ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS AND BUSINESS

Σχολή Οικονομικών Επιστημών - Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης
Στατιστική Ι - Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019
Διδάσκων: Α. Λουκά *email: loukaalex@aueb.gr*
Βοηθός: Δ. Σαρρή, *email: sarridan@aueb.gr*

Άσκηση 5.1

Η τυχαία μεταβλητή X κατανέμεται κανονικά με μέσο $\mu = 30$ και διακύμανση $\sigma^2 = 16$. Αν δίνεται ότι: $Pr(Z \leq 2.5) = 0.9938, Pr(Z \leq -2.25) = 0.0122, Pr(Z \leq 1.25) = 0.8944$, για $Z \sim N[0,1]$.
Να υπολογίσετε:
(α) $Pr(X < 40)$
(β) $Pr(X > 21)$
(γ) $Pr(30 < X < 35)$

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε σε κάθε ερώτημα την τυπική κανονική κατανομή $Z \sim N[0,1]$, και τον τύπο της τυποποίησης:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \tag{1}$$

Άρα για το ερώτημα (α) θα έχω:
(α) Δηλαδή θα πάρω:

$$Pr(X < 40) = Pr(X-\mu < 40-\mu) = Pr(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{40-\mu}{\sigma}) = Pr(Z < \frac{40-30}{\sqrt{16}}) = Pr(Z < 2.5) = 0.9938 \tag{2}$$

(β) Αντίστοιχα θα έχω:

$$\begin{gathered} Pr(X > 21) = Pr(X - \mu > 21 - \mu) = Pr(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{21-\mu}{\sigma}) = \\ Pr(Z > \frac{21-30}{\sqrt{16}}) = Pr(Z > -2.25) = 1 - Pr(Z \leq -2.25) = 1 - 0.0122 = 0.9878 \end{gathered} \tag{3}$$

(γ)

Γενικά ισχύει ότι: για $Z \sim N(0,1)$: $P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a) = \Phi(b) - \Phi(a)$

$$\begin{aligned} Pr(30 < X < 35) = Pr(30 - \mu < X - \mu < 35 - \mu) = Pr(\frac{30-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{35-\mu}{\sigma}) = \\ Pr(\frac{30-30}{4} < Z < \frac{35-30}{4}) = Pr(0 < Z < 1.25) = Pr(Z < 1.25) - Pr(Z < 0) = \\ 0.8944 - 0.5 = 0.3944 \end{aligned}$$

Άσκηση 5.2

Έστω ότι η βαθμολογία ενός τυχαία επιλεγμένου μαθητή στις Πανελλαδικές εξετάσεις ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο $\mu = 13.7$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 2.4$. Ο Ηλίας στοχεύει να περάσει στο τμήμα Πληροφορικής και πρέπει να γράψει τουλάχιστον καλά όσο το 70% των υποψηφίων που θα δηλώσουν το τμήμα αυτό και θα εξεταστούν. Αν ο τελικός βαθμός του Ηλία είναι 15.5, θα του επιτρέψει την είσοδό του στο Τμήμα; (Δίνεται ότι $Pr(Z \leq 0.75) = 0.7734$, για $Z \sim N[0, 1]$.)

Λύση

Χρησιμοποιούμε την τυπική κανονική κατανομή για τους βαθμούς των υποψήφιων φοιτητών.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \tag{4}$$

, για $Z \sim N[0, 1]$.
$Pr(X < 15.5) = Pr(X - \mu < 15.5 - \mu) = Pr(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{15.5-\mu}{\sigma}) = Pr(Z < 0.75) = 0.7734$.

Άρα το ποσοστό το μαθητών που έγραψαν κάτω από 15.5 είναι $Pr(Z \leq 0.75) = 0.7734$. Συνεπώς, ο Ηλίας έγραψε υψηλότερη βαθμολογία από το 77.34% των υπόλοιπων υποψηφίων και

άρα πλέον είναι φοιτητής του τμήματος.

Άσκηση 5.3

Το 30% των χαμηλότερων βαθμολογιών των μαθητών μιας τάξης απέτυχε να περάσει την τελική εξέταση. Έστω ότι οι βαθμοί ακολουθούν την κανονική κατανομή και ο μέσος της εξέτασης ήταν 12 ενώ η τυπική απόκλιση 1.7. Ποιός ήταν ο προβιβάσιμος βαθμός του μαθήματος; (Δίνεται ότι, αν η περιοχή κάτω από την καμπύλη της τυπικής κανονικής κατανομής μεταξύ 0 και Z είναι 0.2, τότε $Z = 0.52$), δηλαδή $P(0 \leq Z \leq 0.52) = 0.2$, για $Z \sim N[0, 1]$.)

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο, για $Z \sim N[0, 1]$:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \tag{5}$$

Έστω ότι η μεταβλητή X είναι η μεταβλητή που ψάχνουμε και είναι ο προβιβάσιμος βαθμός. Θα λύσουμε ως προς X:

$$X = Z \cdot \sigma + \mu = Z \cdot 1.7 + 12 \tag{6}$$

Επειδή η τυπική κανονική κατανομή Z είναι συμμετρική γύρω από τον μέσο της που είναι το 0, συμπεραίνουμε τα εξής:
1. Δεξιά από τον μέσο και κάτω από την καμπύλη θα έχουμε το 50% των βαθμολογιών και αριστερά, αντίστοιχα το υπόλοιπο 50%.
2. Ουσιαστικά, το 30% εφόσον δεν πέρασε την εξέταση, ισοδυναμεί με το ότι το υπόλοιπο 70% πέρασε και ψάχνουμε την τιμή του Z στο 30% για να αντικαταστήσουμε στον τελευταίο τύπο.
3. Επειδή έχουμε συμμετρία, αυτό το σημείο είναι το ίδιο από την δεξιά πλευρά του μέσου της κατανομής στο 30% των υψηλότερων βαθμολογιών.
4. Η περιοχή κάτω απο την καμπύλη από τον μέσο μέχρι το 30% των υψηλότερων βαθμολογιων είναι το 20% (50% από τον μέσο (0) και δεξιά μείον το 30% των υψηλότερων βαθμολογιων).

Δίνεται $P(0 \leq Z \leq 0.52) = 0.2$. Λόγω συμμετρίας στο 30% των χαμηλότερων βαθμολογιων θα έχω $Z = -0.52$. Άρα αντικαθιστώ και έχω:

$$X = Z \cdot \sigma + \mu = Z \cdot 1.7 + 12 = -0.52 \cdot 1.7 + 12 = 11.116 \tag{7}$$

ζητούμενος βαθμός στο μάθημα.

Άσκηση 5.4

Ο υπεύθυνος παραγωγής ενός εργοστασίου ανταλλακτικών γνωρίζει ότι το 5% από τα ανταλλακτικά που παράγει το εργοστάσιο είναι ελαττωματικά. Έστω ότι επιλέγονται τυχαία $n = 20$ ανταλλακτικά και υποβάλλονται σε δοκιμασία για να διαπιστωθεί αν είναι ελαττωματικά. Αν γνωρίζετε ότι η παραγωγή ελαττωματικών ανταλλακτικών X του εργοστασίου ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με συνάρτηση μάζας πιθανότητας δηλαδή $X \sim B(n, p)$:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \tag{8}$$

, όπου

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \tag{9}$$

(α) Πόσα από τα 20 ανταλλακτικά αναμένετε να είναι ελαττωματικά;
(β) Ποια η πιθανότητα να μη βρεθούν ελαττωματικά ανταλλακτικά στο δείγμα;

Λύση

α. $X \sim B(n = 20, p = 0.05)$. Άρα έχω ότι η αναμενόμενη τιμή των ελαττωματικών προιόντων είναι ίση με:
$E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0.05 = 1$

β. Έχουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα:

$$P(X = 0) = \binom{20}{0} 0.05^0 (1 - 0.05)^{20-0} = \frac{20!}{0!(20-0)!} 1 \cdot (0.95)^{20} \approx 0.358485 \tag{10}$$

Άσκηση 5.5

Δύο ομάδες ποδοσφαίρου, Α και Β, πρόκειται να παίξουν μια σειρά από 5 αγώνες. Υποθέστε ότι η πιθανότητα η ομάδα Β να κερδίσει έναν οποιοδήποτε αγώνα είναι 0.4 και ότι το αποτέλεσμα ενός αγώνα δεν επηρεάζεται από τα αποτελέσματα τον προηγούμενων αγώνων.
(α) Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει η ομάδα Β και τους πέντε αγώνες;
(β) Πριν αρχίσουν οι αγώνες, ποιος είναι ο προσδοκώμενος αριθμός αγώνων τους οποίους θα κερδίσει η ομάδα Β;

Λύση

α. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που μας δείχνει τον αριθμό των αγώνων που κερδίζει η ομάδα Β. Εδώ θα έχω ότι η $X \sim B(n = 5, p = 0.4)$, και η ζητούμενη πιθανότητα δίνεται:

$$P(X = 5) = \binom{5}{5} 0.4^5 (1 - 0.4)^{5-5} = \frac{5!}{5!(5-5)!} 0.4^5 (0.6)^0 = 0.01024 \tag{11}$$

β. Ψάχνουμε την παρακάτω ποσότητα:
$E(X) = n \cdot p = 5 \cdot 0.4 = 2$

Άσκηση 5.6

[Δ. Χατζηνικολάου «Στατιστική για Οικονομολόγους» Ιωάννινα 2002]. Ο παραγωγός ενός αγαθού πιστεύει ότι η ζητούμενη ποσότητα του προιόντος του τον επόμενο μήνα είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο $\mu = 1200$ μονάδες και τυπική απόκλιση $\sigma = 100$. Ποια είναι η πιθανότητα οι πωλήσεις του να ξεπεράσουν τις 1000 μονάδες; (Δίνεται ότι $P(Z \leq 2) = 0.9772$, για $Z \sim N[0, 1]$)

Λύση

Έστω X η ζητούμενη ποσότητα του αγαθού. Έχουμε ότι $X \sim N(1200, 100^2)$. Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα $Pr(X > 1000)$, θα χρειαστεί πρώτα να τυποποιήσουμε με τον τύπο:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \tag{12}$$

, για $Z \sim N[0, 1]$.

$$Pr(X > 1000) = Pr(X - \mu > 1000 - \mu) = Pr(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{1000 - \mu}{\sigma}) =$$
$$Pr(Z > \frac{1000 - 1200}{100}) = Pr(Z > -2) = P(Z \leq 2) = 0.9772$$

λόγω συμμετρίας.

Άσκηση 5.7

Έστω ότι η κυβέρνηση σχεδιάζει ένα μακροοικονομικό πρόγραμμα και πιστεύει ότι το 25% των οικονομολόγων της χώρας θα σταθεί υπέρ του προγράμματος. Έστω X ο αριθμός των οικονομολόγων που θα υποστηρίξουν το πρόγραμμα, και ακολουθεί την διωνυμική κατανομή. Αν στην πραγματικότητα το ποσοστό αυτό ισχύει και επιλεγούν τυχαία 5 οικονομολόγοι για να σχολιάσουν το πρόγραμμα, ποιά η πιθανότητα ότι τουλάχιστον 3 από τους 5 θα υποστηρίξουν το προτεινόμενο πρόγραμμα;

Λύση

Εφόσον X ο αριθμός των οικονομολόγων που θα υποστηρίξουν το πρόγραμμα, και ακολουθεί την διωνυμική κατανομή $X \sim B(n, p)$, με $n = 5$ και $p = 0.25$ στη συγκεκριμένη περίπτωση θα έχουμε: $X \sim B(5, 0.25)$.

$Pr(X \geq 3) = Pr(X = 3) + Pr(X = 4) + Pr(X = 5)$
Για τη διωνυμική ισχύει γενικά:

$$Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n - x)!} p^x (1 - p)^{n-x} \tag{13}$$

Για $Pr(X = 3)$ έχω:

$$Pr(X = 3) = \frac{5!}{3!(5 - 3)!} 0.25^3 (1 - 0.25)^{5-3} = 0.0879 \tag{14}$$

Για $Pr(X = 4)$ έχω:

$$Pr(X = 4) = \frac{5!}{4!(5-4)!} 0.25^4 (1 - 0.25)^{5-4} = 0.0146 \tag{15}$$

Για $Pr(X = 5)$ έχω:

$$Pr(X = 5) = \frac{5!}{5!(5-5)!} 0.25^5 (1 - 0.25)^{5-5} = 0.001 \tag{16}$$

Αντικαθιστώ και έχω: $Pr(X \geq 3) = Pr(X = 3) + Pr(X = 4) + Pr(X = 5) = 0.1035$