ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS AND BUSINESS

Σχολή Οικονομικών Επιστημών - Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης
Στατιστική Ι - Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019
Διδάσκων: Α. Λουκά *email: loukaalex@aueb.gr*
Βοηθός: Δ. Σαρρή, *email: sarridan@aueb.gr*

Άσκηση 2.1

(Δ. Χατζηνικολάου «Στατιστική για Οικονομολόγους» Ιωάννινα 2002). Ένας χρηματοοικονομολόγος κατατάσσει έξι μετοχές, κατά σειρά, με κριτήριο την προβλεπόμενη αύξηση της απόδοσής τους τον επόμενο μήνα. Αν κάνει την κατάταξη αυτή με τρόπο τυχαίο, ποια είναι η πιθανότητα να αποδειχθεί σωστή αυτή η κατάταξη;

Λύση

Εφόσον η κατάταξη γίνεται με τυχαίο τρόπο, πρόκειται ουσιαστικά για μεταθέσεις. Οι μεταθέσεις είναι ουσιαστικά διατάξεις n αντικειμένων σε n θέσεις.
Πρέπει να υπολογίσουμε τον αριθμό των τρόπων που μπορούν να τοποθετηθούν οι 6 μετοχές στις έξι διαφορετικές θέσεις του χαρτοφυλακίου χωρίς επανατοποθέτηση και χώρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά.
Μεταθέσεις: $n! = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

Για να υπολογισθεί η πιθανότητα η τυχαία διάταξη να είναι η σωστή κατάταξη είναι:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{720} \tag{1}$$

Λόγω του ότι τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, διαιρούμε με το πλήθος των ενδεχομένων δηλ. με τον δειγματικό χώρο.

Άσκηση 2.2

Ένας χρηματιστής υποστηρίζει ότι από μία λίστα έξι μετοχών μπορεί να προβλέψει ποιες τρεις μετοχές καθώς και με ποια σειρά θα αποφέρουν τα μεγαλύτερα κέρδη. Αν όμως στην πραγματικότητα κάνει την επιλογή των τριών μετοχών κατά τρόπο τυχαίο, ποια είναι η πιθανότητα να είναι σωστή η επιλογή αυτή;

Λύση

Σε αυτήν την περίπτωση, επειδή μας ενδιαφέρει η σειρά, πρόκειται για διατάξεις δηλαδή, από ενα σύνολο έξι διαφορετικών αντικειμένων ($n = 6$) πρέπει να καλυφθούν οι τρεις θέσεις ($r = 3$). Διάταξη 6 σε 3 δηλ:

$$\frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 \tag{2}$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{120} \tag{3}$$

Άσκηση 2.3

(Δ. Χατζηνικολάου «Στατιστική για Οικονομολόγους» Ιωάννινα 2002). Μία ομάδα φοιτητών έχει έξι μέλη. Αν από την ομάδα αυτή θέλουμε να επιλέξουμε με τυχαίο τρόπο μία τριμελή επιτροπή, πόσοι τρόποι υπάρχουν συνολικά και ποια είναι η πιθανότητα να προκύωει κάποιος συγκεκριμένος συνδυασμός;

Λύση

Εδώ δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των ατόμων στην τριμελή υποεπιτροπή, δηλαδή έχουμε συνδυασμούς. Για $n = 6$ και $r = 3$ έχουμε συνδυασμό 6 σε 3.

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{4}$$

$$\frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3! * 3!} = \frac{3! * 4 * 5 * 6}{3! * 3!} = \frac{4 * 5 * 6}{3!} = \frac{120}{6} = 20 \tag{5}$$

Υπάρχουν δηλαδή 20 διαφορετικοί τρόποι να συσταθεί η τριμελής επιτροπή. Η πιθανότητα να προκύψει ένας συγκεκριμένος συνδυασμός είναι:

Έστω το ενδεχόμενο αυτού του συνδυασμού είναι το Α: $P(A) = 1/20$.

Άσκηση 2.4

(α) Πόσους πενταψήφιους αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε από τα νούμερα 4,5,7,9; (β) Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε από τα νούμερα 4,5,7,9; (γ) Πόσους πενταψήφιους αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε από τα νούμερα 0,5,7,9; (δ) Πόσους πενταψήφιους αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε από τα νούμερα 4,5,7,9 αν έχουμε περιορισμό ότι ο αριθμός 4 θα εμφανίζεται το πολύ 1 φορά;

Λύση

(α) Ο σχηματισμός του πενταψηφίου αριθμού γίνεται σε πέντε φάσεις. Στην 1η διαλέγουμε το πρώτο ψηφίο του, στη 2η το δεύτερο κοκ. Οι πέντε φάσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους γιατί επιτρέπει να επαναληθούν τα νούμερα για την κατασκευή του 5ψήφιου. Στην 1η φάση μπορώ να επιλέξω για πρώτο στοιχείο 4 νούμερα, στην 2η φάση πάλι 4 ψηφία κοκ. Γενικά για την δημιουργία αριθμού με k ψηφία τα οποία επιλέγονται από πλήθος n διαφορετικών ψηφίων θα έχουμε,

$$n \cdot n \cdot ...n = n^k = 4^5 = 1024 \tag{6}$$

διαφορετικοί τρόποι.

(β) Θεωρούμε ότι ο σχηματισμός του τριψηφίου αριθμού γίνεται σε τρεις φάσεις. Στην 1η διαλέγουμε το πρώτο ψηφίο του, στη 2η το δεύτερο και στην 3η το τρίτο. Οι τρεις φάσεις είναι ανεξάρτητες, αφού το ψηφίο που διαλέγουμε σε κάθε φάση δεν δίνει κανέναν περιορισμό για τα ψηφία που θα διαλέξουμε στις επόμενες. Άρα το σύνολο των τρόπων για την κατασκευή του τριψήφιου αριθμού είναι:

$$n \cdot n \cdot ...n = n^k = 4^3 = 64 \tag{7}$$

(γ) Ο σχηματισμός του πενταψηφίου αριθμού γίνεται και πάλι σε πέντε φάσεις. Στην 1η διαλέγουμε το πρώτο ψηφίο του, στη 2η το δεύτερο κοκ. Η διαφορά με το (α) ερώτημα είναι ότι λόγω του αριθμού 0, είναι λογικό να μην μπορεί να επιλεχθεί κατα την περίοδο της πρώτης φάση, για τον λόγο ότι δεν θα έχουμε ποτέ 5ψήφιο αριθμό αν είναι το 0 στην πρώτη θέση. Άρα θα έχω ως σύνολο 5-ψηφίων:

Τη διαφορά του συνόλου των επιλογών από 4 αντικείμενα με το σύνολο των 4ψήφιων αριθμών που προκύπτουν όταν δηλαδή το 0 βρίσκεται στην πρώτη θέση. Δηλαδή:

$$n^k - n^{k-1} = 4^5 - 4^4 = 1024 - 256 = 768 \tag{8}$$

πενταψήφιοι.

(δ) Για να βρω τον αριθμό των πενταψήφιψν που για αρχή έχουν σίγουρα τον αριθμό 4 μία φορα ακριβώς διακρίνω τις ακόλουθες περιπτώσεις:
α. Να είναι το 4 το πρώτο ψηφίο.
β. Να είναι το 4 το δεύτερο ψηφίο.
γ. Να είναι το 4 το τρίτο ψηφίο.
δ. Να είναι το 4 το τέταρτο ψηφίο.
ε. Να είναι το 4 το πέμπτο ψηφίο.

Για τις προηγούμενες περιπτώσεις θα έχω:

Περιπτώσεις	1ο ψηφίο	2ο ψηφίο	3ο ψηφίο	4ο ψηφίο	5ο ψηφίο	Σύνολο Επιλογών
α	1	3	3	3	3	3^4
β	3	1	3	3	3	3^4
γ	3	3	1	3	3	3^4
δ	3	3	3	1	3	3^4
ϵ	3	3	3	3	1	3^4
	Σύνολο					$5 \cdot 3^4 = 405$

Ενώ το σύνολο των 5-ψηφίων όπου το 4 δεν θα χρησιμοποιηθεί καθόλου είναι για $n = 3$ πλέον: $n^k = 3^5 = 243$.
Άρα, το ζητούμενο σύνολο δίνεται από το άθροισμα: $405 + 243 = 648$.

Άσκηση 2.5

Αν για δύο ενδεχόμενα Α και Β ισχύει ότι $P(A) = 1/3$, $P(B) = 3/4$, και $P(A|B) = 2/9$, να υπολογίσετε τις εξής πιθανότητες: (α)$P(A \cap B)$ (β) $P(A \cup B)$, (γ) $P(B|A)$, (δ) Είναι τα ενδεχόμενα Α, Β ανεξάρτητα;

Λύση

(α) Γνωρίζουμε ότι:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{9}$$

Άρα,

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{6} \tag{10}$$

(β)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{11}{12} \tag{11}$$

(γ)

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \tag{12}$$

(δ) Έχω για την ανεξαρτησία ότι $P(A|B) = P(A)$, που από την εκφώνηση δίνεται ότι $P(A) = 1/3$ και $P(A|B) = 2/9$. Συνεπώς δεν είναι ανεξάρτητα. Γενικά έχω ότι 2 ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα όταν:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$P(A|B) = P(A), P(B) > 0$$
$$P(B|A) = P(B), P(A) > 0$$

Άσκηση 2.6

Αν για δύο ενδεχόμενα A και B ισχύει ότι $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(A') = \frac{1}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, να υπολογίσετε τις πιθανότητες: (α) P(A), (β) P(B), (γ) $P(A \cap B')$, (δ) Είναι τα ενδεχόμενα A και B ανεξάρτητα;

Λύση

(α) $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(β) Έχουμε ότι ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \iff P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \tag{13}$$

(γ)

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \tag{14}$$

(δ) Από ερωτήματα (α) και (β) έχω $P(A)P(B) = \frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \neq 1/4$. Συνεπώς δεν είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 2.7

Από μία γυάλα που περιέχει συνολικά 6 κόκκινες, 4 άσπρες και 5 γαλάζιες μπάλες εξάγουμε διαδοχικά τις τρεις (3). Αν κάθε μπάλα επανατοποθετείται στη γυάλα μετά την κάθε επιλογή, να υπολογίσετε την πιθανότητα οι μπάλες να εξαχθούν με τη σειρά κόκκινη-άσπρη-γαλάζια.

Λύση

Έστω $K_1 =$ το ενδεχόμενο η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη, $A_2 =$ το ενδεχόμενο η 2η μπάλα να είναι άσπρη και $\Gamma_3 =$ το ενδεχόμενο η τρίτη μπάλα να είναι γαλάζια. Αφού οι μπάλες επανατοποθετούνται τα τρία αυτά ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους (δηλ. η πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης των υπολοίπων).

Ισχύει ότι για την ανεξαρτησία 2 ενδεχομένων A, B έχουμε: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Μπρούμε να γενικεύσουμε τον τύπο αυτό και να ισχύει για περισσότερα των 2 ενδεχομένων. Δηλαδή:

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A \cap B) \cdot P(\Gamma) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) \tag{15}$$

$$P(K_1 \cap A_2 \cap \Gamma_3) = P(K_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\Gamma_3) = \frac{6}{15} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{5}{15} = \frac{8}{225} \tag{16}$$

Άσκηση 2.8

Επιλέγοντας διαδοχικά και χωρίς επανατοποθέτηση 2 χαρτιά από μία τράπουλα να υπολογίσετε την πιθανότητα και τα δύο να είναι Άσσοι. (σύνολο χαρτιών στην τράπουλα 52, 4 από κάθε σύμβολο-νούμερο.)

Λύση

Έστω $A_1 =$ το ενδεχόμενο το πρώτο φύλλο να είναι άσσος και $A_2 =$ το ενδεχόμενο το δεύτερο φύλλο να είναι επίσης άσσος.
Στην τράπουλα εμπεριέχονται 4 άσσοι. Εφόσον δεν επανατοποθετούνται, τα ενδεχόμενα δεν είναι ανεξάρτητα. Ορίζουμε την πιθανότητα να είναι και τα 2 φύλλα Άσσοι ως

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{12}{2652} = \frac{1}{221} \tag{17}$$

Άσκηση 2.9

Να δείξετε ότι αν $P(A) > P(B)$, τότε $P(A|B) > P(B|A)$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{18}$$

και επίσης,

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{19}$$

Τα κλάσματα έχουν τον ίδιο αριθμητή, συνεπώς αν για τους παρονομαστές ισχύει

$$P(A) > P(B) > 0 \Longrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} > \frac{P(A \cap B)}{P(B|A)} \Longrightarrow P(A|B) > P(B|A) \tag{20}$$

Άσκηση 2.10

Να δείξετε ότι αν A και B είναι δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα, τότε ανεξάρτητα είναι και τα ενδεχόμενα A και B'. (Υπόδειξη: Ισχύει ότι $P(A) = P(A \cap B') \cup P(A \cap B)$)

Λύση

Δύο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα αν η πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου. Γνωρίζουμε ότι,

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \tag{21}$$

από άσκηση 2.6.
Επίσης,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{22}$$

Άρα,

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A) \cdot P(B') \tag{23}$$