενώ το συνημίτονο είναι *άρτια* (even):

$$\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x .$$

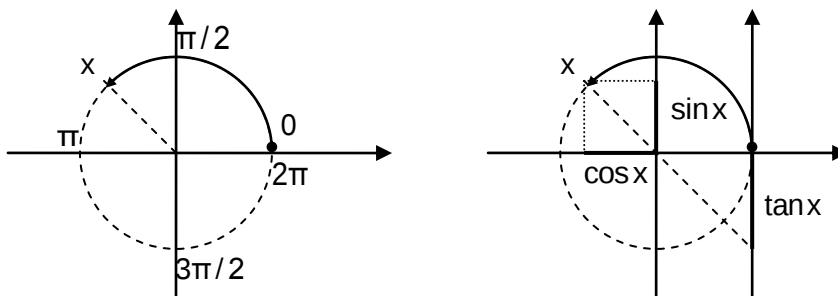
Ο λόγος τους ορίζει την τριγωνομετρική συνάρτηση της *εφαπτομένης* (tangent):

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{ή} \quad f(x) = \epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} .$$

Αυτή έχει περίοδο Π με κατακόρυφες ασύμπτωτες στα περιττά πολλαπλάσια του $\pi/2$ όπου μηδενίζεται το συνημίτονο του παρονομαστή (Βλ. το παραπάνω σχήμα).

Παρατήρηση. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ορίζονται γεωμετρικά ως εξής:

1. Στο μοναδιαίο κύκλο με κέντρο $(0,0)$ και περίμετρο μήκους 2π , μετρούμε το X ως *προσημασμένο μήκος τόξου* αρχίζοντας από το σημείο $(1,0)$. Αν $x > 0$ τότε πηγαίνουμε προς την θετική φορά που είναι η αντίθετη των δεικτών του ωρολογίου, ενώ αν $x < 0$ τότε πηγαίνουμε προς την αρνητική φορά που είναι αυτή των δεικτών του ωρολογίου. Για τη γωνία που σχηματίζουν οι ακτίνες στα άκρα του τόξου λέμε ότι έχει μέγεθος X *ακτίνια* (radians).



γεωμετρικός ορισμός των τριγωνομετρικών μεγεθών

2. Από το τελικό σημείο, η προβολή στον οριζόντιο άξονα δίνει το συνημίτονο του, δηλ. $x \rightarrow \cos x$, ενώ η προβολή στον κατακόρυφο άξονα δίνει το ημίτονο του, δηλ. $x \rightarrow \sin x$. Η περίμετρος έχει μήκος 2π , και έτσι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις έχουν αυτή την περίοδο.

3. Η εφαπτομένη $\tan x$ ορίζεται γεωμετρικά ως η τομή της ακτίνας που περνάει από το σημείο X της περιφέρειας, με τον κατακόρυφο άξονα μετατοπισμένο στο $(0,1)$ όπως στο δεύτερο γράφημα παραπάνω.

Από την παραπάνω γεωμετρική κατασκευή προκύπτει ένα πλήθος σχέσεων μεταξύ των διαφόρων τριγωνομετρικών μεγεθών. Ονομάζονται *τριγωνομετρικές ταυτότητες* (trigonometric identities). Π.χ. από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε τη τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1.$$

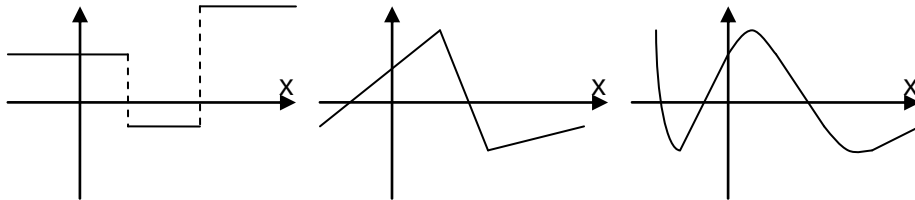
Αναφέρουμε και τις παρακάτω χρήσιμες ταυτότητες:

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

10. Τμηματικά ορισμένες (piecewise defined), καλούνται οι συναρτήσεις που ορίζονται με διαφορετικό τύπο σε διαφορετικά διαστήματα. Αναφέρουμε ειδικά τις παρακάτω:

1. *βηματική* (step function), με σταθερά τμήματα.
2. *πολυγωνική* (polygonal), με γραμμικά τμήματα.
3. *σφηνοειδής* (spline), με γραμμικά και παραβολικά τμήματα.



βηματική

πολυγωνική

σφηνοειδής

Παραδείγματα τμηματικά ορισμένων συναρτήσεων

Μία σημαντική κατηγορία τμηματικά ορισμένων συναρτήσεων προκύπτει αν μεταξύ δύο συναρτήσεων πάρουμε σε κάθε σημείο την μικρότερη ή την μεγαλύτερη τιμή μεταξύ τους. Βρίσκουμε έτσι δύο νέες συναρτήσεις:

$$\max\{f(x), g(x)\}, \quad \min\{f(x), g(x)\},$$

που καλούνται συναρτήσεις *μεγίστου* (maximal) και *ελαχίστου* (minimal), αντίστοιχα. Επίσης καλούνται *πάνω & κάτω περιβάλλουσα* (upper, lower envelope), αντίστοιχα, των δύο συναρτήσεων. Οι πράξεις αυτές επεκτείνονται και σε περισσότερες συναρτήσεις.

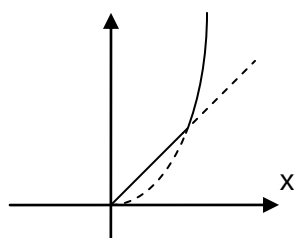
Παράδειγμα.

Στο θετικό διάστημα $x \geq 0$, ορίζουμε τις συναρτήσεις:

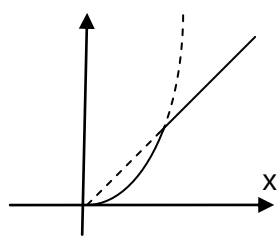
$$\max\{x, x^2\} = \begin{cases} x & \text{αν } x \geq x^2 \Leftrightarrow x(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 & \text{αν } x^2 \geq x \Leftrightarrow x(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \end{cases}$$

$$\min\{x, x^2\} = \begin{cases} x & \text{αν } x \leq x^2 \Leftrightarrow x \geq 1 \\ x^2 & \text{αν } x^2 \leq x \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

των οποίων τα γραφήματα παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα.



πάνω: $\max\{x, x^2\}$



κάτω: $\min\{x, x^2\}$

περιβάλλουσες

1α.2 Ιδιότητες Συναρτήσεων

1. Πράξεις με συναρτήσεις.

Στο Κεφ. 0 ορίσαμε κάποιες βασικές πράξεις μεταξύ συναρτήσεων, μεταξύ αυτών και τη σύνθεση *σύνθεση* (composition): $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Στις εφαρμογές, η διαδοχική εξάρτηση διαφόρων μεγεθών εκφράζεται με τη σύνθεση των αντίστοιχων συναρτήσεων:

$$\text{Αν } y = f(x) \text{ \& } x = g(z), \text{ τότε } y = f(g(z)).$$

Μπορούμε να εκφράσουμε τη παραπάνω σύνθεση χωρίς τα σύμβολα των συναρτήσεων, ως εξής:

$$\text{Αν } y = y(x) \text{ \& } x = x(z), \text{ τότε } y = y(z).$$

Δηλαδή:

Αν το y είναι συνάρτηση του x και το x είναι συνάρτηση του z , τότε το y είναι επίσης συνάρτηση του z .

Παράδειγμα.

1. $f(x) = x^2$ και $g(x) = x - 1 \Rightarrow f(g(x)) = (x - 1)^2$
2. Η $h(x) = e^{x^2}$ είναι σύνθεση της $f(x) = e^x$ με την $g(x) = x^2$
3. Αν $y = x^2$ και $x = z - 1$, τότε $y = (z - 1)^2$.

2. Μετασχηματισμοί (transformations).

Σε πολλές περιπτώσεις το γράφημα της συνάρτησης που προκύπτει μετά την εφαρμογή μιας πράξης βρίσκεται με κάποιον αντίστοιχο γεωμετρικό

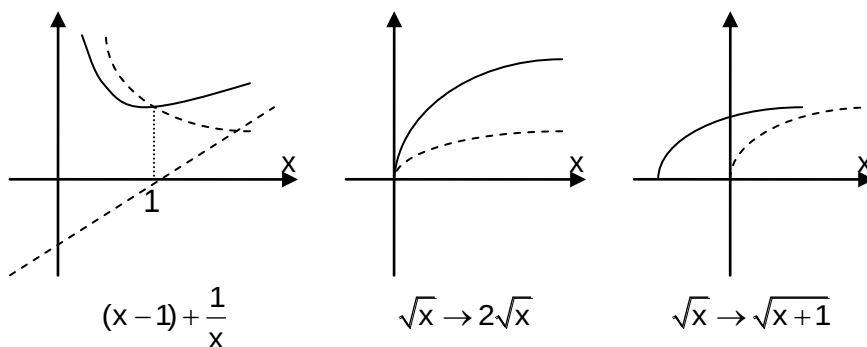
μετασχηματισμό του αρχικού γραφήματος. Αναφέρουμε ειδικά τις παρακάτω περιπτώσεις:

Άθροισμα: $f(x) + g(x)$, σε κάθε x προσθέτουμε τις δύο τεταγμένες.

Πολλαπλάσιο: $af(x)$, πολλαπλασιάζουμε τις τεταγμένες με τον συντελεστή a .

Ειδικότερα, η $-f(x)$ είναι η συμμετρική της $f(x)$ ως προς τον οριζόντιο άξονα, διότι πολλαπλασιάζουμε όλες τις τεταγμένες των σημείων του γραφήματος με -1 .

Οριζόντια μετατόπιση: $f(x-a)$, όπου το γράφημα της $f(x)$ μετατοπίζεται οριζοντίως κατά a , διότι η τιμή της νέας συνάρτησης στο x δίνεται από την τιμή της αρχικής στο $x-a$. Η μετατόπιση είναι προς τα δεξιά αν το a είναι θετικό, προς τα αριστερά αν είναι αρνητικό. Έτσι στο τρίτο γράφημα του παρακάτω σχήματος το γράφημα της $\sqrt{x}$ μετατοπίζεται προς τα αριστερά.



μετασχηματισμοί

3. Μονοτονία.

Μια συνάρτηση $f(x)$ καλείται:

αύξουσα (increasing), αν $x_2 > x_1$ συνεπάγεται $f(x_2) \geq f(x_1)$

φθίνουσα (decreasing), αν $x_2 > x_1$ συνεπάγεται $f(x_2) \leq f(x_1)$.

Μια συνάρτηση καλείται *μονότονη* (monotone) αν είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα. Δηλαδή, συμβατικά μια μονότονη συνάρτηση μπορεί να έχει και διαστήματα σταθερότητας. Αν δεν έχει, τότε οι παραπάνω ανισότητες

είναι γνήσιες και λέμε ότι η συνάρτηση είναι *γνήσια μονότονη* (strictly monotone). Έτσι μια συνάρτηση είναι:

γνήσια αύξουσα, αν $x_2 > x_1$ συνεπάγεται $f(x_2) > f(x_1)$

γνήσια φθίνουσα, αν $x_2 > x_1$ συνεπάγεται $f(x_2) < f(x_1)$

Για τη σταθερή συνάρτηση λέμε συμβατικά ότι είναι και αύξουσα και φθίνουσα αλλά βέβαια όχι γνήσια.

Παράδειγμα.

1. Οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^a \text{ με } a > 0, \quad f(x) = a^x \text{ με } a > 1, \quad f(x) = \log_a x \text{ με } a > 1,$$

είναι όλες γνήσια αύξουσες.

2. Οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^a \text{ με } a < 0, \quad f(x) = a^{-x} \text{ με } a > 1,$$

$$f(x) = \log_a(1/x) = -\log_a x, \text{ με } a > 1,$$

είναι όλες γνήσια φθίνουσες.

Γενικά σε μια συνεχή συνάρτηση διακρίνουμε διάφορα τμήματα μονοτονίας. Τα σημεία όπου η μονοτονία αλλάζει καλούνται *τοπικά ακρότατα* (local extrema). Ένα τοπικό ακρότατο είναι *τοπικό μέγιστο* (local maximum) αν η συνάρτηση από αύξουσα γίνεται φθίνουσα, *τοπικό ελάχιστο* (local minimum) αν η συνάρτηση από φθίνουσα γίνεται αύξουσα. Τα τοπικά μέγιστα εναλλάσσονται με τα τοπικά ελάχιστα.

Παράδειγμα. Ένα πολυώνυμο βαθμού n , έχει το πολύ n διαστήματα μονοτονίας και επομένως το πολύ $n - 1$ τοπικά ακρότατα.

Οι ιδιότητες μονοτονίας και ειδικότερα η εύρεση των τοπικών ακρότατων μιας συνάρτησης αποτελεί βασικό αντικείμενο της θεωρίας του *Διαφορικού Λογισμού* (Differential Calculus), δηλαδή της θεωρίας παραγώγισης που θα εξετάσουμε στο επόμενο Κεφάλαιο 1β.

4. Αντίστροφες συναρτήσεις.

Η εξίσωση συνάρτησης $y = f(x)$ εκφράζει μια σχέση μεταξύ των μεταβλητών $\{x, y\}$ όπου σε κάθε x αντιστοιχεί το πολύ μία τιμή του y ,

ενώ αντίστροφα σε κάθε y μπορεί να αντιστοιχούν και περισσότερες από μία τιμές του x . Εκφράζουμε αυτή την αντίστροφη σχέση γράφοντας:

$$x = f^{-1}(y),$$

όπου η f^{-1} καλείται *αντίστροφη* (inverse) συνάρτηση της f . Γενικά η f^{-1} είναι *πολυσήμαντη* (multi-valued) (δηλ. σε ένα y μπορούν να αντιστοιχούν περισσότερες από μία τιμές του x , οπότε δεν είναι συνάρτηση) και συχνά την αποκαλούμε *αντιστοιχία* (correspondence). Παρατηρούμε όμως ότι:

- Αν η f είναι γνήσια μονότονη, τότε η f^{-1} είναι μονοσήμαντη και γνήσια μονότονη επίσης.

Μια συνάρτηση $y = f(x)$ και η αντίστροφή της $x = f^{-1}(y)$ εκφράζουν την ίδια σχέση μεταξύ των μεταβλητών (x, y) και επομένως έχουν το ίδιο γράφημα στο επίπεδο Oxy . Αν όμως στην περίπτωση της αντίστροφης θέλουμε να έχουμε την μεταβλητή y στον οριζόντιο άξονα, τότε το γράφημα της $x = f^{-1}(y)$ είναι το συμμετρικό της f ως προς την διαγώνιο του συστήματος συντεταγμένων. Αν μας ενδιαφέρει η συνάρτηση και όχι οι ίδιες οι μεταβλητές τότε μπορούμε να μετονομάσουμε και τους άξονες ώστε η ανεξάρτητη μεταβλητή στον οριζόντιο άξονα να είναι πάλι η x .

Παράδειγμα.

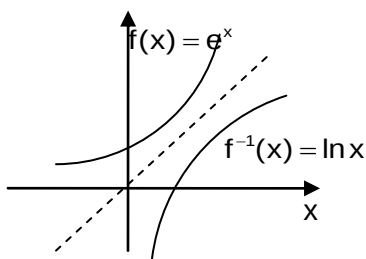
1. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων Oxy η εκθετική $y = e^x$ και η αντίστροφή της λογαριθμική $x = \ln y$ έχουν το ίδιο γράφημα. Αν όμως αλλάξουμε τον ρόλο των μεταβλητών και γράψουμε την αντίστροφη στην συνηθισμένη μορφή $y = \ln x$, τότε το γράφημά της θα είναι το συμμετρικό της εκθετικής ως προς την διαγώνιο.

2. Λύνοντας την εξίσωση $y = x^2$ ως προς x , βρίσκουμε την δισήμαντη αντίστροφη:

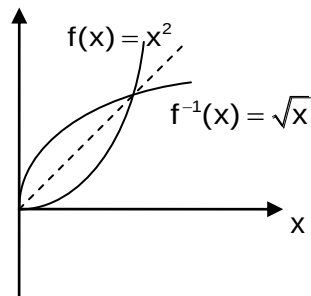
$$y = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y}.$$

3. Αν θεωρήσουμε τον περιορισμό της $y = x^2$ στο θετικό διάστημα: $x \geq 0$, τότε γίνεται γνήσια αύξουσα, και έχει μονοσήμαντη αντίστροφη:

$x = \sqrt{y}$, επίσης γνήσια αύξουσα. Αν στη συνέχεια αλλάξουμε τον ρόλο των μεταβλητών και γράψουμε την αντίστροφη στην συνηθισμένη μορφή $y = \sqrt{x}$, τότε το γράφημά της θα είναι το συμμετρικό ως προς την διαγώνιο της αρχικής συνάρτησης.



$y = e^x$ & $x = \ln y$
και παίρνοντας την
 $x = \ln y$ ως $y = f^{-1}(x) = \ln x$



$y = x^2$ με $x \geq 0$
και παίρνοντας την
 $x = \sqrt{y}$ ως $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

αντίστροφες συναρτήσεις

5. Αντίστροφες τριγωνομετρικών συναρτήσεων (inverse trigonometric).

Η αντίστροφη συνάρτηση του ημιτόνου:

$$\sin^{-1} x$$

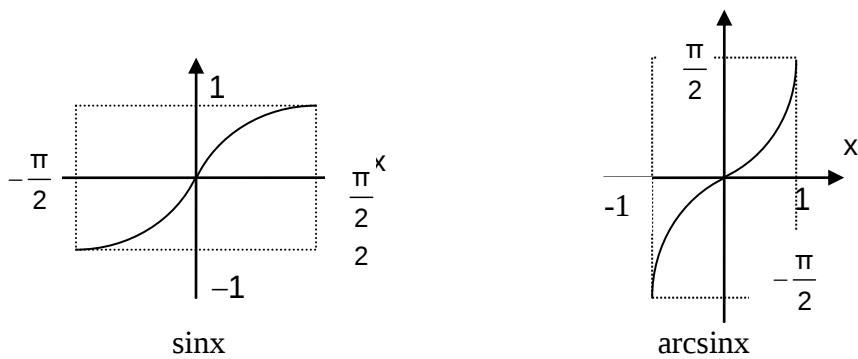
είναι πολυσήμαντη. Αν όμως περιορίσουμε τη συνάρτηση ημιτόνου στο διάστημα: $[-\pi/2, \pi/2]$, τότε αυτή γίνεται γνήσια αύξουσα και η αντίστροφή της είναι μονοσήμαντη συνάρτηση, επίσης γνήσια αύξουσα. Τη συμβολίζουμε, επίσης, με:

$$\arcsin x \text{ ή } \text{τοξημ}x.$$

Έχουμε, δηλ.:

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y \text{ με } -1 \leq x \leq 1 \text{ \& } -\pi/2 \leq y \leq \pi/2$$

Την εκφράζουμε λέγοντας ότι y είναι το τόξο (arc), δηλαδή η γωνία σε ακτίνια που έχει ημίτονο x και βρίσκεται στο παραπάνω διάστημα.



Η αντίστροφη τριγωνομετρική συνάρτηση του ημιτόνου

Δίνουμε μερικές ενδεικτικές τιμές της παραπάνω αντίστροφης τριγωνομετρικής συνάρτησης:

$$\arcsin 0 = 0, \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}, \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Η συνάρτηση του ημιτόνου είναι περιττή, οπότε στα αρνητικά των παραπάνω σημείων έχει τις αντίστοιχες αρνητικές τιμές:

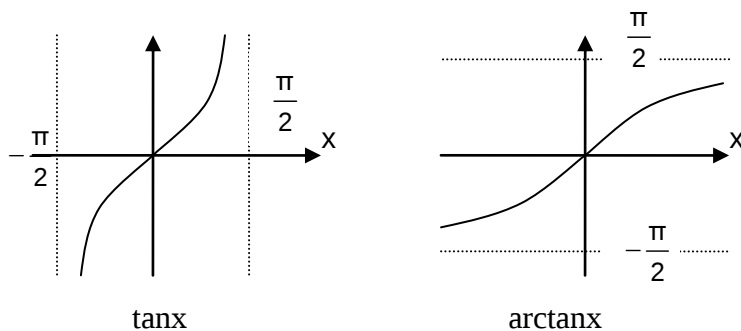
$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται και η αντίστροφη της εφαπτομένης:

$$\arctan x \text{ ή } \text{τοξεφ} x,$$

με βάση τη σχέση:

$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y \text{ με } -\infty < x < +\infty \text{ και } -\pi/2 < y < \pi/2.$$



αντίστροφη τριγωνομετρική

Την εκφράζουμε λέγοντας ότι y είναι το τόξο, δηλαδή η γωνία σε ακτίνια που έχει εφαπτομένη x και βρίσκεται στο παραπάνω διάστημα. Αναφέρουμε και τις ενδεικτικές τιμές:

$$\arctan 0 = 0, \quad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \quad \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

6. Μηδενικά μιας συνάρτησης καλούνται τα σημεία στα οποία η τιμή της είναι μηδενική:

$$f(x) = 0.$$

Τα μηδενικά μπορούν να βρεθούν είτε αναλυτικά λύνοντας την εξίσωση, είτε αριθμητικά χρησιμοποιώντας κάποιον προσεγγιστικό αλγόριθμο. Επίσης μπορούν να μελετηθούν και γραφικά ως τα σημεία όπου το γράφημα της συνάρτησης κόβει τον x -άξονα. Μια γνήσια μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ ένα μηδενικό. Τα μηδενικά μιας *συνεχούς* συνάρτησης (Βλ. Κεφ. 0) χωρίζουν το διάστημα ορισμού σε υποδιαστήματα, σε καθένα από τα οποία η συνάρτηση έχει ένα συγκεκριμένο πρόσημο. Μπορούμε να καθορίσουμε το πρόσημο ελέγχοντας ένα σημείο του διαστήματος. Η ιδιότητα αυτή βασίζεται στο:

7. Η παρακάτω πρόταση συχνά αναφέρεται και ως Θεώρημα Bolzano:

- Αν μια συνεχής συνάρτηση έχει γνήσια αντίθετο πρόσημο σε δύο σημεία τότε σε κάποιο ενδιάμεσο σημείο θα μηδενίζεται.

Παράδειγμα.

1. Η $f(x) = x - x^2 = x(1-x)$ έχει τα μηδενικά: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Η συνάρτηση έχει θετικές τιμές στα διαστήματα $x \leq 0$ ή $x \geq 1$, και αρνητικές στο ενδιάμεσο διάστημα $0 \leq x \leq 1$.

2. Η $f(x) = -x^3 + x^2 + 1$ έχει τις τιμές: $f(0) = 1$, $f(2) = -3$.

Εφόσον είναι συνεχής με αντίθετο πρόσημο στα δύο σημεία, θα έχει τουλάχιστον ένα γνήσια ενδιάμεσο μηδενικό: $1 < x < 2$, με $f(x) = 0$.

3. Η $f(x) = x \ln x$ με διάστημα ορισμού: $x > 0$, και με μηδενικό στο $x = 1$, έχει αρνητικές τιμές στο διάστημα $0 < x \leq 1$ και θετικές τιμές στο διάστημα $x \geq 1$.

Ένα πολυώνυμο βαθμού n έχει το πολύ n μηδενικά, αλλά μπορεί να έχει και λιγότερα.

Παράδειγμα. Η (τετραγωνική) παραβολική συνάρτηση:

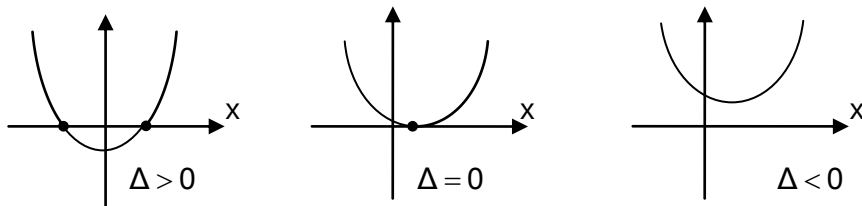
$$f(x) = ax^2 + bx + \gamma,$$

με διακρίνουσα (discriminant):

$$\Delta = b^2 - 4a\gamma,$$

έχει:

1. Δύο διαφορετικά μηδενικά αν $\Delta > 0$, με διαφορετικό πρόσημο εντός και εκτός των δύο μηδενικών.
2. Ένα μηδενικό αν $\Delta = 0$ με το ίδιο πρόσημο εκατέρωθεν.
3. Κανένα μηδενικό αν $\Delta < 0$. Σ αυτή την περίπτωση οι τιμές της είναι παντού, γνήσια θετικές αν $a > 0$, γνήσια αρνητικές αν $a < 0$.



Οι τρεις περιπτώσεις για τα μηδενικά της παραβολικής:

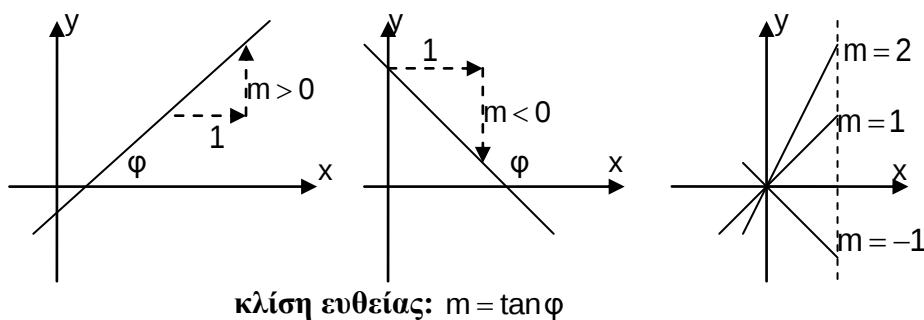
$$y = ax^2 + bx + \gamma \text{ με } a > 0$$

1α.3 Παραγωγή

1. Κλίση (slope) μιας ευθείας στο επίπεδο καλείται η τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας, δηλ. η $\tan\varphi = \varepsilon\varphi\varphi$, που σχηματίζει η ευθεία με τον οριζόντιο θετικό x -ημιάξονα, όπως φαίνεται στα δύο πρώτα γραφήματα του παρακάτω σχήματος. Γεωμετρικά, μετράει την μεταβολή του y όταν το x αυξηθεί κατά μία μονάδα, ανεξάρτητα της αρχικής τιμής του, όπως φαίνεται στα παρακάτω γραφήματα. Εκτός από την κατακόρυφη ευθεία που έχει άπειρη κλίση: $m = \infty$, μια ευθεία με κλίση m παριστάνεται με γραμμική συνάρτηση της μορφής:

$$y = mx + \beta.$$

Δηλαδή, ο συντελεστής m ισούται με την κλίση της ευθείας.



2. Μεταβολές.

Σε πολλές εφαρμογές αντί των τιμών των μεταβλητών μας ενδιαφέρουν οι μεταβολές τους από κάποιες αρχικές τιμές. Αν οι μεταβλητές $\{x, y\}$ συνδέονται με μια σχέση συνάρτησης, τότε οι μεταβολές τους $\{\Delta x, \Delta y\}$ θα συνδέονται επίσης με μια σχέση συνάρτησης, ως εξής.

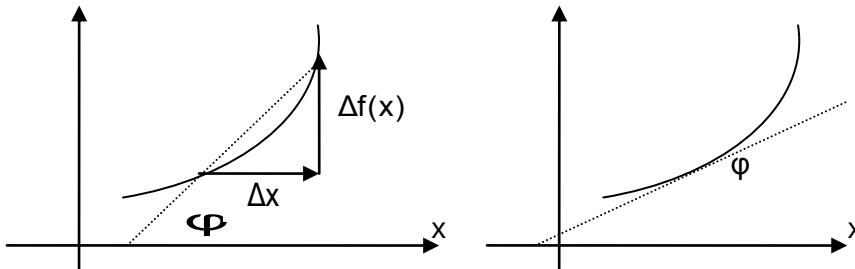
$$y = f(x) \Rightarrow \Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \quad .$$

Έτσι σε κάθε x το Δy είναι συνάρτηση του Δx . Ο λόγος των μεταβολών:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{ονομάζεται μέσος ρυθμός}$$

μεταβολής.

Γεωμετρικά παριστάνεται με την κλίση της χορδής που συνδέει το αρχικό σημείο (x, y) με το τελικό $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, όπως φαίνεται στο πρώτο γράφημα του παρακάτω σχήματος.



κλίση χορδής και κλίση εφαπτομένης

Για γραμμικές συναρτήσεις ο λόγος αυτός είναι σταθερός ανεξάρτητα του x και του Δx και δίνεται από την κλίση της ευθείας του γραφήματος:

$$y = mx + \beta \Rightarrow \Delta y = [m(x + \Delta x) + \beta] - [mx + \beta] = m\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = m \quad .$$

Έτσι για γραμμικές συναρτήσεις ο μέσος ρυθμός μεταβολής δίνεται από την κλίση της ευθείας.

3. Ρυθμός μεταβολής.

Γενικά, ο λόγος των μεταβολών: $\Delta y / \Delta x$, εξαρτάται από το αρχικό x καθώς και από την ίδια τη μεταβολή Δx . Στο όριο: $\Delta x \rightarrow 0$, βρίσκουμε ένα μέγεθος που δεν εξαρτάται από το Δx , το οποίο παριστάνεται με

$$y'(x) \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Καλείται (οριακός) ρυθμός μεταβολής ή παράγωγος της y ως προς x (marginal rate of change, derivative). Επίσης καλείται και κλίση της καμπύλης στο συγκεκριμένο σημείο. Γεωμετρικά ισούται με την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στη καμπύλη της συνάρτησης στο αντίστοιχο σημείο: (x, y) , όπως φαίνεται στο δεύτερο γράφημα του παραπάνω σχήματος. Συχνά η μεταβλητή y παριστάνει τις τιμές μίας συνάρτησης, οπότε γράφουμε:

$$f'(x) \quad \text{ή} \quad \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Παράδειγμα. Αν $y = f(x) = x - x^2$, τότε:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [(x + \Delta x) - (x + \Delta x)^2] - [x - x^2]$$

Επομένως:

$$\Delta y = (1 - 2x)\Delta x - \Delta x^2 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 1 - 2x - \Delta x$$

Π.χ.

στο σημείο $x = 2 \Rightarrow \Delta y = -3\Delta x - \Delta x^2$ & $\Delta y / \Delta x = -3 - \Delta x \rightarrow -3$ όταν $\Delta x \rightarrow 0$.

Επομένως η παράγωγος στο $x = 2$ είναι $f'(2) = 3$.

Γενικότερα στο τυχόν x , βρίσκουμε:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 - 2x - \Delta x \rightarrow 1 - 2x \quad \text{όταν} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Επομένως: $f(x) = x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 1 - 2x$, δηλαδή $(x - x^2)' = 1 - 2x$.

4. Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων.

Υπολογίζοντας την παράγωγο μιας συνάρτησης $f(x)$ στα διάφορα x , βρίσκουμε μια νέα συνάρτηση: $f'(x)$,

η οποία καλείται επίσης *παράγωγος*. Από τον ορισμό και από τις ιδιότητες παραγωγίσις που θα μελετήσουμε παρακάτω βρίσκουμε για τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων τους εξής τύπους:

1. $(c)' = 0$, η σταθερή συνάρτηση έχει μηδενική παράγωγο
2. $(mx + \beta)' = m$, η γραμμική συνάρτηση έχει σταθερή παράγωγο
3. $(e^x)' = e^x$, $\ln' x = 1/x$
4. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, για όλες τις δυνάμεις α
5. $\sin' x = \cos x$, $\cos' x = -\sin x$, $\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Απόδειξη.

3. Ο τύπος $(e^x)' = e^x$ αποδεικνύεται απευθείας από τον ορισμό και τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης:

$$\frac{\Delta e^x}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \left[\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right] \rightarrow e^x \text{ όταν } \Delta x \rightarrow 0$$

Χρησιμοποιήσαμε το όριο από τον ορισμό της βάσης e :

$$(1+h)^{1/h} \rightarrow e \text{ ή ισοδύναμα } \frac{e^h - 1}{h} \rightarrow 1, \text{ όταν } h \rightarrow 0,$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε την παράγωγο της $\ln x$ ως αντίστροφης της e^x , σύμφωνα με τον κανόνα αντιστροφής που θα δούμε παρακάτω.

4. Για την παράγωγο των δυνάμεων χρησιμοποιούμε την παράσταση:

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x},$$

και τον κανόνα σύνθετης παραγωγίσις που θα δούμε παρακάτω.

5. Ο τύπος $(\sin x)' = \cos x$, αποδεικνύεται από τον ορισμό της παραγώγου, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του συνημιτόνου αθροίσματος:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

Βρίσκουμε:

$$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \sin x \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}.$$

Τέλος χρησιμοποιούμε και τα όρια:

$$\frac{\cosh h - 1}{h} \rightarrow 0, \quad \frac{\sinh h}{h} \rightarrow 1 \quad \text{όταν } h \rightarrow 0,$$

τα οποία προκύπτουν από τις γεωμετρικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται και ο τύπος για την παράγωγο του συνημιτόνου. Τέλος η παράγωγος της συνάρτησης εφαπτομένης, προκύπτει από τον τύπο για την παράγωγο του ηλίκου δύο συναρτήσεων που θα δούμε παρακάτω.

5. Κανόνες παραγωγίσης.

Από τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων βρίσκουμε παραγώγους περισσότερο σύνθετων συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας τους παρακάτω κανόνες, που αφορούν τις ιδιότητες της παραγώγου ως προς τις διάφορες πράξεις μεταξύ συναρτήσεων:

1. $[af(x) + bg(x)]' = af'(x) + bg'(x)$, γραμμικός συνδυασμός,
ειδικότερα: $[af(x)]' = af'(x)$, $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
2. $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, γινόμενο,
3. $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, ηλίκο.

Απόδειξη.

Θα εξετάσουμε μόνο το 2 χρησιμοποιώντας για ευκολία αντί των συναρτήσεων τις αντίστοιχες εξαρτημένες μεταβλητές:

$$y = f(x), \quad z = g(x) \Rightarrow y \cdot z = f(x)g(x).$$

Θεωρώντας αντίστοιχες μεταβολές $\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}$ από κάποιες αρχικές τιμές, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(y \cdot z)}{\Delta x} &= \frac{(y + \Delta y)(z + \Delta z) - yz}{\Delta x} = \frac{y\Delta z + z\Delta y + \Delta y\Delta z}{\Delta x} = \\ &= y \frac{\Delta z}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} z + \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{\Delta z}{\Delta x} \Delta x \rightarrow y \cdot z' + y' \cdot z + y' \cdot z' \cdot 0 = y \cdot z' + y' \cdot z \end{aligned}$$

στην περίπτωση που $\Delta x \rightarrow 0$.

Παράδειγμα.

$$1. (2x^3 - 5x + 2)' = 2(x^3)' - 5(x)' + (2)' = 6x^2 - 5$$

$$2. \left(\frac{1}{x-1} \right)' = \frac{1'(x-1) - 1(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{0(x-1) - 1 \cdot 1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}, \text{ για } x \neq 1$$

$$3. (\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{1/2-1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$4. (\sqrt{x}e^x)' = (\sqrt{x})'e^x + \sqrt{x}(e^x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^x + \sqrt{x}e^x = \frac{1+2x}{2\sqrt{x}}e^x, \text{ για } x \geq 0$$

$$5. (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$6. (\log_2 x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 2} \right)' = \frac{1}{\ln 2} (\ln x)' = \frac{1}{x \ln 2}, \text{ για } x > 0 \text{ (μετατρέψαμε τον} \\ \text{λογ/θμο με βάση το 2 σε νεπέριο λογ/θμο ln)}$$

$$7. (x \ln x)' = (x)' \ln x + x(\ln x)' = 1 \ln x + x(1/x) = \ln x + 1, \text{ για } x > 0$$

6. Αλυσωτή παράγωγος.

Αν έχουμε σύνθεση, όπου το z είναι συνάρτηση του y και το y συνάρτηση του x :

$$z = f(y) \text{ \& } y = g(x),$$

τότε οι αντίστοιχες μεταβολές θα ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Παίρνοντας το όριο όταν $\Delta x \rightarrow 0$, θα έχουμε επίσης $\Delta y \rightarrow 0$, και βρίσκουμε ότι:

Η παράγωγος της σύνθεσης συναρτήσεων ισούται με το γινόμενο των επιμέρους παραγώγων.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx},$$

σχέση που είναι γνωστή ως αλυσωτή παράγωγος (chain derivative) ή κανόνας της αλυσίδας (chain rule).

Αν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό των συναρτήσεων, τότε ο τύπος αλυσωτής παραγωγίσης θα πάρει την μορφή:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x).$$

Παρατηρούμε ότι στο αριστερό μέρος πρώτα αντικαθιστούμε $g(x)$ και μετά παραγωγίζουμε, ενώ στο δεξιό μέρος πρώτα παραγωγίζουμε και μετά αντικαθιστούμε το x με το $g(x)$.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσωτής παραγωγίσης στους βασικούς τύπους βρίσκουμε τους παρακάτω σύνθετους τύπους παραγωγίσης:

$$1. [f^a(x)]' = af^{a-1}(x)f'(x)$$

$$2. [e^{f(x)}]' = e^{f(x)}f'(x), [\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$3. [\sin f(x)]' = [\cos f(x)]f'(x), [\cos f(x)]' = -[\sin f(x)]f'(x)$$

Παράδειγμα.

$$1. (e^{x^2})' = e^{x^2}(x^2)' = 2xe^{x^2}$$

$$2. (\ln \sqrt{x+1})' = [\ln(x+1)^{1/2}]' = \frac{[(x+1)^{1/2}]'}{(x+1)^{1/2}} = \frac{1}{2(x+1)}$$

Το ίδιο θα βρούμε αν απλοποιήσουμε πρώτα τη συνάρτηση στη μορφή:

$$\ln(x+1)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln(x+1).$$

$$3. (2^x)' = (e^{x \ln 2})' = e^{x \ln 2}(x \ln 2)' = 2^x \ln 2 \quad (\text{μετατρέπουμε σε νεπέρεια βάση})$$

$$4. (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = e^{x \ln x}(\ln x + x \frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1), \text{ για } x > 0.$$

7. Παράγωγος αντίστροφης.

Αν μια συνάρτηση $y = y(x)$ είναι γνήσια μονότονη σε κάποιο διάστημα, τότε η αντίστροφη συνάρτηση $x = x(y)$ θα έχει ως παράγωγο την ανάστροφο της αρχικής, στα ίδια (x, y) :

$$\frac{dx}{dy} = 1 / \frac{dy}{dx} \quad \text{ή} \quad x'(y) = \frac{1}{y'(x)}.$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει αν πάρουμε όρια στις αντίστοιχες σχέσεις μεταξύ των μεταβολών:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^{-1}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό των συναρτήσεων, και θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f(x)$ με αντίστροφη $f^{-1}(x)$, τότε η σχέση αντίστροφης παραγώγου παίρνει τη μορφή:

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Έτσι, στο αριστερό μέρος πρώτα αντιστρέφουμε και μετά παραγωγίζουμε ενώ στο δεξιό μέρος πρώτα παραγωγίζουμε. Οι παραπάνω τύποι μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε τις παραγώγους αντίστροφων συναρτήσεων από τις παραγώγους των αρχικών.

Παράδειγμα.

Θα επαληθεύσουμε τους τύπους αντίστροφης παραγώγου σε γνωστές συναρτήσεις.

1. Η $y = \sqrt{x}$ είναι αντίστροφη της $x = y^2$ με $y \geq 0$. Επομένως:

$$(\sqrt{x})' = y'(x) = 1/x'(y) = 1/2y = 1/2\sqrt{x}.$$

2. Η $y = \ln x$ είναι αντίστροφη της $x = e^y$. Επομένως:

$$(\ln x)' = y'(x) = 1/x'(y) = 1/e^y = 1/x.$$

Παράδειγμα.

Ο τύπος αντίστροφης παραγώγου μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε πολυσήμαντες (δηλ. που δεν είναι 1-1) αντίστροφες. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$y = 1 + 4x + x^2 \Rightarrow y'(x) = 4 + 2x.$$

Η (δισήμαντη) αντίστροφή της θα έχει παράγωγο:

$$x = x(y) \Rightarrow x'(y) = 1/y'(x) = 1/(4 + 2x).$$

Π.χ. για $y=6$ αντιστοιχούν δύο σημεία x . Στο $x=1$ θα έχουμε $x'|_{x=1}=1/6$, ενώ στο συμμετρικό του για $x=5$ θα έχουμε $x'|_{x=5}=-1/6$. Υπολογίσαμε τις παραγώγους της αντίστροφης χωρίς να την έχουμε βρει. Μπορούμε να επαληθεύσουμε, βρίσκοντας πρώτα την αντίστροφη συνάρτηση και παραγωγίζοντας στη συνέχεια. Λύνουμε ως προς x :

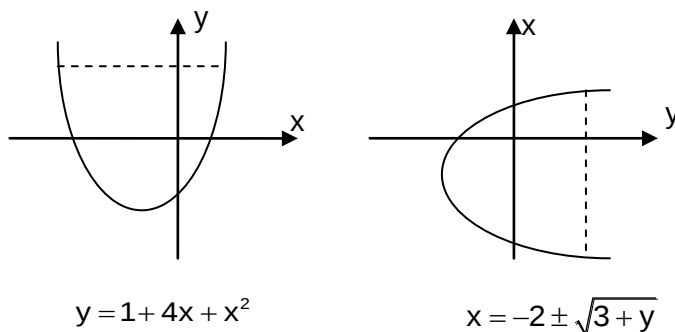
$$y = 1 + 4x + x^2 \Rightarrow x^2 + 4x + (1 - y) = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(1 - y)}}{2}$$

Επομένως:

$$x = -2 \pm \sqrt{y + 3} \Rightarrow x'(y) = \frac{\pm 1}{2\sqrt{y + 3}}.$$

Κάθε φορά επιλέγουμε το ένα από τα δύο πρόσημα για το x και για το αντίστοιχο x' .

Παρατήρηση. Όσον αφορά το γράφημα της $y = y(x)$, η παράγωγος $y'(x)$ ισούται με την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας ως προς τον x -άξονα, ενώ η παράγωγος $x'(y)$ ισούται με την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας ως προς τον y -άξονα.



αντίστροφη συνάρτησης

8. Παράγωγοι αντίστροφων τριγωνομετρικών.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αντίστροφης παραγώγου, θα δείξουμε ότι οι παράγωγοι των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι οι παρακάτω:

η $\arcsin x$ με $-1 \leq x \leq 1$ έχει παράγωγο: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

και η $\arctan x$ με $-\infty < x < +\infty$ έχει παράγωγο: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Απόδειξη.

1. Η συνάρτηση $y = \arcsin x$ είναι αντίστροφη της $x = \sin y$ με $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Ο τύπος αντίστροφης παραγώγου μας δίνει :

$$\frac{dy}{dx} = 1 \Big/ \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα:

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \Rightarrow \cos y = \pm \sqrt{1-\sin^2 y},$$

αλλά πήραμε τη θετική ρίζα διότι στο διάστημα: $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, το συνημίτονο είναι θετικό.

2. Η συνάρτηση $y = \arctan x$ είναι αντίστροφη της $x = \tan y$ με $-\pi/2 < y < \pi/2$. Ο τύπος αντίστροφης παραγώγου μας δίνει :

$$\frac{dy}{dx} = 1 \Big/ \frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

1α.4 Ιδιότητες της Παραγώγου

1. Μονοτονία.

Η παράγωγος μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη μελέτη των ιδιοτήτων μονοτονίας των συναρτήσεων, σύμφωνα με το παρακάτω:

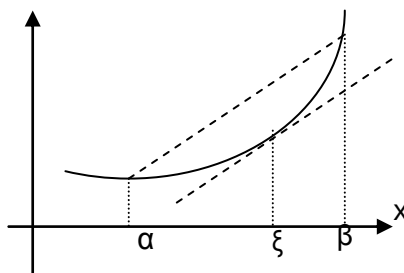
Θεώρημα μέσης τιμής (mean value theorem).

- Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $a \leq x \leq b$, και η παράγωγός της είναι συνεχής στο εσωτερικό του: $a < x < b$, τότε θα έχουμε:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi),$$

για κάποιο ξ στο εσωτερικό του:
 $a < \xi < b$.

Δηλαδή η κλίση της χορδής είναι ίση με τη κλίση της εφαπτόμενης σε κάποιο γνήσια ενδιάμεσο σημείο.



Ως άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος, βρίσκουμε ότι:

- Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) σε κάποιο διάστημα $\Leftrightarrow$ έχει $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) σε όλα τα σημεία του διαστήματος. Ειδικότερα είναι

γνήσια αύξουσα (φθίνουσα) αν ικανοποιεί $f'(x) > 0$ (< 0), εκτός ίσως ενός πεπερασμένου πλήθους σημείων όπου η παράγωγος μπορεί να μηδενίζεται.

Παράδειγμα.

1. $f(x) = -2x + 1 \Rightarrow f'(x) = -2 < 0$: γνήσια φθίνουσα
2. $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$: γνήσια φθίνουσα για $x < 0$,
γνήσια αύξουσα για $x > 0$.
3. $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$: γνήσια αύξουσα για όλα τα x .
4. $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = 1/x$: γνήσια αύξουσα για $x > 0$.

Παράδειγμα.

Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x) = -\alpha_0 + [\alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n],$$

με συντελεστές: $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\dots$, $\alpha_n \geq 0$, και υποθέτουμε:

$$\alpha_0 < \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

οπότε τα $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ δεν είναι όλα μηδενικά. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση έχει ακριβώς ένα μηδενικό x_0 στο διάστημα $0 < x < 1$. Πράγματι:

1. Έχουμε:

$$f(0) = -\alpha_0 < 0 \text{ και } f(1) = -\alpha_0 + [\alpha_1 + \dots + \alpha_n] > 0, \text{ οπότε}$$

συμπεραίνουμε από το θεώρημα ενδιάμεσου τιμής ότι έχει τουλάχιστον ένα μηδενικό στο διάστημα $0 < x < 1$.

2. Παρατηρούμε επίσης ότι η παράγωγος της είναι γνήσια θετική:

$$f'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + \dots + n\alpha_n x^{n-1} > 0 \text{ για } x > 0,$$

διότι τα $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ δεν είναι όλα μηδενικά. Συμπεραίνουμε ότι η $f(x)$ είναι γνήσια αύξουσα για $x > 0$, και επομένως έχει το πολύ ένα μηδενικό σ' αυτό το διάστημα.

Προκύπτει από τα παραπάνω ότι έχει ακριβώς ένα μηδενικό

2. Στάσιμα (stationary) σημεία μιας συνάρτησης $f(x)$ καλούνται τα x στα οποία μηδενίζεται η παράγωγος

$$f'(x) = 0.$$

Γεωμετρικά χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα ότι στα σημεία αυτά η εφαπτόμενη στο γράφημα είναι οριζόντια. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει κανένα, ένα, ή περισσότερα στάσιμα σημεία ή και ολόκληρο διάστημα από στάσιμα σημεία αν έχει σταθερή τιμή στο διάστημα αυτό. Υποθέτοντας την παράγωγο συνεχή, τα στάσιμα σημεία χωρίζουν το διάστημα ορισμού σε υποδιαστήματα, όπου σε κάθε υποδιάστημα η συνάρτηση είναι γνήσια μονότονη διότι η παράγωγος θα έχει το ίδιο πρόσημο. Ένα στάσιμο σημείο στο οποίο αλλάζει το πρόσημο της παραγώγου, είναι *γνήσιο τοπικό ακρότατο*, μέγιστο αν από θετική γίνεται αρνητική, ελάχιστο στην αντίθετη περίπτωση. Ένα στάσιμο σημείο στο οποίο δεν αλλάζει το πρόσημο της παραγώγου δεν είναι τοπικό ακρότατο. Λέμε ότι είναι *σημείο καμπής* (inflection point).

Παράδειγμα.

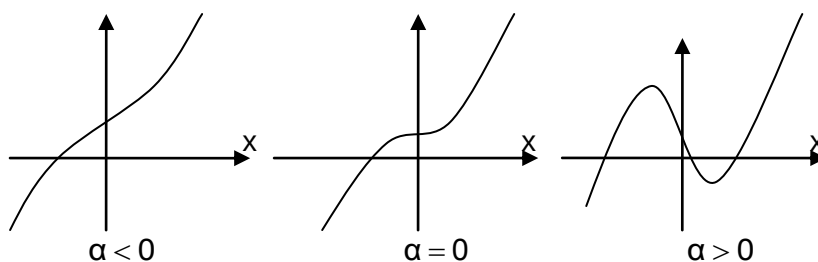
Θα μελετήσουμε τις μονοτονίες της συνάρτησης:

$$f(x) = x^3 - \alpha x + \beta, \text{ όπου } f'(x) = 3x^2 - \alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του α .

1. Αν $\alpha < 0$, τότε $f'(x) > 0$ για όλα τα x και επομένως η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα.
2. Αν $\alpha = 0$, τότε $f'(x) = 3x^2 \geq 0$. Το πρόσημο της παραγώγου δεν αλλάζει στο στάσιμο: $x = 0$. Επομένως η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα με σημείο καμπής το στάσιμο.
3. Αν $\alpha > 0$, τότε $f'(x) = 3x^2 - \alpha = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{\alpha/3}$, $x_2 = \sqrt{\alpha/3}$

Τότε η συνάρτηση έχει δύο στάσιμα. Στο πρώτο στάσιμο το πρόσημο της παραγώγου αλλάζει από θετικό σε αρνητικό και επομένως είναι τοπικό μέγιστο της συνάρτησης. Στο δεύτερο αλλάζει από αρνητικό σε θετικό και είναι τοπικό ελάχιστο. Δίνουμε παρακάτω το γράφημα της συνάρτησης για τα διάφορα α .



Η κυβική συνάρτηση: $f(x) = x^3 - \alpha x + \beta$ για τις διάφορες τιμές του α .

3. Ασυνέχειες της παραγώγου.

Μια συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να είναι συνεχής αλλά η παράγωγος της να μην είναι συνεχής σε κάποιο x_0 . Διακρίνουμε δύο βασικά είδη ασυνέχειας της παραγώγου:

1. $f'(x_0) = \infty$: άπειρη ασυνέχεια, όπου η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα είναι κατακόρυφη με άπειρη κλίση.
2. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) \neq 0$: βηματική ασυνέχεια, όπου το γράφημα έχει γωνία.

Η δεύτερη περίπτωση εμφανίζεται συχνά στα σημεία ένωσης τμηματικά ορισμένων συναρτήσεων, όπως οι συναρτήσεις $\{\max, \min\}$. Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία μία συνάρτηση f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται *κρίσιμα σημεία* της f στο διάστημα Δ . Ο όρος αυτός θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω στο πλαίσιο της βελτιστοποίησης συναρτήσεων.

Παράδειγμα.

1. Η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι συνεχής στο διάστημα $x \geq 0$, αλλά η παράγωγος $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$ έχει άπειρη ασυνέχεια στο $x = 0$.
2. Η $f(x) = \max\{x^2, x\}$ είναι συνεχής στο διάστημα $x \geq 0$, με παράγωγο

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{οταν } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 & \text{οταν } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{οταν } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x & \text{οταν } x \geq 1 \end{cases}$$

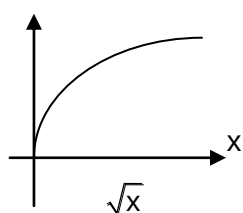
Στο σημείο ένωσης $x=1$ έχουμε γωνία διότι η παράγωγος εμφανίζει βηματική ασυνέχεια: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 2 - 1 = 1 \neq 0$. Η κλίση της

εφαπτόμενης αυξάνει απότομα από 1 σε 2.

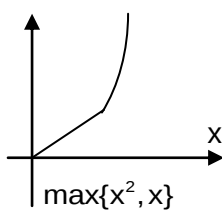
$$3. f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{όταν } x \leq 0 \\ x & \text{όταν } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{όταν } x \leq 0 \\ 1 & \text{όταν } x \geq 0 \end{cases}$$

Στο $x = 0$ έχει γωνία. Η κλίση αλλάζει απότομα από -1 σε $+1$.

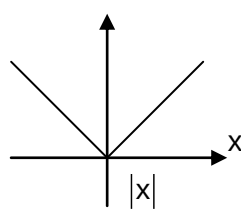
Δίνουμε παρακάτω τα γραφήματα των τριών συναρτήσεων του παραδείγματος και των παραγώγων τους.



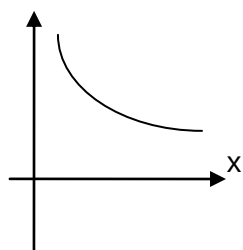
$\sqrt{x}$



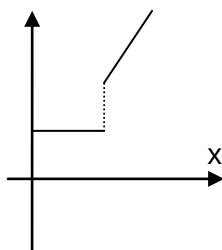
$\max\{x^2, x\}$



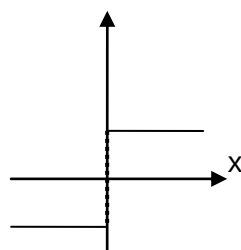
$|x|$



άπειρη



βηματική



βηματική

ασυνέχειες παραγώγου

Παρατήρηση. Στο σημείο άπειρης ασυνέχειας της παραγώγου, θεωρούμε ότι η τιμή της παραγώγου είναι άπειρη, ως όριο. Στο σημείο βηματικής ασυνέχειας της παραγώγου, είτε λέμε ότι η παράγωγος δεν ορίζεται, είτε ότι ορίζεται υπό την έννοια ότι αποτελεί μία πολυσήμαντη απεικόνιση με τιμές όλες της τιμές μεταξύ των δύο πλευρικών παραγώγων, οπότε την ονομάζουμε *γενικευμένη παράγωγο* (generalized

derivative). Έτσι στη γωνία $x=0$, η συνάρτηση $f(x)=|x|$ θα έχει ως γενικευμένη παράγωγο όλες τις τιμές στο διάστημα: $-1 \leq f'(0) \leq 1$.

Παράδειγμα.

Θα δείξουμε τον τύπο:

$$(\ln|x|)' = 1/x \text{ για } x \neq 0.$$

Η συνάρτηση είναι σύνθεση της $f(x)=\ln x$ και της $g(x)=|x|$. Από το προηγούμενο παράδειγμα και τον τύπο αλυσωτής παραγώγισης, βρίσκουμε:

$$\ln|x|' = \frac{|x|'}{|x|} = \begin{cases} 1/|x| = 1/x \text{ αν } x > 0 \\ -1/|x| = 1/x \text{ αν } x < 0 \end{cases} = \frac{1}{x} \text{ αν } x \neq 0.$$

4. Κανόνας L' Hospital.

Θεωρούμε το όριο των τιμών μιας συνάρτησης όταν $x \rightarrow \alpha$, όπου το α μπορεί να είναι κάποιος πραγματικός ή και $\pm\infty$. Λέμε ότι το όριο είναι *προσδιορισμένο* (determinate) αν είναι πραγματικός αριθμός ή άπειρο. Θεωρούμε τώρα δύο συναρτήσεις: $f(x)$, $g(x)$ και υποθέτουμε ότι όταν $x \rightarrow \alpha$ αμφότερες έχουν όριο 0 ή $\pm\infty$. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το όριο του λόγου:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \text{ ή } \frac{0}{0},$$

είναι *απροσδιόριστο* (indeterminate).

Μπορούμε να απαλείψουμε την απροσδιοριστία, και να υπολογίσουμε το όριο χρησιμοποιώντας τον παρακάτω κανόνα.

- **Κανόνας L' Hospital:** Στην περίπτωση απροσδιόριστου ορίου του λόγου

δύο συναρτήσεων ισχύει: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ όταν $x \rightarrow \alpha$.

Δηλαδή, όταν έχουμε απροσδιοριστία του τύπου: $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ή $\frac{0}{0}$, τότε το όριο του λόγου των συναρτήσεων ισούται με το όριο του λόγου των παραγώγων.

Εκφράζουμε την παραπάνω σχέση όπου δύο παραστάσεις έχουν το ίδιο όριο, λέγοντας ότι είναι *ασυμπτωτικά ισοδύναμες*. Το παριστάνουμε με:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ όταν } x \rightarrow \alpha.$$

Απόδειξη. Ο κανόνας είναι άμεση συνέπεια του παρακάτω γενικευμένου θεωρήματος μέσης τιμής, :

Αν οι συναρτήσεις: $f(x)$, $g(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα: $[a, \beta]$, και οι παράγωγοί τους: $f'(x)$, $g'(x)$ είναι συνεχείς στο εσωτερικό του διαστήματος (a, β) , με $g'(x) \neq 0$, τότε ισχύει η σχέση:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}}{\frac{g(\beta) - g(a)}{\beta - a}} = \frac{f(\beta) - f(a)}{g(\beta) - g(a)} \text{ για κάποιο } \xi \in (a, \beta).$$

Θέτοντας $a = x_0$, και παίρνοντας το όριο όταν $\beta \rightarrow x_0$, προκύπτει ο κανόνας L' Ho-spital για την περίπτωση $\frac{0}{0}$. Για την περίπτωση των άπειρων ορίων χρησιμοποιούμε τις ανάστροφες συναρτήσεις: $\frac{1}{f(x)}$, $\frac{1}{g(x)}$.

Αν δύο συναρτήσεις έχουν αμφότερες άπειρο όριο, τότε διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις, ανάλογα αν το όριο του λόγου τους, όπως υπολογίζεται παραπάνω, είναι άπειρο, μηδενικό, ή κάποιος άλλος αριθμός διάφορος του μηδενός και του απείρου. Αντίστοιχη διάκριση κάνουμε όταν αμφότερες έχουν μηδενικό όριο.

Παράδειγμα.

1. Οι συναρτήσεις: $\ln x$, x , e^x , έχουν όλες όριο ∞ όταν $x \rightarrow +\infty$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα L' Hopital, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{x} &\sim \frac{(e^x)'}{x'} = \frac{e^x}{1} \rightarrow \infty \text{ όταν } x \rightarrow +\infty \\ \frac{x}{\ln x} &\sim \frac{(x)'}{(\ln x)'} = \frac{1}{1/x} = x \rightarrow \infty \text{ όταν } x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Και στις δύο περιπτώσεις υπερσχύει το άπειρο του αριθμητή, και λέμε ότι όταν $x \rightarrow +\infty$, η e^x έχει άπειρο μεγαλύτερης τάξης από την x , και η x μεγαλύτερης τάξης από την $\ln x$. Αντίθετα όταν το όριο είναι 0 τότε λέμε ότι ο παρονομαστής έχει άπειρο μεγαλύτερης τάξης.

2. Οι συναρτήσεις $2x^2$, $x^2 + \ln x$ έχουν αμφότερες όριο το ∞ όταν $x \rightarrow +\infty$. Για το λόγο τους βρίσκουμε:

$$\frac{2x^2}{x^2 + \ln x} \sim \frac{4x}{2x + 1/x} \sim \frac{4}{2 - 1/x^2} \rightarrow 2, \text{ εφ' όσον } 2 \neq 0.$$

Σε αντιδιαστολή με τα παραπάνω παραδείγματα, όταν το όριο είναι αριθμός διάφορος του μηδενός και του άπειρου, λέμε ότι οι δύο συναρτήσεις έχουν άπειρο της ίδιας τάξης όταν $x \rightarrow +\infty$

Παράδειγμα.

Οι συναρτήσεις $e^x - 1$ και x έχουν αμφότερες όριο το 0 όταν $x \rightarrow 0$. Για το λόγο τους βρίσκουμε :

$$\frac{e^x - 1}{x} \sim \frac{e^x}{1} \rightarrow 1 \quad \text{όταν} \quad x \rightarrow 0.$$

Εφόσον το όριο του λόγου είναι διάφορο του μηδενικού και του άπειρου λέμε ότι έχουν μηδενικό της ίδιας τάξης όταν $x \rightarrow 0$.

Τα παραπάνω αφορούν απροσδιοριστίες της μορφής: $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ή $\frac{0}{0}$.

Απροσδιοριστία της μορφής: $0 \cdot \infty$, ανάγεται στις παραπάνω απροσδιοριστίες.

Παράδειγμα.

Θα μελετήσουμε μονοτονίες, ακρότατα και όρια κάποιων συναρτήσεων.

1. Η $f(x) = xe^{-x}$ στο θετικό διάστημα $x \geq 0$, έχει θετικές τιμές με μηδενικό στο $x=0$. Έχει παράγωγο $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ με μηδενικό στο $x=1$, και είναι αύξουσα μέχρι το $x=1$ και στη συνέχεια γίνεται φθίνουσα. Στο όριο $x \rightarrow +\infty$ προκύπτει απροσδιοριστία της μορφής

$xe^{-x} \rightarrow \infty \cdot 0$. Την υπολογίζουμε μετατρέποντας την σε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{+\infty}{+\infty}$. Βρίσκουμε:

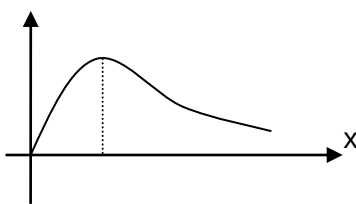
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Δηλαδή το μηδενικό όριο της e^{-x} υπερσχύει του απείρου ορίου της x .

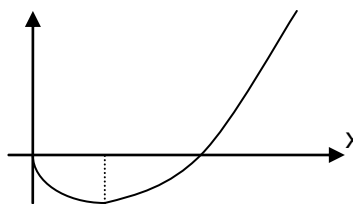
2. Η $f(x) = x \ln x$ για $x > 0$, έχει μηδενικό στο $x = 1$, αρνητικές τιμές πριν και θετικές μετά. Η παράγωγος: $f'(x) = \ln x + 1$ έχει μηδενικό όταν $\ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$, ενώ παίρνει αρνητικές τιμές πριν και θετικές μετά. Επομένως η συνάρτηση είναι γνήσια φθίνουσα μέχρι το $x = e^{-1}$ και αύξουσα μετά. Για $x \rightarrow 0^+$ έχουμε $x \ln x \rightarrow 0 \cdot (-\infty)$, που είναι απροσδιόριστη μορφή. Βρίσκουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Δηλαδή το μηδενικό όριο της x υπερσχύει του άπειρου ορίου της $\ln x$. Έτσι η συνάρτηση αρχίζει στο $x = 0$ με $f(0) \rightarrow 0$ και $f'(0) \rightarrow -\infty$.



xe^{-x}



$x \ln x$

Τα γραφήματα συναρτήσεων του παραπάνω παραδείγματος
Παράδειγμα.

Απροσδιοριστίες της μορφής: 0^0 ή 1^∞ αίρονται παίρνοντας λογαρίθμους. Π.χ.

1. Για να υπολογίσουμε το απροσδιόριστο όριο:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 1^\infty \quad \text{όταν } n \rightarrow +\infty,$$

παίρνουμε πρώτα τον λογάριθμο και στη συνέχεια βρίσκουμε το όριο του λογαρίθμου εφαρμόζοντας τον κανόνα L'Hospital:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{\ln(1+1/n)}{1/n} \sim \frac{0}{0} \sim \frac{-1/n^2/(1+1/n)}{-1/n^2} = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1$$

Εφόσον ο λογάριθμος έχει όριο 1, ο αρχικός όρος θα έχει όριο:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e^1 = e = 2,71...$$

Με τον ίδιο τρόπο, ή με αλλαγή μεταβλητής: $n = p \cdot m$, βρίσκουμε το γενικό όριο:

$$\left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^p \rightarrow e^p.$$

2. Για να άρουμε την απροσδιοριστία $x^x \rightarrow 0^0$ όταν $x \rightarrow 0$, παίρνουμε τον λογάριθμο και βρίσκουμε $x \ln x \rightarrow 0$ από προηγούμενο παράδειγμα. Επομένως $x^x \rightarrow e^0 = 1$. Εξάλλου έχουμε:

$$x^x = e^{x \ln x} \rightarrow e^0 = 1$$

5. Γραμμική προσέγγιση ή γραμμική επέκταση (linear approximation, linear extrapolation) μιας συνάρτησης $f(x)$ σε κάποιο x_0 καλείται η γραμμική συνάρτηση η οποία στο x_0 έχει την ίδια τιμή και την ίδια παράγωγο με την $f(x)$. Εκφράζοντας την γραμμική προσέγγιση σε δυνάμεις του $(x - x_0)$, διαπιστώνουμε ότι δίνεται από τον τύπο: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Το γράφημά της είναι η εφαπτόμενη ευθεία στο αντίστοιχο σημείο της καμπύλης. Λέμε ότι για τιμές του x γειτονικές του x_0 , η τιμή της προσεγγίζει την τιμή της συνάρτησης, «καλλίτερα» από κάθε άλλη γραμμική συνάρτηση. Γράφουμε:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{όταν } x \approx x_0.$$

Παράδειγμα.

Δίνουμε τις γραμμικές προσεγγίσεις ορισμένων συναρτήσεων σε χαρακτηριστικά σημεία τους.

Με βάση την τελευταία σχέση:

$$\text{στο } x_0 = 0: \quad e^x \approx 1+x, \quad \ln(1+x) \approx x, \quad \sqrt{1+x} \approx 1+x/2,$$

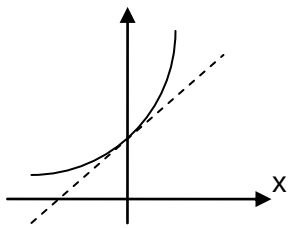
$$(1+x)^{-1} \approx 1-x, \quad \sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1$$

$$\text{και στο } x_0 = 1: \quad \ln x \approx x-1, \quad \sqrt{x} \approx 1+\frac{1}{2}(x-1) = \frac{1+x}{2}.$$

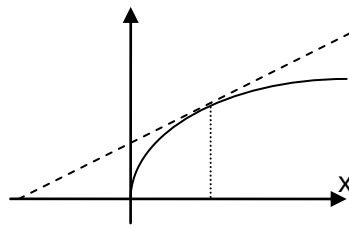
Έτσι, λόγω χάρη, $e^{0.1} \approx 1+0.1=1.1$, $\ln 0.9 \approx \ln(1-0.1) \approx -0.1$,
 $\sin 0.1 \approx 0.1$

$$\sqrt{1.1} = \sqrt{1+0.1} \approx 1 + \frac{0.1}{2} = 1.05,$$

$$\frac{1}{1.1} = (1+0.1)^{-1} \approx 1-0.1=0.9.$$



Για $x \approx 0 \rightarrow e^x \approx 1+x$



Για $x \approx 1 \rightarrow \sqrt{x} \approx \frac{1+x}{2} = 0.5x + 0.5$

γραμμικές προσεγγίσεις

6. Διαφορικά.

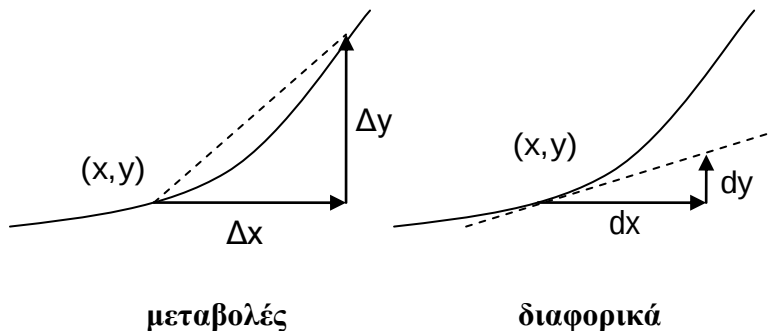
Θεωρούμε μια συνάρτηση $y=f(x)$ και το γράφημά της στο επίπεδο. Αρχίζοντας από κάποιες αρχικές τιμές x και y , ονομάζουμε μεταβολές (changes, differences):

Δx και Δy

τις μετατοπίσεις πάνω στη καμπύλη. Αντίστοιχα, ονομάζουμε διαφορικά (differentials):

dx και dy

τις μετατοπίσεις πάνω στην εφαπτόμενη ευθεία της καμπύλης, στο ίδιο σημείο.



Σε αντίθεση με τις μεταβολές τα διαφορικά έχουν μεταξύ τους απλή σχέση διότι ο λόγος τους ισούται με την παράγωγο στο συγκεκριμένο σημείο:

$$dy = y'(x)dx .$$

Οι δύο έννοιες, αυτή της μεταβολή και αυτή του διαφορικού, συμπίπτουν μόνο για τις γραμμικές εξισώσεις. Στη γενική περίπτωση τα διαφορικά θεωρούνται ως προσεγγίσεις των μεταβολών όταν αυτές είναι μικρές, με την παρακάτω έννοια που είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της παραγώγου:

- Αν για την ανεξάρτητη μεταβλητή πάρουμε το διαφορικό ίσο με τη μεταβολή τότε για την εξαρτημένη μεταβλητή το διαφορικό προσεγγίζει την μεταβολή της, με την έννοια ότι ο λόγος τους τείνει στο 1:

Αν $\Delta x = dx \rightarrow 0$ τότε $\Delta y / dy \rightarrow 1$ εφόσον $dy \neq 0$, δηλαδή $f'(x) \neq 0$.

Με την παραπάνω έννοια τα διαφορικά ονομάζονται και *οριακές μεταβολές* (marginal changes). Λέμε επίσης ότι τα διαφορικά δίνουν μια *εκτίμηση* (estimate) των μεταβολών. Σε πολλές περιπτώσεις μας ενδιαφέρει μόνο το πρόσημο των μεταβολών. Συμπεραίνουμε από την παραπάνω σχέση ότι:

- Για μικρά $\Delta x = dx$ το πρόσημο της μεταβολής Δy συμπίπτει με το πρόσημο του διαφορικού dy αν το τελευταίο είναι μη μηδενικό, δηλαδή στα σημεία με μη μηδενική παράγωγο.

Παράδειγμα.

Αν $y = x - x^2$, βρίσκουμε:

$$\Delta y = \Delta f(x) = (1 - 2x)\Delta x - (\Delta x)^2, \quad dy = f'(x)dx = (1 - 2x)dx$$

Π.χ. στο $\{x = 2, y = -2\}$ με $\Delta x = dx = 0,1$, βρίσκουμε $\Delta x^2 = 0,01$,

$$\text{και } \Delta y = -0,3099, \quad dy = -0,3100$$

Τα διαφορικά προσεγγίζουν τις μεταβολές με τον ίδιο τρόπο που οι γραμμικές προσεγγίσεις προσεγγίζουν τις συναρτήσεις, παραβλέποντας τους όρους ανώτερης τάξης οι οποίοι για «μικρές μεταβολές» είναι σχετικά ασήμαντοι.

Παράδειγμα.

Για την εκθετική συνάρτηση $y = e^x$, θα βρούμε το διαφορικό της σε τυχόν σημείο αρχίζοντας από την μεταβολή, χρησιμοποιώντας τον γνωστό τύπο γραμμικής προσέγγισης:

$$e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x \text{ εφόσον το } \Delta x \text{ είναι μικρό: } \Delta x = dx \approx 0$$

Έχουμε:

$$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1) \approx e^x(1 + \Delta x - 1) = e^x \Delta x = e^x dx = dy.$$