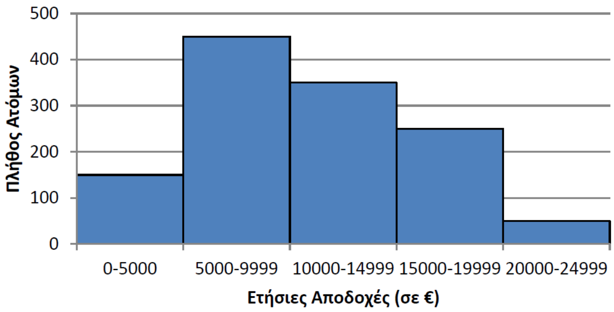
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS AND BUSINESS

Σχολή Οικονομικών Επιστημών - Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης
Στατιστική Ι - Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019
Διδάσκων: Α. Λουκά *email: loukaalex@aueb.gr*
Βοηθός: Δ. Σαρρή, *email: sarridan@aueb.gr*

Άσκηση 1.1

Ρωτήσαμε τυχαία 1.250 άτομα σχετικά με τις ετήσιες αποδοχές που δήλωσαν στην εφορία το περασμένο οικονομικό έτος και συλλέξαμε τις ακόλουθες απαντήσεις:



Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση:

i. Το χαρακτηριστικό «Ετήσιες Αποδοχές» είναι:
(α) Ποσοτικό Συνεχές (β) Ποιοτικό (γ) Ποσοτικό διακριτό (δ) Απροσδιόριστο

ii. Το παραπάνω διάγραμμα ονομάζεται:
(α) καμπύλη συχνοτήτων (β) Ιστόγραμμα (γ) Ραβδόγραμμα (δ) Ακιδωτό Διάγραμμα

iii. Αν η Αθροιστική Συχνότητα είναι ίση με 950 σε ποιο ταξικό διάστημα βρισκόμαστε
(α) 5000-9999 (β) 10000-14999 (γ) 15000-19999 (δ) 20000-24999

iv. Αν η Αθροιστική Σχετική Συχνότητα είναι 48% σε ποιο ταξικό διάστημα βρισκόμαστε
(α) 5000-9999 (β) 10000-14999 (γ) 15000-19999 (δ) 20000-24999

Λύση

Λύσεις: α, β, β, α.

Όπου, η σχετική συχνότητα ορίζεται ως:

$$f_i = \frac{\nu_i}{\nu} \tag{1}$$

Και η αθροιστική συχνότητα ορίζεται ως:

$$F_i = \frac{N_i}{\nu} \tag{2}$$

Τάξεις	f_i	F_i	p_i	F_i
0-5,000	150	150	0.12	0.12
5,000-9,999	450	600	0.36	$\boxed{0.48}$
10,000-14,999	350	$\boxed{950}$	0.28	0.76
15,000-19,999	250	1200	0.2	0.96
20,000-24,999	50	1250	0.04	1
Σύνολο	1250		1	

Άσκηση 1.2

(Ε.Γ. Τσιώνας «Στατιστική με Εφαρμογές στα Οικονομικά» Αθήνα 2009). Για τα επόμενα στοιχεία να υπολογίσετε τον αριθμητικό μέσο και τη διακύμανση.

12	6.1	5.4	9	4.2	5.5	6	7.2	1.3	2.5

Λύση

Αριθμητικός/πληθυσμιακός Μέσος:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{12+6.1+5.4+9+4.2+5.5+6+7.2+1.3+2.5}{10} = \frac{59.2}{10} = 5.92 \qquad (3)$$

Πληθυσμιακή Διακύμανση:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}{N} = \frac{(12-5.92)^2+(6.1-5.92)^2+...+(2.5-5.92)^2}{10} =$$

$$\frac{84.576}{10} = 8.4576$$

Άσκηση 1.3

(Ε.Γ. Τσιώνας «Στατιστική με Εφαρμογές στα Οικονομικά» Αθήνα 2009). Να αποδείξετε ότι:

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x}) = 0$$

Λύση

Θα πάρουμε την σχέση που δίνεται και θα καταλήξουμε σε κάτι που ισχύει.

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow (x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+...+(x_n-\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1+x_2+...+x_n-n\bar{x} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} x_i - n\bar{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{n}$$

που ισχύει και είναι ο αριθμητικός μέσος.

Άσκηση 1.4

(Ε.Γ. Τσιώνας «Στατιστική με Εφαρμογές στα Οικονομικά» Αθήνα 2009). Να αποδείξετε ότι:

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{N}x_i^2-n\bar{x}^2$$

Λύση

Παρομοίως, θα πάρουμε την σχέση που δίνεται και θα καταλήξουμε σε κάτι που ισχύει.

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{N}x_i^2-n\bar{x}^2 \Leftrightarrow$$

$$(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+...+(x_n-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{N}x_i^2-n\bar{x}^2 \Leftrightarrow$$

$$(x_1^2-2x_1\bar{x}+\bar{x}^2)+(x_2^2-2x_2\bar{x}+\bar{x}^2)+...+(x_n^2-2x_n\bar{x}+\bar{x}^2)=\sum_{i=1}^{N}x_i^2-n\bar{x}^2 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{N}x_i^2-2\bar{x}(\sum_{i=1}^{N}x_i)+n\bar{x}^2=\sum_{i=1}^{N}x_i^2-n\bar{x}^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-2\sum_{i=1}^{N}x_i}{n}=-2\bar{x} \Leftrightarrow \bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i}{n}$$

που ισχύει.

Άσκηση 1.5

(Δ. Χατζηνικολάου «Στατιστική για Οικονομολόγους» Ιωάννινα 2002). Υποθέστε ότι σας ενδιαφέρει η μεταβλητή x_i=αριθμός παιδιών μίας οικογένειας και ότι ο πληθυσμός αποτελείται από 85 οικογένειες. Αν με ν_i συμβολίζουμε τον αριθμό των οικογενειών που έχουν y_i παιδιά και έχουμε την ακόλουθη κατανομή συχνότητας:

y_i	0	1	2	3	4	5
ν_i	8	14	21	18	17	7

Να υπολογίσετε την διάμεσο των αριθμό των παιδιών του πληθυσμού (δ), τα τρία τεταρτημόρια (Q_1, Q_2, Q_3), την επικρατούσα τιμή (M_0), τον αριθμητικό μέσο ($\bar{x}$), τη διακύμανση (σ^2), την τυπική απόκλιση (σ), το συντελεστή μεταβλητότητας **(CV)**, το συντελεστή ασυμμετρίας (α_3) και το συντελεστή κύρτωσης (b_2).

Λύση

k	y_i	ν_i	N_i	$\nu_i y_i$	$y_i-\bar{x}$	$\nu_i(y_i-\bar{x})^2$	$\nu_i(y_i-\bar{x})^3$	$\nu_i(y_i-\bar{x})^4$
1	0	8	8	0	-2.505	50.2	-125.751	315.007
2	1	14	22	14	-1.505	31.73	-47.72	71.824
3	2	21	43	42	-0.505	5.35	-2.70	1.365
4	3	18	61	54	0.505	4.59	2.318	1.17
5	4	17	78	68	1.505	38.5	57.95	87.215
6	5	7	85	35	2.505	43.92	110.032	275.631
6	N	85		213		174.29	-5.8795	752.213

Διάμεσος: Το σύνολο των οικογενειών είναι N=85. Εφόσον το 85 είναι περιττός αριθμός, έχουμε: $\frac{N}{2}=\frac{85}{2}=42.5$. Η τιμή αντιστοιχεί στο $N_i=43$ άρα και η Διάμεσος είναι ίση με 2.

Τεταρτημόρια: Τα τεταρτημόρια χωρίζουν τις τιμές/παρατηρήσεις σε 4 ίσα μέρη.

1. $Q_1 : \lceil 1 \cdot 0.25 \cdot 85 \rceil$. Η τιμή 21.25, στρογγυλοποιημένη στον μεγαλύτερο ακέραιο στο 22 και αντιστοιχεί στην τιμή $y_i = 1$. Άρα και $Q_1 = 1$

2. $Q_2 = 2 =$ Διάμεσος

3. $Q_4 : \lceil 3 \cdot 0.25 \cdot 85 \rceil$. Η τιμή 63.75, στρογγυλοποιημένη στον μεγαλύτερο ακέραιο στο 64 και αντιστοιχεί στην τιμή $y_i = 4$. Άρα και $Q_3 = 4$

Επικρατούσα Τιμή: Αποτελεί την τιμή με την μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης στο δείγμα: $y_i = 2$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \nu_i y_i}{N} = \frac{213}{85} = 2.505$$
$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \nu_i (y_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{174.29}{85} = 2.04$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2.04} = 1.428$$

Όπου ο τύπος του μέσου και της διακύμανσης είανι διατυπωμένοι σε μορφή συχνοτήτων. Ουσιαστικά είναι οι ίδιοι τύποι και για τον μέσο ισχύει ότι κάθε παρατήρηση είναι πολλαπλασιασμένη με τη συχνότητα εμφάνισής της, ενώ για τη διακύμανση καθε τετραγωνική απόκλιση από τον μέσο είναι πολλαπλασιασμένη επίσης με την συχνότητα εμφάνισης της παρατήρησης.

Ο συντελεστής μεταβλητότητας έχει την ιδιότητα να παραμένει σταθερός αν αλλάξει κανείς τις μονάδες μέτρησηςκαι και μετρά την διακύμανση σε όρους του μέσου. Ορίζεται ως:

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \tag{4}$$

Όπου s, ορίσαμε την τυπική απόκλιση $\sigma = 1.428$:
Άρα,

$$CV = \frac{\sigma}{|\bar{x}|} = \frac{1.428}{2.505} = 0.57 \tag{5}$$

Τέλος, ο συντελεστής ασυμμετρίας α και κύρτωσης b, διεξάγονται από τον γενικό τύπο:

$$S_m = \frac{\sum_{t=1}^{N} (x_i - \bar{x})^m}{N}, m = 1, 2, .. \tag{6}$$

- Για $m = 1$, έχω $S_1 = 0$
- Για $m = 2$, έχω $S_2 = \sigma^2$
- Για $m = 3$, έχω S_3 την ασυμμετρία
- Για $m = 4$, έχω S_4 την κύρτωση

Για τους συντελεστές:

$$\alpha = \frac{S_3}{\sigma^3} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^3}{N}}{\sigma^2)^{3/2}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{k} \nu_i (y_i - \bar{x})^3}{N}}{(\sigma^2)^{3/2}} = \frac{\frac{-5.8795}{85}}{2.04^{3/2}} = \frac{-0.06917}{2.9137} = -0.0237$$

$$b = \frac{S_4}{\sigma^4} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{x})^4}{N}}{\sigma^4} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{k} \nu_i (y_i - \bar{x})^4}{N}}{\sigma^4} = \frac{\frac{752.213}{85}}{2.04^2} = 2.1264$$

Άσκηση 1.6

(Δ. Χατζηνικολάου «Στατιστική για Οικονομολόγους» Ιωάννινα 2002). Έστω Χ=αριθμός αυτοκινήτων που έχει στην κατοχή της μία οικογένεια και ότι τα δεδομένα που πήραμε από ένα δείγμα 100 οικογενειών δίνονται στον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων:

y_i	0	1	2
# οικογενειών	10	80	10

(α) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.
(β) Να υπολογίσετε πόσα αυτοκίνητα έχει κατά μέσο όρο στην κατοχή της μία οικογένεια.
(γ) Να υπολογίσετε τη διάμεσο και τα τρία τεταρτημόρια.
(δ) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση του δείγματος.
(ε) Να χαρακτηρίσετε την κατανομή ως προς την κύρτωσή της.

Λύση

(α)

(β)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \nu_i y_i}{N} = \frac{100}{100} = 1$$

(γ)

y_i	ν_i	N_i	$\nu_i y_i$	$\nu_i(y_i - \bar{x})$	$\nu_i(y_i - \bar{x})^2$	$\nu_i(y_i - \bar{x})^4$
0	10	10	0	-10	10	10
1	80	90	80	0	0	0
2	10	100	20	10	10	10
Σύνολο	100	-	100	-	20	20

Έχουμε ότι ο αριθμός οικογενειών είναι ίσος με 100: Άρα 100/2=50, (50+51)/2=50.5. Διάμεσος είναι ίση με 1.
Τεταρτημόρια: Τα τεταρτημόρια είναι 4 ίσα μέρη που χωρίζουν τις τιμές/παρατηρήσεις.

1. $Q_1 : \lceil 1 \cdot 0.25 \cdot 100 \rceil$. Η τιμή αντιστοιχεί το νουμερο 25 είναι η τιμή $y_i = 1$
2. $Q_2 : \lceil 2 \cdot 0.25 \cdot 100 \rceil$. Η τιμή αντιστοιχεί το νουμερο 50 είναι η τιμή $y_i = 1$
3. $Q_1 : \lceil 3 \cdot 0.25 \cdot 100 \rceil$. Η τιμή αντιστοιχεί το νουμερο 75 είναι η τιμή $y_i = 1$

(δ)

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} \nu_i (y_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{20}{100}} = 0.447 \tag{7}$$

(ε)

$$S_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^m}{N}, m = 1, 2, .. \tag{8}$$

- Για $m = 1$, έχω $S_1 = 0$

- Για $m = 2$, έχω $S_2 = s^2$
- Για $m = 4$, έχω S_4 την κύρτωση

$$b = \frac{S_4}{\sigma^4} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^4}{N}}{\sigma^4} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{k}\nu_i(y_i-\bar{x})^4}{N}}{\sigma^4} = \frac{\frac{20}{100}}{0.447^4} = 5 \tag{9}$$

Επειδή για κανονικές κατανομές, έχουμε $b = 3$, συνηθίζεται να μετράμε την κυρτότητα με τη διαφορά $b - 3$, η οποία για λεπτόκυρτες κατανομές παίρνουμε θετικές τιμές(θετική κύρτωση) ενώ για πλατύκυρτες κατανομές η διαφορά γίνεται αρνητική.Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχω $5 - 3 = 2 > 0$ άρα χαρακτηρίζουμε την κατανομή λεπτόκυρτη.

Άσκηση 1.7

(Ε.Γ. Τσιώνας «Στατιστική με Εφαρμογές στα Οικονομικά» Αθήνα 2009).
Να αναλύσετε αν έχει νόημα να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \alpha)^2$ ως προς α για να προσδιορίσουμε ένα αντιπροσωπευτικό μέτρο θέσης.

Λύση

Έστω ορίζουμε τη συνάρτηση:
$f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \alpha)^2 = (x_1 - \alpha)^2 + (x_2 - \alpha)^2 + ... + (x_n - \alpha)^2 =$
$(x_1^2 - 2x_1\alpha + \alpha^2) + (x_2^2 - 2x_2\alpha + \alpha^2) + ... + (x_n^2 - 2x_n\alpha + \alpha^2)$

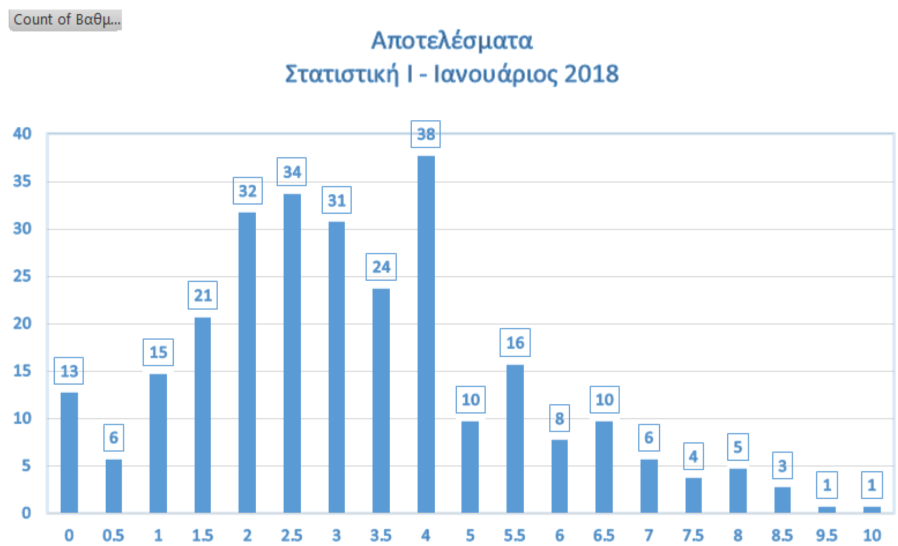
Για να βρούμε το ακρότατο:

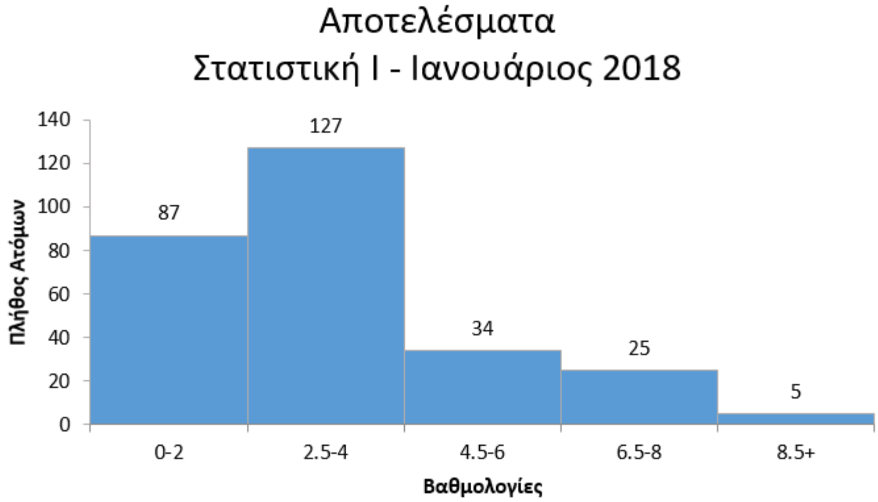
$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (x_1^2 - 2x_1\alpha + \alpha^2 + x_2^2 - 2x_2\alpha + \alpha^2 + ... + x_n^2 - 2x_n\alpha + \alpha^2)' = 0 \Leftrightarrow$
$(-2x_1 + 2\alpha) + (-2x_2 + 2\alpha) + ... + (-2x_n + 2\alpha) = 0 \Leftrightarrow$
$-2\sum_{i=1}^{n}(x_i) = -2n\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)}{n}$

Επίσης, ικανοποιούντα οι οι συνθήκες 2ης τάξης για ελάχιστο: $f''(\alpha) = 2 > 0$ Ουσιαστικά η τιμή του α αποτελεί μία έκφραση για τον αριθμητικό μέσο $\bar{x}$.

Άσκηση 1.8

Με βάση τον αριθμό των φοιτητών που συμμετείχαν στην εξέταση της Στατιστικής Ι του α′ εξαμήνου τον Ιανουάριο του 2018, συλλέξαμε τα ακόλουθα αποτελέσματα, που παρουσιαζονται σε 2 μορφές:





Αν το σύνολο το φοιτητών ήταν 278, να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση:

i. Ποιός είναι ο βαθμός που αντιστοιχεί, όταν η Αθροιστική Συχνότητα N_i είναι ίση με 224;
(α) 0.5 (β) 3 (γ) 5 (δ) 5.5

ii. Αν η Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $_i$ είναι 76.9% σε ποιο ταξικό διάστημα βρισκόμαστε·
(α) 0-2 (β) 2.5-4 (γ) 4.5-6 (δ) 8.5+

Λύση

Λύσεις: γ, β

Βαθμός X_i	ν_i	N_i	f_i	Φ_i
0	13	13	0.04676	0.04676
0.5	6	19	0.02158	0.06834
1	15	34	0.05395	0.12230
1.5	21	55	0.07554	0.19784
2	32	87	0.11511	0.31295
2.5	34	121	0.1223	0.43525
3	31	152	0.1115	0.54676
3.5	24	176	0.0863	0.63309
4	38	214	0.13669	$\boxed{0.76978}$
5	10	$\boxed{224}$	0.03597	0.80575
5.5	16	240	0.05755	0.86331
6	8	248	0.02877	0.89208
6.5	10	258	0.03597	0.92805
7	6	264	0.02158	0.94964
7.5	4	268	0.01438	0.96403
8	5	273	0.01798	0.98201
8.5	3	276	0.01079	0.99280
9.5	1	277	0.00359	0.99640
10	1	278	0.00359	1
Σύνολο	278	-	1	-

Βαθμός	ν_i	N_i	f_i	Φ_i
0-2	87	87	0.31295	0.31295
2.5-4	127	214	0.45683	$\boxed{0.76978}$
4.5-6	34	248	0.12230	0.89208
6.5-8	25	273	0.08992	0.98201
8.5+	5	278	0.01798	1
Σύνολο	278	-	1	-

Άσκηση 1.9

Δίνεται ένα δείγμα από τα αποτελέσματα της εξεταστικής της Στατιστικής Ι του α′ εξαμήνου τον Ιανουάριο του 2018. Με βάση το συγκεκριμένο δείγμα:

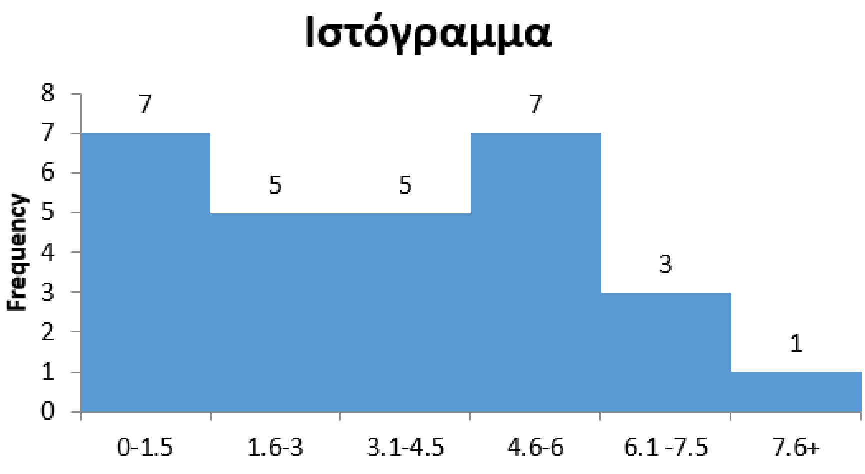
1.5	2.5	5.5	3.5	3	7	4
5	5.5	5	3	3.5	1.5	0
0	1.5	2.5	6.5	4	0	6
5.5	8.5	7	6	3.5	1	3

i. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων, ομαδοποιώντας τα δεδομένα, όταν το πλάτος των τάξεων c είναι ίσο με 1.5, ο αριθμός των κλάσεων/τάξεων είναι ίσος με $q = 6$ και η μικρότερη τιμή της αρχικης τάξης είναι ίση με 0. **ii.** Να υπολογίσετε την Επικρατούσα Τιμή, τη Διάμεσο, τον αριθμητικό μέσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο και τη διακύμανση.
iii. Να χαρακτηρίσετε την κατανομή ως προς την ασυμμετρία καθώς και την κύρτωσή της.

Λύση

i.
Για την κατασκευή του ιστογράμματος θα πρέπει πρώτα να ομαδοποιήσουμε τα δεδομένα.

k	Κάτω-Άνω Όριο		ν_i	Σχετική Συχνότητα	Αθροιστική Συχνότητα	Αθροιστική Σχετική Συχνότητ
1	0	1.5	7	0.25	7	0.25
2	1.6	3	5	0.17857	12	0.42857
3	3.1	4.5	5	0.17857	17	0.60714
4	4.6	6	7	0.25	24	0.85714
5	6.1	7.5	3	0.107	27	0.96414
6	7.6	9	1	0.0357	28	1
			$\boxed{28}$	$\boxed{1}$	-	-



ii.

Σαν επικρατούσα τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων ορίζεται η παρατήρηση με τη μεγαλύτερη συχνότητα. Στην συγκεκριμένη περίπτωση η M_0 δεν είναι μοναδική, αλλά οι βαθμοί με την μεγαλύτερη συχνότητα είναι οι 0, 1.5, 3, 3.5, 5.5.

Για τη διάμεσο δ παίρνουμε το διατεταγμένο δείγμα:

0	0	0	1	1.5	1.5	1.5	2.5	2.5	3	3	3	3.5	3.5
3.5	4	4	5	5	5.5	5.5	5.5	6	6	6.5	7	7	8.5

Το δείγμα έχει πλήθος 28, άρα

$$\delta = \frac{x_{(14)} + x_{(15)}}{2} = 3.5 \tag{10}$$

Ο αριθμητικός μέσος / μέσος όρος / μέση τιμή ορίζεται:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \nu_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} \nu_i} = \sum_{i=1}^{k} f_i y_i = \frac{105.5}{28} = 3.7678 \tag{11}$$

Για τις παρατηρήσεις του διατεταγμένου δείγματος, αντιστοιχεί στο $Q_1 : \lceil 1 \cdot 0.25 \cdot 28 \rceil$, δηλαδή αφήνει 7 παρατηρήσεις αριστερά και 21 δεξιά. Επομένως $(1.5 + 2.5)/2 = 2$. Για το τρίτο αντίστοιχα, $Q_1 : \lceil 3 \cdot 0.25 \cdot 28 \rceil$. Άρα έχουμε 21 παρατηρησεις αριστερά, και 7 δεξιά, $Q_3 = (5.5 + 5.5)/2 = 5.5$

Για τη διακύμανση έχουμε τη σχέση:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} \nu_i (y_i - \bar{x})^2 = \frac{143.74107}{28} = 5.133609 \tag{12}$$

k	y_i	ν_i	$y_i \nu_i$	N_i	$\nu_i(y_i - \bar{y})$	$\nu_i(y_i - \bar{y})^2$	$\nu_i(y_i - \bar{y})^3$	$\nu_i(y_i - \bar{y})^4$
1	0	3	0	0	-11.303571	42.590242	-160.47394	604.64291
2	1	1	1	1	-2.7678571	7.661033	-21.20464536	58.691429
3	1.5	3	4.5	5.5	-6.803571	15.429528	-34.991965	79.356778
4	2.5	2	5	10.5	-2.5357142	3.214923469	-4.0760636	5.1678664
5	3	3	9	19.5	-2.3035714	1.768813	-1.3581962	1.042900
6	3.5	3	10.5	30	-0.8035714	0.215242347	-0.057654	0.0154430
7	4	2	8	38	0.4642857	0.1077806	0.0250204	0.005808
8	5	2	10	48	2.4642857	3.0363520	3.7412194	4.6097168
9	5.5	3	16.5	64.5	5.19642	9.0009566	15.590942	27.00574
10	6	2	12	76.5	4.4642857	9.9649234	22.243132	49.64984
11	6.5	1	6.5	83	2.7321428	7.4646045	20.394366	55.720321
12	7	2	14	97	6.46428	20.89349	67.53076	218.26906
13	8.5	1	8.5	105.5	4.73214	22.393176	105.9677	501.45433
-	Σύνολο	28	105.5	-	-	143.74107	13.33067	1605.6321

$$S_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^m}{N}, m = 1, 2, .. \tag{13}$$

- Για $m = 1$, έχω $S_1 = 0$
- Για $m = 2$, έχω $S_2 = s^2$

- Για $m = 3$, έχω S_3 την ασυμμετρία
- Για $m = 4$, έχω S_4 την κύρτωση

$$\alpha = \frac{S_3}{\sigma^3} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^3}{N}}{(\sigma^2)^{3/2}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{k}\nu_i(y_i-\bar{x})^3}{N}}{(\sigma^2)^{3/2}} = \frac{\frac{13.33067}{28}}{5.1336096^{3/2}} = \frac{0.4760955}{11.63146} = 0.04093 > 0$$

άρα ελαφρώς θετική συμμετρία

$$b = \frac{S_4}{\sigma^4} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^4}{N}}{\sigma^4} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{k}\nu_i(y_i-\bar{x})^4}{N}}{\sigma^4} = \frac{\frac{1605.6321}{28}}{5.133609^2} = 2.17591 \tag{14}$$

Επειδή για κανονικές κατανομές, έχουμε $b = 3$, συνηθίζεται να μετράμε την κυρτότητα με τη διαφορά $b - 3$, η οποία για λεπτόκυρτες κατανομές παίρνουμε θετικές τιμές(θετική κύρτωση) ενώ για πλατύκυρτες κατανομές η διαφορά γίνεται αρνητική. Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχω $2.17591 - 3 = -0.824082 < 0$ άρα χαρακτηρίζουμε την κατανομή πλατύκυρτη.