Σχολή Οικονομικών Επιστημών - Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης
Στατιστική Ι - Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019
Διδάσκων: Α. Λουκά *email: loukaalex@aueb.gr*
Βοηθός: Δ. Σαρρή, *email: sarridan@aueb.gr*

Άσκηση 3.1

Έστω ότι η διακριτή (ασυνεχής) τυχαία μεταβλητή X έχει την ακόλουθη συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας: $f(x) = cx$ για $x = 1, 2, 3, 4, 5$ και $f(x) = 0$ για τις άλλες τιμές της X. Ποια είναι η τιμή της σταθεράς c ;

Άσκηση 3.2

[Ε.Γ. Τσιώνας «Στατιστική με Εφαρμογές στα Οικονομικά» Αθήνα 2009] Αν $f(x) = \frac{2(\beta-x)}{\alpha\beta}$, όπου $\beta > x > 0$ είναι συνάρτηση πυκνότητας, να δείξετε ότι $\alpha = \beta$.

Άσκηση 3.3

[Ε.Γ. Τσιώνας «Στατιστική με Εφαρμογές στα Οικονομικά» Αθήνα 2009]. Μια τυχαία μεταβλητή έχει συνάρτηση πυκνότητας την $f(x) = \frac{C}{x}$ με $1 \leq x \leq 2$. Να προσδιορίσετε τη σταθερά C.

Άσκηση 3.4

Έστω ότι η συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει την ακόλουθη συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας:
$f(x) = cx$ για $0 < x < 2$ και $f(x) = 0$ για οποιεσδήποτε άλλες τιμές.
(α) Να προσδιορίσετε τη τιμή της σταθεράς c.
(β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(0,5 < X < 1,5), P(X > 1)$ και $P(X = 1)$.
(γ) Να δοθεί η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής της X.
(δ) Να υπολογίσετε το μέσο και τη διακύμανση της X.

Άσκηση 3.5

[Δ. Χατζηνικολάου «Στατιστική για Οικονομολόγους» Ιωάννινα 2002]. Έστω ότι το κέρδος (X) που αποκομίζει ένας εργολάβος οικοδομών από την κατασκευή μίας οικοδομής είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{18}, & -1 < x < 5 \\ 0, & \gamma\iota\alpha\ x\ \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases} \tag{1}$$

όπου οι μονάδες μέτρησης είναι σε εκατομμύρια ευρώ και οι αρνητικοί αριθμοί υποδηλώνουν ζημιές.
(α) Να δείξετε ότι η παραπάνω συνάρτηση αποτελεί συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.
(β) Πόσο είναι το αναμενόμενο κέρδος από μία συγκεκριμένη οικοδομή;

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα ο εργολάβος να αποκομίσει ζημία από 0 μέχρι και 1 εκατομμύριο ευρώ από μία συγκεκριμένη οικοδομή;

Άσκηση 3.6

Ένας εργολάβος γνωρίζει ότι η διεκπεραίωση ενός Δημόσιου Έργου θα του στοιχίσει 10 εκατ. ευρώ. Στη δημοπρασία για την ανάθεση του έργου αυτού θα επιλεγεί αυτός που θα κάνει τη μικρότερη προσφορά (μειοδοτικός διαγωνισμός). Ο εργολάβος πιστεύει ότι οι άλλοι εργολάβοι της αγοράς (οι ανταγωνιστές του) θα ζητήσουν τουλάχιστον X εκατ. ευρώ για να διεκπεραιώσουν το έργο και ότι η X είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα από 8 μέχρι 20 εκατ. ευρώ:

$$f(x) = \begin{cases} 1/12, & 8 < x < 20 \\ 0, & \gamma\iota\alpha\ x\ \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases} \tag{2}$$

(α) Αν ο εργολάβος μας προσφερθεί να εκτελέσει το έργο έναντι 12 εκατ. ευρώ τι πιθανότητα έχει να κερδίσει τον διαγωνισμό; (για να κερδίσει πρέπει αυτός να έχει κάνει τη μικρότερη προσφορά έναντι των ανταγωνιστών του).
(β) Έστω ότι ο εργολάβος κάνει την προσφορά των 12 εκατ. ευρώ για το έργο. Ποιο είναι το αναμενόμενο κέρδος από αυτή του την απόφαση;

Άσκηση 3.7

[Ε.Γ. Τσιώνας «Στατιστική με Εφαρμογές στα Οικονομικά» Αθήνα 2009]. Αν X είναι μια τυχαία μεταβλητή με μέσο μ και διακύμανση σ^2 , να βρείτε την τιμή c που ελαχιστοποιεί το $E[(X-c)^2]$.

Άσκηση 3.8

Σε έρευνα του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών σχετικά με το εργατικό δυναμικό της χώρας και τα ποσοστά ανεργίας, ανάλογα με το επίπεδο μόρφωσης του κάθε ατόμου, συλλέξαμε τα στοιχεία που συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα της από κοινού κατανομής των τυχαίων μεταβλητών X, Y.

Όπου η τυχαία μεταβλητή Y αντιστοιχεί στο επίπεδο εκπαίδευσης ενός ατόμου και μπορεί να πάρει τις τιμές $Y = 0$ αν το άτομο είναι Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, $Y = 1$ αν το άτομο έχει λάβει Δευτεροβάθμια εκπαίδευση και $Y = 2$, αντίστοιχα για Τριτοβάθμια. Η τυχαία μεταβλητή X αναπαριστά για το άτομο αυτό ειναι άνεργο ($X = 0$) ή όχι ($X = 1$).

$Y\|X$	$X=0$	$X=1$	
	άνεργος	όχι άνεργος	Άθροισμα
1ο βάθμια Εκπαίδευση $Y=0$	0.03	0.22	
2ο βάθμια Εκπαίδευση $Y=1$	0.072	0.328	
3ο βάθμια Εκπαίδευση $Y=2$	0.028	0.322	
Άθροισμα			

(α) Με βάση τον πίνακα που δίνεται, να βρεθούν οι οριακές συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$.
(β) Να βρεθεί η υπό συνθήκη πιθανότητα P('1ο βάθμια'|' Άνεργος').

Άσκηση 3.9

Έστω ότι η από κοινού συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας δύο ασυνεχών τυχαίων μεταβλητών X και Y είναι:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x+y}{42}, & x = 0,1,2 \ = 0,1,2,3 \\ 0, & \gamma\iota\alpha \ \ x,y \ \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases} \tag{3}$$

(α) Να δοθεί ο πίνακας της από κοινού κατανομής των X και Y.
(β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(X = 2, Y = 1), P(X \geq 1, Y \leq 2)$.
(γ) Να υπολογίσετε τις (περιθωριακές) συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ και να τις απεικονίσετε στον πίνακα του ερωτήματος (α).
(δ) Να υπολογίσετε τις ποσότητες: $E(X), E(Y), E(X^2), E(Y^2), Var(X), Var(Y), E(XY), Cov(X,Y), \rho$.
(ε) Να ελέγξετε αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι στατιστικά ανεξάρτητες.
(στ) Να δοθεί η συνάρτηση $f(y|x = 2)$.
(ζ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα: $P(Y = 1|X = 2)$.
(η) Να υπολογιστούν οι ποσότητες: $E(Y|X = 2)$ και $Var(Y|X = 2)$.

Άσκηση 3.10

Έστω ότι έχουμε την από κοινού συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας δύο συνεχών τυχαίων μεταβλητών:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x+y}{210}, & 2 < x < 6 \ \ 0 < y < 5 \\ 0, & \gamma\iota\alpha \ \ x,y \ \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases} \tag{4}$$

(α) Να επιβεβαιώσετε ότι η συνάρτηση αυτή είναι πράγματι μία από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.
(β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X > 3, Y < 2)$
(γ) Να υπολογίσετε τις (περιθωριακές) συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$
(δ) Είναι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y στατιστικά ανεξάρτητες;
(ε) Να υπολογίσετε τις ποσότητες $E(X), E(Y), E(XY)$;
(στ) Να υπολογίσετε την υπό συνθήκη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x|y)$ και την υπο συνθήκη μέση τιμή $E(X|Y = y)$.