ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS AND BUSINESS

Σχολή Οικονομικών Επιστημών - Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης
Στατιστική Ι - Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019
Διδάσκων: Α. Λουκά *email: loukaalex@aueb.gr*
Βοηθός: Δ. Σαρρή, *email: sarridan@aueb.gr*

Άσκηση 4.1

Η σύναρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ομοιόμορφης κατανομής είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \gamma\iota\alpha \;\; x \;\alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases} \tag{1}$$

Να αποδείξετε ότι για την ομοιόμορφη κατανομή ισχύουν οι σχέσεις:
α. $E(X) = \frac{a+b}{2}$

β. $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Λύση

α.

$$E(X) = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a}[\frac{x^2}{2}]_a^b =$$
$$= \frac{1}{b-a}(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}) = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

β. Έχουμε ότι:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Υπολογίζουμε το πρώτο μέρος $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \int_a^b x^2f(x)dx = \int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx = \frac{1}{b-a}[\frac{x^3}{3}]_a^b =$$
$$= \frac{1}{b-a}(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}) = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

Αντικαθιστώ και έχω:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} =$$
$$= \frac{4a^2+4ab+4b^2}{12} - \frac{3a^2+6ab+3b^2}{12} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Άσκηση 4.2

Για τη διμεταβλητή συνάρτηση $f(x,y)=15x^2y$, με $0<x<y$ και $0<y<1$:
α. να αποδείξετε ότι αποτελεί συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,
β. να βρείτε την οριακή κατανομή $f_X(x)$ και
γ. να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X>0.7)$.

Λύση

α. Εφόσον $x,y>0$, ισχύει ότι $f(x,y)\geq 0$. Όμως πρέπει να ισχύει και το παρακάτω:

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^y f(x,y)dxdy=1 \Longleftrightarrow \int_0^1\int_0^y 15x^2ydxdy=1 \Longleftrightarrow\\ 15\int_0^1 y\int_0^y x^2dxdy=1 \Longleftrightarrow 15\int_0^1 y[\frac{x^3}{3}]_0^y=1 \Longleftrightarrow\\ 15\int_0^y y\frac{y^3}{3}dy=1 \Longleftrightarrow 5\int_0^1 y^4=1 \Longleftrightarrow\\ 5[\frac{y^5}{5}]_0^1=1 \Longleftrightarrow 1=1\end{aligned}$$

Που ισχύει, άρα η $f(x,y)$ αποτελεί συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας εφόσον ικανοποιούνται και οι δύο περιορισμοί.
β. Εφόσον η $f(x,y)$ αποτελεί συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, θα ολοκληρώσω την από κοινού συνάρτηση ως προς την μεταβλητή που δεν χρειάζομαι, δηλαδή ως προς y.
Γενικά έχω:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy \tag{2}$$

Στη συγκεκριμένη διμεταβλητή συνάρτηση, έχω ότι το $0<y<1$ καθώς επίσης $y>x$. Για να έχω τη μορφή της $f(x,y)=15x^2y$, θα πρέπει να ισχύουν και οι 2 ανισότητες, άρα το $x<y<1$.

$$\begin{aligned}f_X(x)=\int_x^1 f(x,y)dy=\int_x^1 15x^2ydy=15x^2\int_x^1 ydy=15x^2[\frac{y^2}{2}]_x^1=\\ =15x^2(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2})=\frac{15}{2}x^2(1-x^2)\end{aligned} \tag{3}$$

με $0<x<y<1$.

γ. Έχω ότι $0<x<1$ για να ισχύει η οριακή συνάρτηση της X, άρα θα έχω:

$$\begin{aligned}P(X>0.7)=\int_{0.7}^1 f_X(x)dx=\int_{0.7}^1\frac{15}{2}x^2(1-x^2)dx=\frac{15}{2}\int_{0.7}^1 x^2-x^4dx=\frac{15}{2}[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}]0.7^1=\\ =\frac{15}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{0.7^3}{3}+\frac{0.7^5}{5})\approx 0.394\end{aligned} \tag{4}$$

Άσκηση 4.3

[Ε.Γ. Τσιώνας «Στατιστική με Εφαρμογές στα Οικονομικά» Αθήνα 2009]. Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή, ποια είναι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $Y=aX+b$, όπου a και b είναι σταθερές. Πως γενικεύεται αυτό για αυθαίρετη τυχαία μεταβλητή X;

Λύση

Επειδή δίνεται ότι η X ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή, έχουμε:

$$X \sim N[\mu, \sigma^2] = N[0, 1] \tag{5}$$

Μας ενδιαφέρει ποια κατανομή ακολουθεί η Y:

$$Y = aX + b \tag{6}$$

όπου a, b σταθερές. Επίσης γνωρίζουμε ότι, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X είναι:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$
$$P(X < k) = \int_{-\infty}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

για Y αντίστοιχα έχω:

$$P(aX + b < k) = P(X < \frac{k-b}{a}) =$$
$$\int_{-\infty}^{\frac{k-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

Τότε, για την αλλαγή μεταβλητής έχω: $y = ax + b \iff \frac{dy}{dx} = a \iff dy = adx \iff dx = \frac{1}{a}dy$

$$\int_{-\infty}^{\frac{k-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \int_{-\infty}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\frac{y-b}{a})^2}{2}\right) \frac{1}{a} dy =$$
$$\int_{-\infty}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} \exp\left(-\frac{\frac{(y-b)^2}{a^2}}{2}\right) dy =$$
$$\int_{-\infty}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} \exp\left(-\frac{(y-b)^2}{2a^2}\right) dy$$

Άρα, $Y \sim N[b, a^2]$.

Γενικά, ισχύει ότι για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$, αν υποθέσουμε ότι παίρνουμε έναν γραμμικό μετασχηματισμό της X, $Y = aX + b$. Τότε για να βρούμε την κατανομή του γραμμικού μετασχηματισμού, θα εφαρμόσουμε το θεώρημα της αλλαγής μεταβλητής και θα έχουμε:

$$g(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right), a, b \in R \tag{7}$$

Άσκηση 4.4

Έστω ότι για τις τυχαίες μεταβλητές X και Υ είναι γνωστό ότι $E(X) = 2, E(Y) = 6, Var(X) = 1, Var(Y) = 3, Cov(X, Y) = 1$. Αν $Z = 5X - 2Y$ να υπολογίσετε τις ποσότητες: $E(Z)$ και $Var(Z)$.

Λύση

$E(Z) = E(5X - 2Y) = E(5X) - E(2Y) = 5E(X) - 2E(Y) = 5 \cdot 2 - 2 \cdot 6 = -2$

$Var(Z) = Var(5X - 2Y) = Var(5X) + Var(2Y) + 2Cov(5X, -2Y) = 5^2 Var(X) + 2^2 Var(Y) + 2 \cdot 5 \cdot (-2) Cov(X, Y) = 25 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 20 \cdot 1 = 37 - 20 = 17.$

Άσκηση 4.5

[Ε.Γ. Τσιώνας «Στατιστική με Εφαρμογές στα Οικονομικά» Αθήνα 2009]. Έστω η διμεταβλητή συνάρτηση μάζας πιθανότητας $f(x,y) = \frac{3x+y}{7}$, με $0 < x < 2$ και $0 < y < 1$. Να βρείτε την οριακή κατανομή της X, την υπό συνθήκη κατανομή της Y όταν $X = x$, τη μέση τιμή $E(Y|X = x)$ και τη διακύμανση $Var(Y|X = x)$.

Λύση

Για την οριακή κατανομή της X έχω:

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{3x+y}{7} dy = \frac{1}{7}\int_0^1 3x + ydy = \frac{1}{7}[3xy + \frac{y^2}{2}]_0^1 = \frac{1}{7}(3x + \frac{1}{2}) = \frac{6x+1}{14}$$

για $0 < x < 2$.
Για την υπό συνθήκη κατανομή της Y όταν $X = x$ ισχύει ο τύπος:

$$f(Y|X = x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{3x+y}{7}}{\frac{6x+1}{14}} = \frac{6x+2y}{6x+1}$$

Για να υπολογίσουμε τη ζητούμενη μέση τιμή ισχύει ο τύπος:

$$E(Y|X = x) = \int_0^1 yf(Y|X = x)dy = \int_0^1 y\frac{6x+2y}{6x+1}dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{6xy}{6x+1}dy + \int_0^1 \frac{2y^2}{6x+1}dy = \frac{6x}{6x+1}\int_0^1 ydy + \frac{2}{6x+1}\int_0^1 y^2dy =$$

$$= \frac{6x}{6x+1}[\frac{y^2}{2}]_0^1 + \frac{2}{6x+1}[\frac{y^3}{3}]_0^1 = \frac{2}{6x+1}(\frac{3x}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{2}{6x+1}\frac{9x+2}{6} = \frac{9x+2}{3(6x+1)}$$

Για να υπολογίσουμε τη ζητούμενη διακύμανση έχουμε τον τύπο:

$$Var(Y|X = x) = E(Y^2|X = x) - (E(Y|X = x))^2$$

Για το πρώτο μέρος έχω:

$$E(Y^2|X = x) = \int_0^1 y^2 f(Y|X = x)dy = \int_0^1 y^2\frac{6x+2y}{6x+1}dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{6xy^2}{6x+1}dy + \int_0^1 \frac{2y^3}{6x+1}dy = \frac{6x}{6x+1}\int_0^1 y^2dy + \frac{2}{6x+1}\int_0^1 y^3dy =$$

$$= \frac{6x}{6x+1}[\frac{y^3}{3}]_0^1 + \frac{2}{6x+1}[\frac{y^4}{4}]_0^1 = \frac{2}{6x+1}(\frac{3x}{3} + \frac{1}{4}) = \frac{2}{6x+1}\frac{4x+1}{4} = \frac{4x+1}{2(6x+1)}$$

Άρα θα έχω:

$$Var(Y|X = x) = E(Y^2|X = x) - (E(Y|X = x))^2 = \frac{4x+1}{2(6x+1)} - (\frac{9x+2}{3(6x+1)})^2 =$$

$$= \frac{9(6x+1)(4x+1) - 2(9x+2)^2}{9(6x+1)^2} =$$

$$= \frac{216x^2 + +90x + 9 - 162x^2 - 8 - 72x}{9(6x+1)^2} = ...(+-18x^2)... =$$

$$= \frac{54x^2 + 18x + 1 - 18x^2 + 18x^2}{9(6x+1)^2} = \frac{36x^2 + 18x + 1 + 18x^2}{9(6x+1)^2} =$$

$$= \frac{(6x+1)^2 + 18x^2}{9(6x+1)^2} = \frac{6x+1}{9} + \frac{2x^2}{(6x+1)^2}$$

Άσκηση 4.6

Σε ένα υποτιθέμενο δελτίο του ΛΟΤΤΟ θα βρείτε 49 αριθμούς (από το 1 ως το 49), όπου ο παίκτης πρέπει να προβλέψει 6 αριθμούς. Μεγάλος κερδισμένος του ΛΟΤΤΟ είναι αυτός που θα καταφέρει να προβλέψει και τους 6 αριθμούς της κλήρωσης. Το ποσό που εισπράττει ο νικητής είναι 1,000,000 Ευρώ. Για να συμμετάσχει στο παιχνίδι χρειάζεται 0.50 Ευρώ. Ποια είναι το αναμενόμενο κέρδος ενός παίκτη που θα συμμετάσχει σε μία κλήρωση;

Λύση

Η πιθανότητα να κερδίσει κάποιος το δελτίο βρίσκοντας σωστά του 6 αριθμούς είναι 1 προς όλα τα πιθανά αποτελέσματα. Η διαδικασία για να βρεθεί αυτή η πιθανότητα είναι η εξής:
Για το πρώτο νούμερο που βγαίνει έχουμε 6 ευνοικές περιπτώσεις απο τα 49 δυνατά αποτελέσματα άρα $\frac{6}{49}$. Για το δεύτερο νούμερο αφού έχουμε βρει το πρώτο, έχουμε 5 ευνοικές περιπτώσεις απο τα 48 πλέον δυνατά αποτελέσματα αφού το πρώτο έχει ήδη βγει από την κληρωτίδα και δεν επανατοποθετείται. Άρα 5/48 και ομοίως για τα υπόλοιπα 4 νούμερα.
Η πιθανότητα δηλαδή είναι:

$$\frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{3}{46}\cdot\frac{3}{45}\cdot\frac{2}{44}\cdot\frac{1}{43}=\frac{720}{10,068,347,520}=\frac{1}{13,983,816}=0.000000071511 \qquad (8)$$

Δηλαδή η πιθανότητα να κερδίσει κάποιος είναι 1 στα 13,983,816.

Το αναμενόμενο κέρδος είναι:
$E=\frac{1,000,000}{13,983,816}\approx 0.071511\approx 7$ λεπτά του Ευρώ.

Άσκηση 4.7

[Ε.Γ. Τσιώνας «Στατιστική με Εφαρμογές στα Οικονομικά» Αθήνα 2009]. Να προσδιορίσετε τη σταθερά c ώστε η συνάρτηση $f(x)=c\exp(-\theta x), x\geq 0$ να είναι συνάρτηση πυκνότητας και να προσδιορίσετε τη σταθερά θ ώστε ο μέσος της κατανομής να είναι $\frac{2}{5}$.

Λύση

Για να είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα πρέπει να ισχύει:

$$\int_0^\infty c\exp(-\theta x)dx=1\Longleftrightarrow c\int_0^\infty \exp(-\theta x)dx=1\Longleftrightarrow$$
$$[-\frac{c}{\theta}\exp(-\theta x)]_0^\infty=1\Longleftrightarrow 0+\frac{c}{\theta}=1\Longleftrightarrow c=\theta$$

Επίσης δίνεται ότι: $E(X)=2/5$

$$\int_0^\infty xc\exp(-\theta x)dx=2/5\Longleftrightarrow c\int_0^\infty x\exp(-\theta x)dx=2/5\Longleftrightarrow$$
$$c\int_0^\infty x[-\frac{1}{\theta}\exp(-\theta x)]'dx=2/5\Longleftrightarrow$$
$$[\frac{-c}{\theta}x\exp(-\theta x)]_0^\infty-c\int_0^\infty -[\frac{1}{\theta}\exp(-\theta x)dx=2/5\Longleftrightarrow$$
$$[\frac{-c}{\theta}x\exp(-\theta x)]_0^\infty-[\frac{c}{\theta^2}\exp(-\theta x)]_0^\infty=2/5\Longleftrightarrow\frac{c}{\theta^2}=2/5\Longleftrightarrow\frac{1}{\theta}=2/5\Longleftrightarrow\theta=c=5/2$$

Άσκηση 4.8

[Ε.Γ. Τσιώνας «Στατιστική με Εφαρμογές στα Οικονομικά» Αθήνα 2009]. Αν Z ακολουθεί κανονική κατανομή $N[0,1]$ και $X=\sigma Z+\mu$ να δείξετε ότι η X ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο μ και διακύμανση σ^2.

Λύση

Επειδή δίνεται ότι η Z ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή, έχουμε:

$$Z \sim N[0,1] \tag{9}$$

Θα υπολογίσουμε πρώτα τον μέσο και τη διακύμανση της X:

$$X=\sigma Z+\mu \tag{10}$$

$E(X)=E(\sigma Z+\mu)=E(\sigma Z)+E(\mu)=\sigma E(Z)+\mu=\mu$

$Var(X)=Var(\sigma Z+\mu)=\sigma^2 Var(Z)+0=\sigma^2$

Τώρα πρέπει να αποδείξουμε ότι η X ακολουθεί την κανονική κατανομή: Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Z είναι:

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(z-0)^2}{2\cdot 1}\right)$$
$$P(Z<z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$$

για X αντίστοιχα έχω:

$$P(X\leq x)=P(\sigma Z+\mu<x)=P\left(Z<\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=$$
$$\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$$

Τότε, για την αλλαγή μεταβλητής έχω: $x=\sigma z+\mu \iff \frac{dx}{dz}=\sigma \iff dz=\frac{1}{\sigma}dx$

$$\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}{2}\right)\frac{1}{\sigma}dx=$$
$$\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}{2}\right)dx=$$
$$\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

Άρα, $X\sim N[\mu,\sigma^2]$.