ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS AND BUSINESS

Σχολή Οικονομικών Επιστημών - Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης
Στατιστική Ι - Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019
Διδάσκων: Α. Λουκά *email: loukaalex@aueb.gr*
Βοηθός: Δ. Σαρρή, *email: sarridan@aueb.gr*

Problem Set 6

Άσκηση 6.1

Μία εταιρία παράγει μαρμελάδα και τη διοχετεύει στο εμπόριο σε βάζα. Η κατανομή του καθαρού βάρους (σε γραμμάρια) αυτών των βάζων είναι κανονική με μέσο 500 και τυπική απόκλιση 10. Υποθέσατε ότι παίρνετε ένα τυχαίο δείγμα 4 βάζων, ποια είναι η πιθανότητα το μέσο καθαρό βάρος των 4 αυτών βάζων να είναι λιγότερο από 490 γραμμάρια; (Δίνεται ότι $P(Z \leq 2) = 0.9772$, για $Z \sim N(0,1)$.)

Άσκηση 6.2

Έστω ότι παίρνετε ένα τυχαίο δείγμα 100 καινούριων διαμερισμάτων που πωλήθηκαν το περασμένο έτος, όπου η τιμή πώλησης είναι μια τυχαία μεταβλητή X και ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο $\mu = 50$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 10$.
(α) Ποια είναι η πιθανότητα η μέση τιμή πώλησης στο δείγμα να είναι μεταξύ 50 και 51 ;
(β) Αν η διακύμανση είναι άγνωστη και δίνεται ότι η εκτίμησή της από τον εκτιμητή $\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, είναι $s = 11.13$ να βρείτε την πιθανότητα η μέση τιμή πώλησης στο δείγμα να είναι μεταξύ 50 και 51.
(Δίνεται ότι $Pr(Z \leq 1) = 0.8415$, για $Z \sim N[0,1]$, $P(0 < T < 0.88) = 0.309$ για $T \sim t_{v-1}$)

Άσκηση 6.3

Έστω $\{X_1, X_2, ..., X_{n=9}\}$ ένα τυχαίο δείγμα από την τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο μ και διακύμανση σ^2. Για τον υπολογισμό του μέσου προτείνονται οι εκτιμητές $\bar{X} = \frac{X_1+X_2+...+X_9}{9}$ και $\mu^* = \frac{X_1+X_2}{2}$.
(α) Να δείξετε ότι και οι δύο εκτιμητές είναι αμερόληπτοι.
(β) Να προσδιορίσετε τον αποτελεσματικότερο εκτιμητή από τους δύο.

Άσκηση 6.4

Έστω $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ τυχαίο δείγμα n ανεξάρτητων δοκιμών από την τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την Bernoulli κατανομή με $E(X) = p, Var(X) = p(1-p)$, με (σταθερή) πιθανότητα επιτυχίας p , όπου $0 < p < 1$.
(α) Να βρεθεί ο εκτιμητής του p με τη μέθοδο των ροπών (MM).
(β) Να δειχθεί ότι ο εκτιμητής αυτός είναι αμερόληπτος.

Άσκηση 6.5

Έστω $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ ένα τυχαίο δείγμα από την τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο μ και διακύμανση σ^2. Να βρεθούν οι εκτιμητές των παραμέτρων (μ, σ^2) τη μέθοδο των ροπών (ΜΜ).

Άσκηση 6.6

[Ε.Γ. Τσιώνας «Στατιστική με Εφαρμογές στα Οικονομικά» Αθήνα 2009]. Έστω $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από την τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο μ και διακύμανση σ^2. Θεωρούμε τρεις εκτιμητές του μέσου $\mu_1 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\mu_2 = (n+1)^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$ και $\mu_3 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Να συγκρίνετε τους εκτιμητές σε όρους αμεροληψίας και όρους MSE.

Άσκηση 6.7

Έστω $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ ένα τυχαίο δείγμα από την τυχαία μεταβλητή X με μέσο μ και τυπική απόκλιση σ, θεωρήστε τους ακόλουθους δύο εκτιμητές:
$\hat{\theta_1} = \frac{5X_1 - 2X_2 + 4X_3}{7}$

$\hat{\theta_2} = \frac{6X_1 + 2X_2 - 2X_3}{7}$.
(α) Εξετάστε τους εκτιμητές ως προς την αμεροληψία τους.
(β) Ποιός από τους δύο εκτιμητές είναι ο καλύτερος αν γνωρίζουμε ότι $\mu^2 > \sigma^2$;