ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΤΟ ΝΕΟΚΛΑΣΣΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΜΕΓΕΘΥΝΣΗΣ

4.1 Το Υπόδειγμα του Solow (1956)

Το Νεοκλασσικό Υπόδειγμα του Solow αποτελεί το σημείο εκκίνησης για όλες σχεδόν τις αναλύσεις που αφορούν την θεωρία της οικονομικής μεγέθυνσης. Η μελέτη και κατανόηση των βασικών του σημείων συμβάλλει στην συγκρότηση των στοιχειώδη γνώσεων που απαιτούνται για την διερεύνηση του χώρου της οικονομικής ανάπτυξης. Έτσι στο κεφάλαιο αυτό, το οποίο αποτελεί επέκταση του προηγουμένου, εμβαθύνουμε την ανάλυση του υποδείγματος, εξετάζοντας τις ποιοτικές ιδιότητες του Σημείου Ανταγωνιστικής Ισορροπίας σε διακριτό χρονικό ορίζοντα, αναφορικά με τη συμπεριφορά του κατά κεφαλήν κεφαλαίου. Καταλήγουμε στην βασική πρόταση, ότι για να διατηρηθεί ένας θετικός ρυθμός μεγέθυνσης του κατά κεφαλήν προϊόντος στην μακροχρόνια περίοδο, θα πρέπει να υπάρχει μία συνεχής τεχνολογική πρόοδος. Διαφορετικά, σε οικονομίες όπου απουσιάζουν τα παραπάνω χαρακτηριστικά, το αποτέλεσμα των φθίνουσων αποδόσεων μπορεί ενδεχομένως να τις οδηγήσει σε επιβράδυνση του ρυθμού οικονομικής μεγέθυνσης.

4.1.1 Πρόσθετες Υποθέσεις:

(i) Οι υπηρεσίες εργασίας προσφέρονται ανελαστικά:

$$h(k_t, k_{t+1}) = 1, \ \forall t \in N_+$$

(ii) Το ποσοστό του εισοδήματος που αποταμιεύεται και επενδύεται είναι διαχρονικά σταθερό:

$$i_t = s\, y_t\, ;\ s \in (0,1)$$

Πρόταση: Δεδομένων των Πρόσθετων Υποθέσεων (i) και (ii) ο νόμος κίνησης του λόγου κεφαλαίου ανά νοικοκυριό (κεφαλαίου - εργασίας) χαρακτηρίζεται από την σχέση:

$$(1 + g_n)\, k_{t+1} = (1-\delta)\, k_t + sf(k_t) \tag{4.1}$$

Απόδειξη: Η επένδυση στο χρόνο *t* αντανακλάται από την ακόλουθη εξίσωση

$$I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t$$

η κατά κεφαλήν επένδυση επίσης δίνεται ως

$$\frac{I_t}{n_t} = \frac{K_{t+1}}{n_t} - (1-\delta)\frac{K_t}{n_t}$$

$$= \left(\frac{n_{t+1}}{n_t}\right)k_{t+1} - (1-\delta)k_t$$

$$= (1+g_n)k_{t+1} - (1-\delta)k_t$$

υποθέτοντας ότι ο πληθυσμός μεγεθύνεται γεωμετρικά με ρυθμό $g_n > -\delta$. Η εξίσωση της επένδυσης – αποταμίευσης γίνεται

$$(1+g_n)k_{t+1} - (1-\delta)k_t = sf(k_t)$$

στην συνέχεια λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς k_{t+1} καταλήγουμε στην βασική θεώρηση του υποδείγματος του Solow

$$k_{t+1} = \frac{(1-\delta)k_t + sf(k_t)}{1+g_n} \qquad \text{Q.E.D.}$$

Πρόταση-Εφαρμογή: Η αποταμίευση στο υπόδειγμα του Solow αποτελεί ένα σταθερό ποσοστό του συνολικού εισοδήματος.

Απόδειξη: Το Υπόδειγμα του Solow μπορεί να θεωρηθεί σαν ειδική περίπτωση του Υποδείγματος Cass-Koopmans, κατά συνέπεια:

(i) Η προσωρινή συνάρτηση χρησιμότητας του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού αντανακλάται στην ακόλουθη μορφή

$$u(c)=\frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}\,,\quad \gamma>0\,,\quad \gamma\neq 1 \qquad (*)$$

μια πιο ευκολόχρηστη συνάρτηση χρησιμότητας η οποία προέρχεται από την (*) καθώς $\gamma \to 1$, είναι η λογαριθμική

$$u(c)=\ln c \qquad (4.2)$$

(ii) Η συνάρτηση παραγωγής είναι της μορφής Cobb-Douglas (εντατική):

$$y_t = f(k)=Ak^a \quad , \alpha\in(0.1)$$

(iii) $\delta = 1$

με βάση τους παραπάνω περιορισμούς η συνθήκη Euler του ΣΑΙ παίρνει την μορφή:

$$\frac{u_{c_t}}{u_{c_{t+1}}}=\beta\left[1-\delta+F_K(k_{t+1},h_{t+1})\right]\Leftrightarrow$$

$$\frac{c_{t+1}}{c_t}=\beta(1-\delta+aAk_{t+1}^{\alpha-1}) \qquad (4.3)$$

για $\delta=1$, η (4.3) γίνεται

$$\frac{c_{t+1}}{c_t}=\beta\alpha Ak_{t+1}^{\alpha-1}$$

εξ ορισμού έχουμε

$$c_t=(1-s)y_t=(1-s)Ak_t^a \qquad (4.4)$$

Επομένως από (4.3) και (4.4) προκύπτει:

$$\frac{k_{t+1}^{\alpha}}{k_t^{\alpha}}=\alpha\beta Ak_{t+1}^{\alpha-1}\Leftrightarrow \mathrm{k}_{t+1}=\alpha\beta\mathrm{A}\mathrm{k}_{t}^{\alpha} \qquad (4.5)$$

Εν συνεχεία, από τον κανόνα μετάβασης του λόγου κεφαλαίου-εργασίας έχουμε:

$$(1+g_n)k_{t+1}=i_t\Leftrightarrow$$

$$k_{t+1} = \frac{i_t}{1+g_n}$$

$$= \frac{sy_t}{1+g_n} = \frac{sAk_t^{\alpha}}{1+g_n} \tag{4.6}$$

από τις (4.5) και (4.6) συνεπάγεται ότι:

$$\mathrm{s} = \alpha\beta(1+\mathrm{g_n}) \qquad \text{Q.E.D.}$$

Επομένως, αποδεικνύεται ότι το ποσοστό του εισοδήματος που αποταμιεύται είναι σταθερό.

__**Θεώρημα:**__ Ο λόγος κεφαλαίου-εργασίας της οικονομίας χαρακτηρίζεται από το νόμο κίνησης:

$$k_{t+1} = g(k_t),\ k_o \in \Re_+ \text{ δεδομένο} \tag{4.7}$$

όπου: $$g(k) = \frac{(1-\delta)k + sf(k)}{1+g_n}, \quad g_n \geq 0,\ \delta \in [0,1] \ \textit{και}\ s \in (0,1)$$

είναι $g: \Re_+ \rightarrow \Re_+$

(i) διαφορήσιμη

(ii) αυστηρά αύξουσα

(iii) αυστηρά κοίλη

(iv) $g(0) = 0$

(v) $g' \rightarrow +\infty$ καθώς $k \rightarrow 0$

(vi) $g' \rightarrow (1+g_n)^{-1}(1-\delta) < 1$ καθώς $k \rightarrow +\infty$

Πρόταση: Οι ιδιότητες της συνάρτησης $g(.)$ συνεπάγονται ότι υπάρχει ένα μοναδικό $k^* \in (0,\infty)$ τέτοιο ώστε $k_t \rightarrow k^*$ για κάθε $k_0 \in \Re_+$ μονοτονικά

(Δηλ. $k_0 < \ldots\ldots < k^*_{t-1} < k^*_t < k^*_{t+1} < \ldots . k^*$ αν $k_0 < k^*$

και $k^* < \ldots . < k^*_{t+1} < k^*_t < k^*_{t-1} < k_0$ αν $k_0 > k^*$).

Απόδειξη: Η απόδειξη μπορεί να γίνει σε τρία στάδια. Στο πρώτο στάδιο, αποδεικνύεται ότι υπάρχει ένα σημείο $k^* \in (0,\infty)$ τέτοιο ώστε $k^* = g(k^*)$. Στο δεύτερο στάδιο αποδεικνύεται ότι το σταθερό σημείο είναι μοναδικό στο διάστημα $(0,\infty)$. Τέλος, στο τρίτο στάδιο αποδεικνύεται η μονοτονικότητα της σύγκλισης ως προς το σταθερό σημείο.

<u>Πρώτο στάδιο</u>: Ορίζοντας την συνάρτηση, $\gamma(\bullet)$, $\gamma(k) = g(k)-k$ έπεται ότι: $g(k) = k$ εάν και μόνο ισχύει $\gamma(k) = 0$. Ακολούθως, έπεται από τις ιδιότητες της $g(\bullet)$ ότι:

(i) $\gamma: \Re_+ \to \Re$, $\gamma \in C([0,\infty])$

(ii) $\gamma(0) = 0$

(iii) $\gamma'(k) = g'(k) - 1 = (1+g_n)^{-1}\left[(1-\delta) + sf'(k)\right] - 1 = \dfrac{(1-\delta) + sf'(k) - (1+g_n)}{(1+g_n)}$

(iv) $\gamma'(k) = g'(k) - 1 \to +\infty$ καθώς $k \to 0$

(v) $\gamma'(k) = g'(k) - 1 \to \dfrac{1-\delta}{1+g_n} - 1 < 0$ καθώς $k \to +\infty$

Από τις ιδιότητες (i), (ii) και (iv) έπεται ότι υπάρχει ένα $\underline{k} \in (0,\infty)$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε $\gamma(\underline{k}) > 0$, επίσης από τις ιδιότητες (i), (ii) και (v) έπεται ότι υπάρχει ένα $\bar{k} \in (\underline{k}, \infty)$ αρκετά μεγάλο τέτοιο ώστε:

$$\gamma'(\bar{k}) < \frac{1-\delta}{1+g_n} - 1 + \varepsilon < 0,\ \forall\, k \geq \bar{k}$$

και για τυχαίο μικρό $\varepsilon > 0$. Εφόσον, $\gamma \in C([0,\infty])$, λόγω του θεωρήματος Μέσης Τιμής για παραγώγους :

$$\gamma(k) = \gamma(\bar{k}) + \gamma'(\tilde{k})(k - \bar{k}),$$

$$\forall\, k \geq \bar{k} \ \text{και}\ \tilde{k} \in [\bar{k}, k]$$

έπεται ότι:

$$\gamma(k) < \left[\frac{1-\delta}{1+g_n} - 1 + \varepsilon\right](k - \bar{k}) + \gamma(\bar{k}),\ \forall\, k \geq \bar{k}$$

Από τις παραπάνω δύο σχέσεις, εφόσον, $\frac{1-\delta}{1+g_n}-1+\varepsilon<0$, μπορούμε να βρούμε κάποιο $\overline{k}$ αρκετά μεγάλο έτσι ώστε:

$$\left[\frac{1-\delta}{1+g_n}-1+\varepsilon\right]\overline{k} \;<\; \left[\frac{1-\delta}{1+g_n}-1+\varepsilon\right]k+\gamma(\overline{k})$$

αλλά τότε, $\gamma(\overline{k})<0$

Εφόσον $\gamma(k)\in C([0,\infty])$, $\gamma(k)>0$ για αρκετά μικρό k και $\gamma(k)<0$ για αρκετά μεγάλο k έπεται από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής ότι υπάρχει ένα $k^* \in (\underline{k},\overline{k}) \subset (0,\infty)$ τέτοιο ώστε $\gamma(k^*)=0$.

<u>Δεύτερο Στάδιο</u>: Αντίθετα ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο σημεία k_1, k_2 $\in(0,\infty)$ τέτοια ώστε $\gamma(k_1)=\gamma(k_2)=0$ και $k_1\neq k_2$. Χωρίς απώλεια γενικότητας ας υποθέσουμε ότι $k_2>k_1$.

Προφανώς, υπάρχει ένα $\lambda\in(0,1)$ έτσι ώστε:

$$\lambda k_2+(1-\lambda)\,0=k_1$$

Εφόσον και η $g(\bullet)$ είναι αυστηρά κοίλη και $g(\bullet)=0$ έχουμε

$$g(k)=g[\lambda k_2+(1-\lambda)0]>$$
$$\lambda g(k_1)+(1-\lambda)g(o)=\lambda g(k_2)$$

επομένως συνεπάγεται ότι: $g(k_1)=g(\lambda k_2)>\lambda g(k_2)=\lambda k_2=k_1$ που είναι άτοπο. Ως εκ τούτου το k^* είναι μοναδικό.

<u>Τρίτο Στάδιο</u>: Το ακόλουθο διάγραμμα δείχνει ότι η ακολουθία $\{k\}_{t=0}^{\infty}$, $k_{t+1}=g(k_t)$ θα συγκλίνει προς τα πάνω στο k^* όπως το $t\to+\infty$ αν ξεκινήσουμε από κάποιο σημείο $k_o<k^*$ και πως θα συγκλίνει προς τα κάτω πάλι στο k^* όπως το $t\to+\infty$ αν ξεκινήσουμε από κάποιο σημείο $k_o>k^*$. Έστω $0<k_o<k^*$ $[k_o>k^*>0]$ τότε αρκεί να δείξουμε ότι:

$$0 < k_o < g(k_o) < g(k^*) = k^*$$
$$[\, k_o > g(k_o) > g(k^*) = k^* > 0 \,].$$

γνωρίζουμε ότι η $g: \Re_+ \to \Re_+$ είναι αυστηρά αύξουσα άρα:

$$0 < g(k_o) < g(k^*) = k^*$$
$$[g(k_o) > g(k^*) = k^* > 0]$$

Επίσης, εφόσον το σημείο k^* είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της g στο διάστημα (0,+∞), έπεται ότι:

$$k_0 < g(k_0) \text{ ή } k_0 > g(k_0)$$

Έστω $k_0 > g(k_0)[k_0 < g(k_0)]$. Εφόσον η g είναι αυστηρά κοίλη έπεται ότι για κάποιο $\lambda \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $k_0 = \lambda \cdot 0 + (1-\lambda)k^* [k^* = \lambda \cdot 0 + (1-\lambda)k_0\,]$ πρέπει να ισχύει ότι:

$$g[\lambda 0 + (1-\lambda)k^*] > \lambda g(0) + (1-\lambda)g(k^*)$$
$$[g[\lambda 0 + (1-\lambda)k_o] > \lambda g(0) + (1-\lambda)g(k_o)]$$

ή

$$g(k_o) > k_o$$
$$[g(k^*) > (1-\lambda)g(k_o) > (1-\lambda)k_o = k^*]$$

με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε σε άτοπο και συνεπώς $k_o < g(k_0)$ $[k_0 > g(k_0)]$.

Κατασκευάζοντας την ακολουθία $\{k_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ από τις σχέσεις

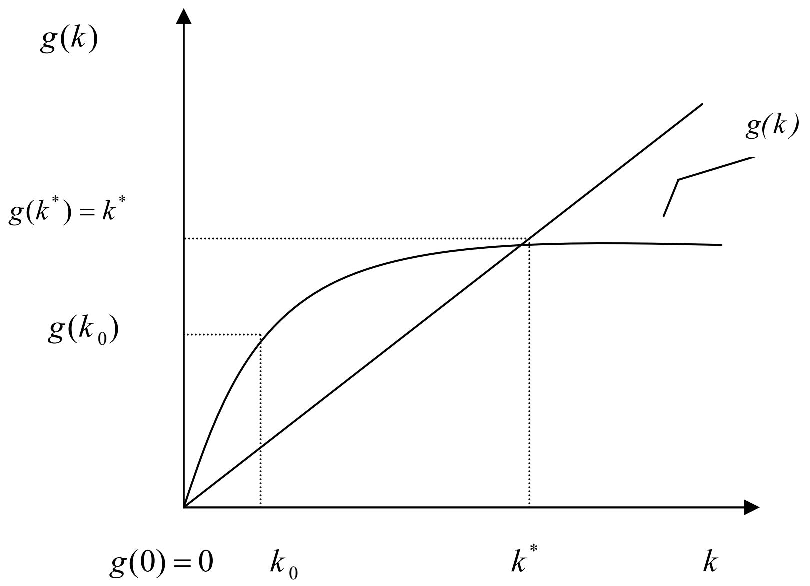
$$k_0^* = k^*$$

$$k_1^* = g(k_o^*)$$

$$k_{t+1}^* = g(k_t^*)$$

έπεται από τα παραπάνω, εφόσον η επιλογή του σημείου k_o ήταν αυθαίρετη, ότι για $k_0 > k^*$ $(k_0 < k^*)$ πρέπει να έχουμε:

$$k_o > k_1^* > \dots k_t^* > k_{t+1}^* > \dots > k^*$$
$$[k^* < \dots < k_{t+1}^* < k_t^* < \dots k_1^* < k_o\,]$$

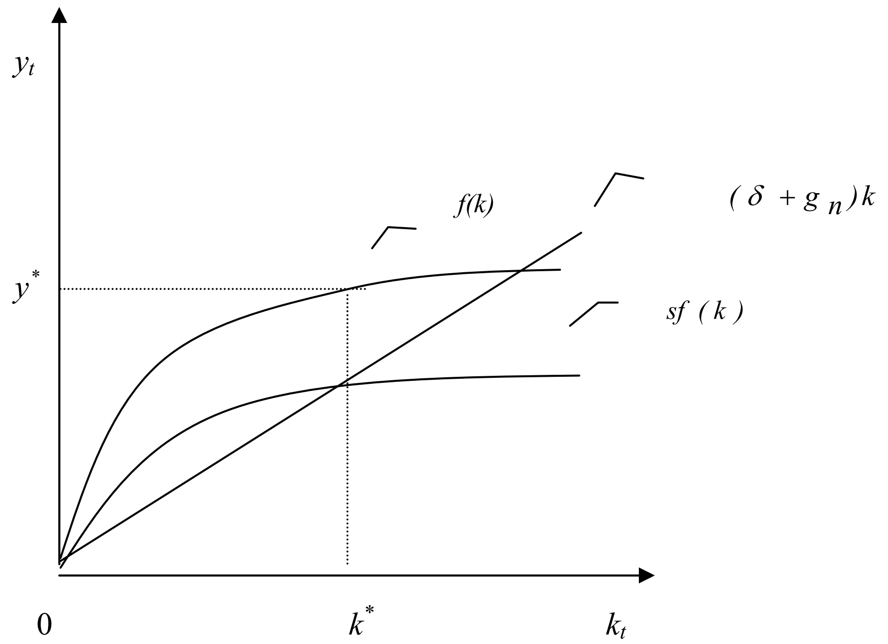


Διάγραμμα 4.1

Τέλος, πρέπει να δείξουμε ότι η ακολουθία $\{k_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ συγκλίνει στο k^*. Αλλά, εφόσον η ακολουθία αυτή είναι φραγμένη (Δηλ. $k_t^0 \in [\min\{k_0, k\}, \max\{k_0, k^*\}], \forall t \in N_+$) και μονότονα αύξουσα ή μονότονα φθίνουσα συνεπάγεται από το Θεώρημα Σύγκλισης των Μονότονα Μεταβαλλόμενων Ακολουθιών (Λουκάκης (1988), Τόμος Α!, σελ. 129), ότι:

$k_t^* \to k^*$ καθώς το $t \to +\infty$, $\forall\, k_0 \in [0, \infty)$ Q.E.D.

<u>Παρατήρηση</u>: Προφανώς στο νεοκλασσικό υπόδειγμα οικονομικής ανάπτυξης χωρίς αύξηση της εξωγενούς συνολικής παραγωγικότητας δεν επέρχεται οικονομική ανάπτυξη.



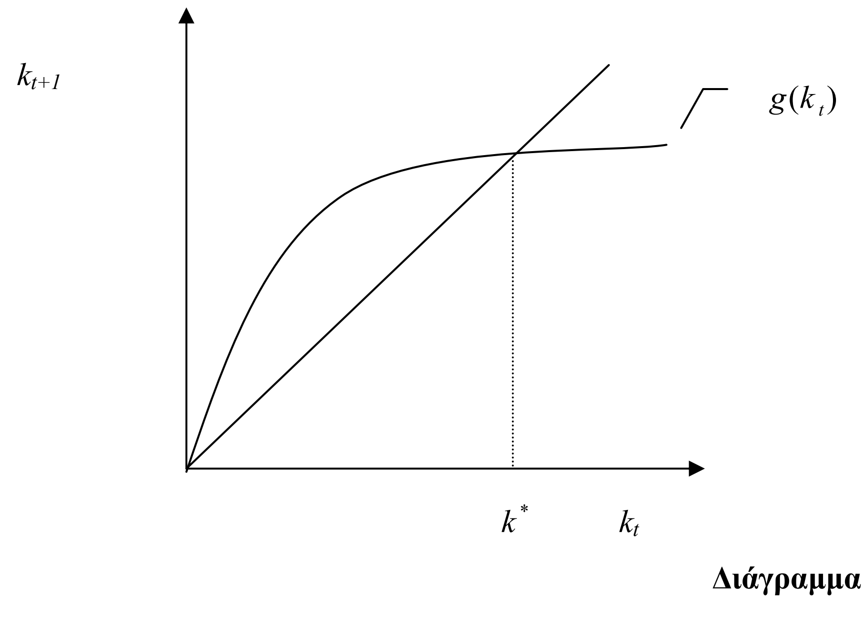
Διάγραμμα 4.2

Παρατήρηση: Στο σταθερό σημείο της οικονομίας πρέπει να ισχύει σχέση:

$$(1+g_n)k^* = (1-\delta)k^* + sf(k^*)$$

Παρατήρηση: Στο θεώρημα (4.1a) αναφέρεται ότι ο λόγος κεφαλαίου-εργασίας χαρακτηρίζεται από το νόμο κίνησης $k_{t+1} = g(k_t)$, $k_0 \in \Re_+$ δεδομένο (4.8)

διαγραμματικά έχουμε :

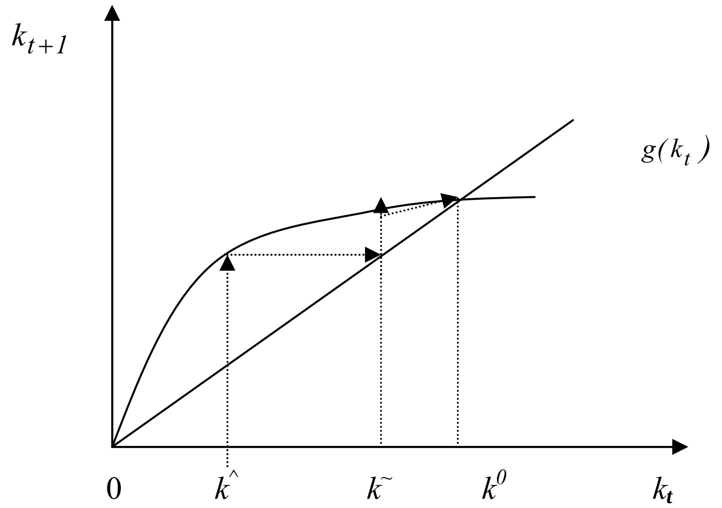


Διάγραμμα 4.3

<u>Θεώρημα</u>: Οι ιδιότητες της συνάρτησης *g(.)* συνεπάγονται ότι υπάρχει ένα $k^* \in (0,\infty)$ τέτοιο ώστε $k_t \to k^*$ για κάθε $k_0 \in \Re_+$ μονοτονικά (Δηλ. $k_0 < ... < k_{t-1} < k_t < k_{t+1} < ... < k^*$ ή $k_0 > ... > k_{t-1} > k_t > k_{t+1} > ... > k^*$).

<u>Παρατήρηση:</u> Οι τελευταίες δυο παρατηρήσεις οδηγούν στα βασικά συμπεράσματα του Νεοκλασσικού Υποδείγματος, ότι στην απουσία αύξησης της εξωγενούς συνολικής παραγωγικότητας, (δηλ, της τεχνολογικής προόδου), η οικονομία οδεύει προς ένα σημείο όπου δεν υπάρχει οικονομική ανάπτυξη και το αποτέλεσμα αυτό δεν μπορεί να μεταβληθεί από την οικονομική πολιτική. Η τελευταία, που θεωρείται ότι μπορεί να επηρεάζει το ποσοστό του εισοδήματος που αποταμιεύται τελικά επιδρά μόνο στον σταθερό λόγο κεφαλαίου ανά νοικοκυριό, δηλαδή, το επίπεδο του εισοδήματος προς το οποίο η οικονομία συγκλίνει. Αυτό συμβαίνει γιατί η αύξηση της ροπής για αποταμίευση οδηγεί μακροχρόνια στην αύξηση του προϊόντος και του κατά κεφαλήν προϊόντος, αλλά όχι στην αύξηση του ρυθμού της κατά κεφαλήν μεγέθυνσης. Όμως, κατά τη διαδικασία μετάβασης, το υψηλότερο ποσοστό αποταμίευσης αυξάνει το ρυθμό μεγέθυνσης και το ρυθμό αύξησης του κατά κεφαλήν προϊόντος. Η εξήγηση είναι ότι ο λόγος κεφαλαίου-προίόντος αυξάνεται μετακινούμενος από το επίπεδο της αρχικής στάσιμης ισορροπίας (σταθερής κατάστασης), στο επίπεδο της νέας στάσιμης ισορροπίας. Ο μόνος τρόπος για να επιτευχθεί η αύξηση του λόγου κεφαλαίου-εργασίας είναι η αύξηση του αποθέματος κεφαλαίου με γρηγορότερο ρυθμό από αυτόν της αύξησης του εργατικού δυναμικού (και των αποσβέσεων). Συμπερασματικά, το μακροχρόνιο αποτέλεσμα της αύξησης του ποσοστού αποταμίευσης είναι η αύξηση του κατά κεφαλήν προϊόντος και κεφαλαίου, χωρίς όμως να επηρεάζεται ο τελικός ρυθμός μεγέθυνσης του προϊόντος και του κεφαλαίου. Όμως, κατά τη διαδικασία μετάβασης, ο ρυθμός μεγέθυνσης του προϊόντος και του κεφαλαίου είναι υψηλότερος από αυτόν της στάσιμης ισορροπίας.

Σύγκλιση



Διάγραμμα 4.4

Είναι προφανές ότι αν δύο οικονομίες είναι ίδιες αλλά η μία ευρίσκεται στο $k^{\wedge}$ και η άλλη στο $k^{\sim}$,και $k^{\wedge} < k^{\sim} < k^0$, η φτωχότερη οικονομία (δηλ., αυτή που βρίσκεται στο $k^{\wedge}$) θα αναπτυχθεί περισσότερο από την πιο πλούσια οικονομία, που ευρίσκεται στο $k^{\sim}$.

Παρατηρώντας από τα παραπάνω διάγραμμα, τα αποτελέσματα των παραμετρικών μεταβολών στην πορεία σύγκλισης διαπιστώνουμε τα εξής:

	k_0	s	$F(.)$	δ	g_n
Σύγκλιση	-	+	+	-	-

όπου το πρόσημο + (-), σημαίνει ότι όταν αυξηθεί η τιμή της αντίστοιχης παραμέτρου τότε η πορεία σύγκλισης επιταχύνεται (επιβραδύνεται).

<u>Σχόλιο</u>: Στο σημείο αυτό προχωρούμε στην γενίκευση του υποδείγματος Cass-Koopmans επιτρέποντας την αύξηση της συνολικής παραγωγικότητας.

Το πρόβλημα του κοινωνικού σχεδιαστή με άπειρο ορίζοντα υπό συνθήκες μεταβαλλόμενης συνολικής παραγωγικότητας και πληθυσμού

$$\max_{\{c_t, i_t, l_t, h_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, l_t) n_t, \quad \beta \in (0,1) \tag{4.9}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$n_t(c_t + i_t) \leq m\, z_t F(K_t, L_t) \tag{4.10}$$

$$l_t + h_t \leq \tau \tag{4.11}$$

$$K_{t+1} = (1-\delta) K_t + \frac{n_t i_t}{m}; \ \delta \in [0,1] \tag{4.12}$$

$$K_t = \frac{n_t k_t}{m} \tag{4.13}$$

$$L_t = \frac{n_t h_t}{m} \tag{4.14}$$

$$n_{t+1} = (1+g_n) n_t, \ g_n \in \Re_+ \text{ και } n_0 = 1 \tag{4.15}$$

$$z_{t+1} = (1+g_z) z_t, \ g_z \in \Re_+ \tag{4.16}$$

$$c_t, l_t, h_t, k_{t+1} \geq 0 \tag{4.17}$$

$$(k_0, z_0) \in \Re_+ \times \Re_+ \qquad \text{δεδομένο,}$$

όπου: $u : \Re_+ \, x\, [0, \tau] \rightarrow \Re$,

$F : \Re_+ \, x \Re_+ \rightarrow \Re_+$

<u>Παρατήρηση</u>: Για λόγους που ήδη έχουμε αναφέρει, το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο με:

$$\max_{\{k_{t+1}, h_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u[(z_t F(k_t, h_t) - (1+g_n) k_{t+1} + (1-\delta) k_t, (\tau - h_t)] (1+g_n)^t \tag{4.18}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$z_{t+1} = (1 + g_z)\, z_t$$

$k_{t+1}, h_t \geq 0$

$(k_o, z_o) \in \Re_+ x \Re_+$ δεδομένα

<u>Παρατήρηση</u> (Συνθήκες Euler): Αν $\{k^*_{t+1}, h^*_t\}_{t=0}^{\infty}$ είναι λύση του προβλήματος του κοινωνικού σχεδιαστή τότε το $(k_{t+1}{}^*, h_t{}^*)$ πρέπει να είναι λύση του προβλήματος:

$$\max_{K_{t+1}, h_t \geq 0} \{u[\, z_t F(k_t, h_t) - (1+g_n) k_{t+1} + (1-\delta) k_t, \tau - h_t\,] +$$

$$+ \beta(1+g_n)\; u[(1+g_z) z_t \;\; F(k_{t+1}, h_{t+1}) - (1+g_n) k_{t+2} + (1-\delta) k_{t+1}, (\tau - h_{t+1})]\}$$

$$\forall t \in N+$$

Οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για τη λύση του προβλήματος αυτού είναι:

$$u_{c_t}[-(1+g_n)] + \beta(1+g_n) u_{c_{t+1}}[(1+g_z) z_t F_k(k_{t+1}, h_{t+1}) + (1-\delta)] \leq 0$$

$$(=0 \text{ αν } k_{t+1} > 0), \; \forall t \in N_+ \tag{4.19}$$

$$u_{c_t} z_t F_L(k_t, h_t) - u_{l_t} \leq 0 \;, (=0\_\tau\alpha\nu \;\; h_t > 0) \;, \forall t \in N_+ \tag{4.20}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Λόγω των ιδιοτήτων τύπου Inada των $U(.)$ και $F(.)$ οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να ισχύουν μόνο με ισότητα. Ετσι, έχουμε ότι αν $\{k^*_{t+1}, h^*_t\}_{t=0}^{\infty}$ είναι λύση του προβλήματος του κοινωνικού σχεδιαστή πρέπει να ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$u_{c_t}{}^* = \beta u^*_{c_{t+1}}[1 - \delta + (1+g_z) z_t F_K(k^*_{t+1}, h^*_{t+1})] \tag{4.21}$$

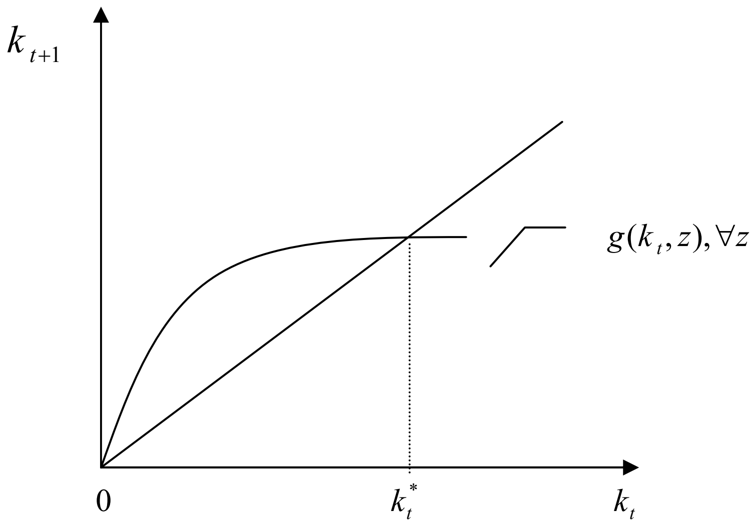
$$\frac{u^*_{l_t}}{u^*_{c_t}} = z_t F_L(k^*_t, h^*_t) \tag{4.22}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Η σχέση (4.22) μπορεί αν λυθεί ως προς h_t να δώσει $h^*_t = h(k^*_t, k^*_{t+1}, z_t)$ και η (4.21) μπορεί να λυθεί ως προς k_{t+1} και να δώσει: $k^*_{t+1} = g(k^*_t, z_t)$, όπου $g: \Re_+ \times \Re_+ \to \Re_+$.

Μπορεί να δείξει κανείς ότι αν $\{k_{t+1}, h_t\}_{t=0}^{\infty}$ ικανοποιεί τις (4.21) και (4.22) υπάρχει ένα μοναδικό σημείο (k^*, h^*) τέτοιο ώστε $(k_t, h_t) \rightarrow (k^*, h^*)$ καθώς $t \rightarrow +\infty$ μονοτονικά από οποιοδήποτε σημείο $(k, h) \in \Re_+ \times (0, \tau)$, για $z_t = z$ δεδομένο αν:

$$\beta^t u_{ct}(c_t, l_t) k_{t+1} \rightarrow 0 \qquad \text{καθώς} \quad t \rightarrow +\infty$$

(βλέπε διάγραμμα 4.5)



Διάγραμμα 4.5

Ασκηση 4.1: Δώστε την οικονομική ερμηνεία των σχέσεων :

$$\frac{u_{l_t}}{u_{c_t}} = z_t F_L(k_t, h_t)$$

$$u_{c_t} = \beta u_{c_{t+1}} [1 - \delta + z_{t+1} F_K(k_{t+1}, h_{t+1})]$$

4.2 <u>Το Υπόδειγμα των Cass-Koopmans (Σταθερή Πορεία)</u>

<u>Παρατήρηση:</u> Οι ποιοτικές ιδιότητες του ΣΑΙ, αναφορικά με την οικονομική μεγέθυνση, στο υπόδειγμα Cass-Koopmans, χωρίς αύξηση της εξωγενούς συνολικής παραγωγικότητας, ακολουθούν τις αντίστοιχες ιδιότητες του υποδείγματος του Solow. Τώρα μας ενδιαφέρει να δείξουμε ότι οι ποιοτικές ιδιότητες του ΣΑΙ, αναφορικά με την οικονομική μεγέθυνση στο υπόδειγμα Cass-

Koopmans, με αύξηση της εξωγενούς συνολικής παραγωγικότητας, ικανοποιούν τα Βασικά Χαρακτηριστικά του Kaldor.

Πρόταση: Με συνάρτηση χρησιμότητας ΣΔΕΥ της μορφής:

$$u(c_t, l_t) = \frac{c_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + \varepsilon \frac{l_t^{1-n} - 1}{1-n}$$

και συνάρτηση παραγωγής της μορφής Cobb-Douglas

$$F(K_t, L_t) = A K_t^{a} L_t^{1-a} \quad a \in (0,1)$$

αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε να έχουμε σταθερή αύξηση της κατανάλωσης,

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = (1+g_c) > 1 \quad , \forall t \in N_+$$

είναι ο λόγος προϊόντος κεφαλαίου να είναι σταθερός και:

$$\frac{y_{t+1}}{k_{t+1}} = \phi > \frac{\beta^{-1} - 1 + \delta}{\alpha}$$

Απόδειξη: Από την σχέση (4.21) έχουμε:

$$c_t^{-\gamma} = \beta c_{t+1}^{-\gamma} [1 - \delta + z_{t+1} A \alpha k_{t+1}^{\alpha-1} h_{t+1}^{1-\alpha}] \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\gamma} = \beta (1 - \delta + \alpha \frac{y_{t+1}}{k_{t+1}})$$

Προφανώς, αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = (1+g_c) > 1 \ , \ \forall t \in N_+$$

είναι η ακόλουθη

$$\frac{y^*_{t+1}}{k^*_{t+1}} = \frac{y^*_t}{k^*_t} = k > 1$$

Συνεπώς η συνθήκη για σταθερή αύξηση της κατανάλωσης ανά νοικοκυριό είναι:

$$\frac{k^*_{t+1}}{k^*_t} = \frac{y^*_{t+1}}{y^*_t} = k > 1$$

Πρόταση: Στην πορεία σταθερής κατάστασης:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{i_{t+1}}{i_t} = \frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{k_{t+1}}{k_t} = k = (1+g_z)^{1/1-a}$$

Με τις εξειδικεύσεις:

$$u(c_t, l_t) = \frac{c_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + \varepsilon \frac{l_t^{1-n} - 1}{1-n}$$

$$F(K_t, L_t) = AK_t^a L_t^{1-a}, \ \alpha \in (0,1)$$

Απόδειξη:

Έχουμε:

$$\phi = \frac{y_{t+1}}{k_{t+1}} = \frac{z_{t+1} A k_{t+1}^a h_{t+1}^{1-a}}{k_{t+1}}$$

και στη σταθερή πορεία:

$$1 = \frac{\phi}{\phi} = \frac{\frac{y_{t+1}}{k_{t+1}}}{\frac{y_t}{k_t}} = \frac{z_{t+1} A k_{t+1}^{\alpha-1} h_{t+1}^{1-\alpha}}{z_t A k_t^{\alpha-1} h_t^{1-\alpha}}$$

$$1 = \frac{z_{t+1}}{z_t} \left(\frac{k_{t+1}^*}{k_t^*} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{h_{t+1}^*}{h_t^*} \right)^{1-\alpha}$$

$$1 = \frac{z_{t+1}}{z_t} \left(\frac{k_{t+1}^*}{k_t^*} \right)^{\alpha-1}$$

$$\left(\frac{k_{t+1}^*}{k_t^*} \right) = (1+g_z)^{\frac{1}{1-\alpha}} = k$$

$$\frac{c_{t+1}^*}{c_t^*} = \frac{i_{t+1}^*}{i_t^*} = \frac{y_{t+1}^*}{y_t^*} = \frac{k_{t+1}^*}{k_t^*} = k \qquad (4.23)$$

Παρατήρηση: Ο ρυθμός αύξησης του κατά κεφαλήν προϊόντος, κεφαλαίου, κατανάλωσης και επένδυσης είναι σταθερός και ίσος προς $(1+g_z)^{\frac{1}{1-a}}$.

Παρατήρηση: Μόνο τεχνολογικές παράμετροι επηρεάζουν τον μακροχρόνιο ρυθμό οικονομικής μεγέθυνσης σύμφωνα με το νεοκλασσικό υπόδειγμα. Ειδικότερα ο πιο σημαντικός λόγος είναι η *τεχνολογική πρόοδος*, την οποία οι εμπειρικές μελέτες την έχουν χαρακτηρίσει ως βασική πηγή μεγέθυνσης. Όταν ο ρυθμός της τεχνολογικής προόδου είναι $\frac{\Delta A}{A}$, ο ρυθμός μεγέθυνσης αυξάνεται κατά το ποσό αυτό. Δεν υπάρχει αμφιβολία, ότι η ανθρώπινη ευφυία μπορεί να παράγει την τεχνολογική πρόοδο που χρειάζεται για τη συνέχιση της μεγέθυνσης.

Θεώρημα: Στη σταθερή πορεία ο λόγος κεφαλαίου-προϊόντος και το ποσοστό του εισοδήματος που αποταμιεύεται δίδονται από τις σχέσεις:

$$\phi = \frac{y^*}{k^*} = \frac{1}{\alpha\beta}\left[(1+g_z)^{\frac{\gamma}{1-\alpha}} - \beta(1-\delta)\right] \quad \textit{και}$$

$$s = \alpha\beta\,\frac{(1+g_n)(1+g_z)^{\frac{1}{1-\alpha}} - (1-\delta)}{(1+g_z)^{\frac{\gamma}{1-\alpha}} - \beta(1-\delta)}$$

Απόδειξη : Από τη Συνθήκη Euler και τη σχέση (4.23)

$$\frac{(1+g_z)^{\frac{\gamma}{1-\alpha}}}{\beta} = (1-\delta+\alpha\varphi)$$

$$\frac{(1+g_z)^{\frac{\gamma}{1-\alpha}}}{\beta} - (1-\delta) = \alpha\varphi$$

Έχουμε $$s = \frac{(1+g_n)(1+g_z)^{\frac{1}{1-\alpha}} - (1-\delta)}{\phi} \Leftrightarrow$$

$$s=\frac{(1+g_n)(1+g_z)^{\frac{1}{1-\alpha}}-(1-\delta)}{\frac{(1+g_z)^{\frac{\gamma}{1-\alpha}}}{\alpha\beta}-\frac{(1-\delta)}{\alpha}} \qquad Q.E.D.$$

Από την σχέση $(1+g_n)(1+g_k)=(1-\delta)+s\varphi$

Για $\delta = 1$,

$$s=\alpha\beta(1+g_n)(1+g_z)^{\frac{1-\gamma}{1-\alpha}}$$

<u>Παρατήρηση:</u> Από τα αποτελέσματα αυτά εξάγουμε το συμπέρασμα ότι σε μια χώρα όπου τα νοικοκυριά της τείνουν να είναι πιό υπομονετικά (υψηλό β) και έχουν μικρότερη αποστροφή στον κίνδυνο (χαμηλό γ) θα είναι πλουσιότερα στο μακρύ χρονικό διάστημα αλλά δεν θα γίνονται πλουσιότερα ταχύτερα.

Ασκηση 4.2

1) Δείξτε ότι στο νεοκλασσικό υπόδειγμα οικονομικής μεγέθυνσης ο μικτός ρυθμός αύξησης του προϊόντος ανά νοικοκυριό

$$\left(\frac{\frac{mY_{t+1}}{n_{t+1}}}{\frac{mY_t}{n_t}}=\frac{y_{t+1}}{y_t}\right)$$

χαρακτηρίζεται από τη σχέση:

$$\frac{y_{t+1}}{y_t}=(1+g_z)\frac{f(k_{t+1})}{f(k_t)}$$

2) Ποιός είναι ο μικτός ρυθμός αύξησης του προϊόντος ανά νοικοκυριό στην πορεία σταθερής κατάστασης όπου $k_{t+1}=k_t=k^*$, $\forall t\in N_+$

Ασκηση 4.3

Δείξτε ότι η πορεία σταθερής κατάστασης του ΣΑΙ του υποδείγματος Cass-Koopmans με σταθερά αυξανόμενη συνολική εξωγενή παραγωγικότητα ικανοποιεί τα βασικά χαρακτηριστικά του Kaldor.

.