<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3</u>

Η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΤΗΣ ΝΕΟΚΛΑΣΣΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΜΕΓΕΘΥΝΣΗΣ

3.1 <u>Η Νεοκλασσική Μεθοδολογία στη Σύγχρονη Οικονομική Σκέψη</u>

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τη θεμελίωση και ανάλυση του βασικού υποδείγματος της σύγχρονης Νεοκλασσικής Θεωρίας περί Οικονομικής Μεγέθυνσης.

Πρέπει να επισημανθεί ότι το υπόδειγμα αυτό αποτελεί τη βάση και αφετηρία όλης της σύγχρονης Μακροοικονομικής Θεωρίας, συμπεριλαμβανομένων και των νεότερων θεωριών περί οικονομικής ανάπτυξης. Όπως θα γίνει αντιληπτό αργότερα, πρόκειται για ένα δυναμικό υπόδειγμα γενικής ισορροπίας, όπου τα μακροοικονομικά μεγέθη προσδιορίζονται στο πλαίσιο ενός μικροοικονομικά θεμελιωμένου συμπεριφορικού συστήματος ορθολογικών οικονομικών παραγόντων. Αυτή η προσέγγιση της Μακροοικονομικής μέσω ενός μικροοικονομικά θεμελιωμένου δυναμικού συστήματος γενικής ισορροπίας χαρακτηρίζει εξ'ολοκλήρου τη σύγχρονη Οικονομική σκέψη, τόσο στην Νέα Κλασσική της τάση, όσο και στη Νεοκεϋνσιανή της τάση.

Πρέπει να γίνει σαφές ότι η Νέα Κλασσική και η Νεοκεϋνσιανή τάση δεν διαφοροποιούνται (τουλάχιστον όχι πλέον) ως προς τα θεμελιακά αξιώματα (foundamental axioms) της Οικονομικής Επιστήμης. Η διαφοροποίηση δεν είναι βασικά μεθοδολογική, αλλά μάλλον έγκειται σε πρόσθετες και μη θεμελιακές ή επικουρικές υποθέσεις (auxiliary hypotheses) περί της οικονομικής λειτουργίας των οικονομικών μονάδων. Τουτέστιν, η Νεοκλασσική Μεθοδολογία είναι κοινή σε όλες τις κύριες τάσεις της οικονομικής σκέψης.

Επ' αυτού, πρέπει ίσως να διευκρινιστεί ποια είναι τα βασικά αξιώματα της Νεοκλασσικής Μεθοδολογίας (Neoclassical Methodology). Εφαλτήριο, λοιπόν, όλης της σύγχρονης οικονομικής σκέψης είναι ιδιαίτερα το Αξίωμα της Ορθολογικότητας (Axiom of Rationality) και ο Μεθοδολογικός Ατομισμός (Methodological Individualism). Η δε Ανάλυση Ισορροπίας (Equilibrium Analysis) είναι ο μόνος, αλλά και αξιωματικά ικανός, τρόπος σκέψης που διαθέτουμε.

Το μεν αξίωμα περί ορθολογικότητας απαιτεί ότι κάθε οικονομικός παράγοντας (economic agent) είναι «ορθολογικός» (rational), υπό την ακόλουθη έννοια: από το σύνολο των εφικτών εναλλακτικών επιλογών που του προσφέρονται, επιλέγει πάντοτε εκείνη που ο ίδιος κρίνει βέλτιστη σύμφωνα με τις ειδικές και προσωπικές του προτιμήσεις και με βάση το σύνολο πληροφοριών που ο ίδιος διαθέτει. Για παράδειγμα, η μεγιστοποίηση της χρησιμότητας ή η διαμόρφωση ορθολογικών προσδοκιών είναι άμεση συνέπεια αυτού του αξιώματος. Και γενικότερα, κάθε τύπου υπόθεση περί αριστοποιητικής συμπεριφοράς πηγάζει από το Αξίωμα της Ορθολογικότητας.

Πρέπει δε να επισημανθεί ότι το Αξίωμα της Ορθολογικότητας, εξ ορισμού του ως αξιώματος, είναι μια μη ελέγξιμη υπόθεση (non-testable hypothesis), ήτοι δεν μπορεί να ελεγχθεί ως προς την αλήθεια της έναντι της πραγματικότητας. Κάθε αξίωμα είναι μία a priori παραδοχή που υιοθετείται προκειμένου να αποτελέσει έναν θεμέλιο λίθο σε κάποιο λογικά συνεπές θεωρητικό σχήμα. Εκείνο που μπορεί να ελεγχθεί εμπειρικά είναι μόνο το μέρος της Θεωρίας που αναφέρεται σε κάποιες πρόσθετες υποθέσεις που περιβάλλουν τα αξιώματα αυτά κατά περίπτωση και κτίζουν πάνω σε αυτά ένα ειδικότερο θεωρητικό σύστημα (υπόδειγμα). Για παράδειγμα, δεν είναι δυνατό να ελέγξουμε εάν ένας καταναλωτής μεγιστοποιεί τη χρησιμότητά του, ούτε εάν οι προσδοκίες που σχηματίζει είναι ορθολογικές. Ο καταναλωτής είναι εξ ορισμού ορθολογικός και εκείνο που μπορεί ίσως να ελεγχθεί είναι οι ειδικότερες υποθέσεις περί του τύπου των προτιμήσεών του. Αντίστοιχα, οι προσδοκίες είναι αξιωματικά ορθολογικές και εκείνο που μπορεί να ελεγχθεί είναι οι πρόσθετες υποθέσεις περί του συνόλου των διαθέσιμων πληροφοριών.

Ο δε Μεθοδολογικός Ατομισμός, απαιτεί ότι όλα τα οικονομικά φαινόμενα πρέπει να εξηγούνται στη βάση της ατομικής συμπεριφοράς ενός και κάθε ατόμου. Δεν μπορούμε να μιλάμε περί της συλλογικής συμπεριφοράς μιας ομάδας ή άλλης ενότητας ατόμων ως αν ετούτη να ήταν ένα άτομο, διότι τότε ίσως να διαπράττουμε το σοβαρότερο σφάλμα σύνθεσης. Αντίθετα, πρέπει να εξηγούμε οποιαδήποτε συλλογική (collective) επιλογή και ενέργεια ως αποτέλεσμα ενός συνόλου ατομικών (individual) επιλογών και ενεργειών. Τούτη η προσέγγιση είναι μια αξιωματική προσέγγιση και είναι αναπόσπαστη από τη σύγχρονη οικονομική σκέψη. Άμεση δε συνέπεια αυτής είναι η ανάγκη και απαίτηση για μικροοικονομική θεμελίωση των μακροοικονομικών υποδειγμάτων.

Η χρήση, λοιπόν, στα πλαίσια τόσο του Νεοκλασσικού Υποδείγματος Οικονομικής Μεγέθυνσης, όσο και των άλλων υποδειγμάτων που θα αναλύσουμε σε τούτο το βιβλίο, της έννοιας της αντιπροσωπευτικής οικονομικής μονάδας (αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό και αντιπροσωπευτική επιχείρηση) είναι βέβαια μια ιδιαίτερα αφαιρετική και απλουστευτική θεωρητική κατασκευή, αλλά έρχεται σε πλήρη αρμονία με τα προαναφερθέντα θεμελιώδη αξιώματα της Οικονομικής Επιστήμης.

Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ανεπιφύλακτα ότι η Νεοκλασσική Μεθοδολογία αποτελεί τη μόνη μεθοδολογία για την κατασκευή μίας λογικά συνεπούς και αυστηρά δομημένης θεωρίας στα πλαίσια της Οικονομικής Ανάλυσης. Τούτη η προσέγγιση, εξάλλου, έρχεται σε κάποια αντίθεση με την προγενέστερη και κεϋνσιανή ανάλυση, που υιοθετούσε μια τεχνητή διάκριση μεταξύ της Μικροοικονομικής και της Μακροοικονομικής και που αποτελούσε μια ad hoc ερμηνευτική προσέγγιση των (μακρο)οικονομικών φαινομένων, καθώς έτεινε να αγνοεί την αριστοποιητική συμπεριφορά των ατόμων.

Επαναλαμβάνουμε δε, ότι τα θεμελιώδη αξιώματα της Νεοκλασσικής Μεθοδολογίας δεν μπορούν να ελεγχθούν εμπειρικά, ούτε τίθενται υπό αμφισβήτηση. Οι θεωρητικές διαφωνίες και διαμάχες δεν αφορούν αυτά καθαυτά τα μεθοδολογικά θεμέλια της Οικονομικής Επιστήμης, αλλά εστιάζονται στις πρόσθετες υποθέσεις που υιοθετούνται κατά περίπτωση. Δύο παραδείγματα τέτοιων πρόσθετων υποθέσεων είναι η υπόθεση περί εκκαθάρισης των αγορών και η υπόθεση περί συνθηκών τέλειου ανταγωνισμού. Και είναι σε αυτές κυρίως τις δύο υποθέσεις που γίνεται η διαφοροποίηση μεταξύ Νέας Κλασσικής και Νεοκεϋνσιανής τάσης.

3.2 Το Νεοκλασσικό Υπόδειγμα Οικονομικής Μεγέθυνσης

3.2.1 Εισαγωγή

Η βιβλιογραφία του Νεοκλασσικού Υποδείγματος της Οικονομικής Μεγέθυνσης είναι τεράστια. Ως αρχή της δε, συνήθως θεωρείται το σχετικό άρθρο του Robert Solow το 1956.[1]

Και όντως, η επίδραση του άρθρου αυτού στη σύγχρονη Μακροοικονομική Ανάλυση υπήρξε σημαντικότατη και επαναστατική. Οφείλουμε, ωστόσο, να επισημάνουμε, για χάρη της ιστορικής αλήθειας, ότι είναι ο F.Ramsey που είχε ουσιαστικά προηγηθεί -και πολύ νωρίτερα μάλιστα, το 1928- στη μαθηματική θεμελίωση του σύγχρονου νεοκλασσικού υποδείγματος, αλλά η συνεισφορά του έγινε αντιληπτή μόνο μετά την έκδοση του άρθρου του Robert Solow (1956) και κυρίως μέσα από τα άρθρα των David Cass (1965) και Tjalling Koopmans (1965).[2]

Στο σημαντικό αυτό άρθρο του, που του χάρισε και το Βραβείο Nobel το 1987, ο Robert Solow είχε σαν αντικειμενικό σκοπό την εξήγηση των βασικών χαρακτηριστικών της οικονομικής ανάπτυξης, όπως τούτα αργότερα καταγράφηκαν από τον Kaldor (1961), παίρνοντας ως πρώτο βασικό χαρακτηριστικό, ότι ο ρυθμός αύξησης της παραγωγικότητας είναι σταθερός. Το υπόδειγμα του Solow (1956) περιγράφει τη συμπεριφορά μίας οικονομίας μέσω ενός δυναμικού συστήματος γενικής ισορροπίας (dynamic general equilibrium system). Η μικροοικονομική θεμελίωση όμως λείπει από το υπόδειγμα αυτό,

---

1 Αν και η πολύ δόξα πήγε στο R.Solow, εντούτοις θεωρείται ότι το βασικό Νεοκλασικό Υπόδειγμα αναπτύχθηκε ανεξάρτητα και από το T.Swan (1956). Εδώ, πάντως, θα εξακολουθήσουμε να αδικούμε το Swan για να μη δημιουργηθεί σύγχυση με τη σχετική βιβλιογραφία.

2 Για να είμαστε ακριβείς, πάντως, πρέπει να σημειώσουμε ότι ο Ramsey (1928) είχε θεωρήσει το υπόδειγμά του μάλλον ως μια θεωρία αποταμιεύσεων παρά ως μια θεωρία γενικής ισορροπίας και οικονομικής ανάπτυξης.

καθώς ο Solow, όπως θα δούμε παρακάτω, παραβλέπει την αριστοποιητική συμπεριφορά των οικονομικών μονάδων και ειδικότερα κάνει μια ad hoc υπόθεση για την καταναλωτική και αποταμιευτική συμπεριφορά των ατόμων, αν και τούτη η υπόθεση, όπως θα γίνει αντιληπτό παρακάτω, δεν είναι ιδιαίτερα περιοριστική ή κρίσιμη για τα ποιοτικά συμπεράσματα της Θεωρίας.

Αργότερα, ο Cass (1965) και ο Koopmans (1965), ακολουθώντας το κατά πολύ προγενέστερο και πρωτοπόρο άρθρο του Ramsey (1928), διόρθωσαν το υπόδειγμα του Solow όσον αφορά την μικροοικονομική του θεμελίωση και ωσαύτως γενίκευσαν το Νεοκλασικό Υπόδειγμα. Στις ανεξάρτητες αλλά ταυτόσημες εργασίες τους, οι Cass (1965) και Koopmans (1965) ξαναέκτισαν το υπόδειγμα του Solow στη βάση της αριστοποιητικής συμπεριφοράς ορθολογικών οικονομικών μονάδων, για να διατυπώσουν έτσι το Νεοκλασσικό Υπόδειγμα στην τελική του μορφή ως ένα πλήρες δυναμικό υπόδειγμα γενικής ισορροπίας της οικονομίας.

3.2.2 <u>Οι Βασικές Υποθέσεις του Νεοκλασσικού Υποδείγματος</u>

Οι βασικές υποθέσεις του Νεοκλασσικού Υποδείγματος Οικονομικής Μεγέθυνσης είναι οι εξής:

(*i*) Η οικονομία αποτελείται από ένα δεδομένο σε κάθε χρονική περίοδο αριθμό νοικοκυριών. Ο αριθμός των νοικοκυριών δύναται να αυξάνεται στο χρόνο με σταθερό ρυθμό ο οποίος δεν επηρεάζεται από καμία άλλη μεταβλητή της οικονομίας είναι δηλαδή, εξωγενής.[3]

(*ii*) Όλα τα νοικοκυριά είναι όμοια μεταξύ τους, υπό την έννοια ότι έχουν τις ίδιες προτιμήσεις, τον ίδιο αρχικό πλούτο, και τις ίδιες παραγωγικές ικανότητες

[3] Η υπόθεση αυτή, που δεν είναι ιδιαίτερα περιοριστική ή κρίσιμη, χαλαρώνεται στα πλαίσια του υποδείγματος των Becker & Barro (1988), το οποίο και αναλύουμε σε επόμενο κεφάλαιο. Όπως θα δούμε, στο υπόδειγμα αυτό η γεννητικότητα είναι ενδογενής, οπότε και το πλήθος των νοικοκυριών προσδιορίζεται ενδογενώς σύμφωνα με τις επιλογές των γονέων για τον αριθμό των παιδιών που θα αποκτήσουν.

όσον αφορά την ομοιογενή εργασία που προσφέρουν.[4] Οι δε προτιμήσεις τους είναι διαχρονικά συνεπείς.[5]

(*iii*) Η παραγωγή γίνεται σε επιχειρήσεις δεδομένου πλήθους,[6] που μπορούν να διαφέρουν ως προς το μέγεθός τους αλλά όχι ως προς την τεχνολογία τους.

(*iv*) Στην οικονομία παράγεται ένα, μοναδικό και απόλυτα ομοιογενές προϊόν, το οποίο μπορεί είτε να καταναλωθεί άμεσα, είτε να επενδυθεί ως κεφάλαιο στην ίδια του τη μορφή. Τουτέστιν, τόσο η κατανάλωση όσο και η επένδυση έχουν την ίδια φυσική και υλική υπόσταση.[7] Αντίστοιχα ομοιογενές είναι δε και το κεφάλαιο.

(*v*) Όλοι οι παραγωγικοί συντελεστές αποτελούν ιδιοκτησία των νοικοκυριών, τα οποία ενοικιάζουν τις υπηρεσίες τους στις επιχειρήσεις και αγοράζουν από αυτές το προϊόν τους, το οποίο μπορούν είτε να καταναλώνουν είτε να αποταμιεύσουν και να επενδύσουν.

(*vi*) Οι επιχειρήσεις παράγουν ένα μοναδικό ομοιογενές προϊόν, χρησιμοποιώντας υπηρεσίες κεφαλαίου και εργασίας σύμφωνα με μία συνάρτηση παραγωγής που χαρακτηρίζεται από:

- (*vi.α*) Σταθερές αποδόσεις κλίμακας.
- (*vi.β*) Συνεχή οριακά προϊόντα.
- (*vi.γ*) Θετικά οριακά προϊόντα.
- (*vi.δ*) Φθίνοντα οριακά προϊόντα.

---

4 Θα μπορούσαμε λοιπόν να ομιλούμε περί ενός και μόνο νοικοκυριού, ως εάν η οικονομία να είναι μια ατομική οικονομία τύπου του Ρομβισόνα Κρούσου (a Rombinson Crouse's economy), όπως συνήθως αποκαλείται στη βιβλιογραφία.

5 Η έννοια της διαχρονικής συνέπειας ή ασυνέπειας (time consistency or inconsistency) των προτιμήσεων επεξηγείται παρακάτω, στην ενότητα 3.3.3. Βλέπετε επίσης στο Blanchard & Fischer (1989), section 2.5.

6 Όπως είναι γνωστό, το πλήθος των επιχειρήσεων σε μία τέλεια ανταγωνιστική και Pareto αποτελεσματική ισορροπία δεν παίζει κανένα ρόλο εν γένει. Τούτο θα γίνει φανερό και στα πλαίσια του Νεοκλασικού Υποδείγματος που αναλύουμε εν προκειμένω.

7 Ως συνηθέστερο παράδειγμα ενός τέτοιου προϊόντος, που μπορεί στην ίδια του την μορφή είτε να καταναλωθεί, είτε να επενδυθεί, παρουσιάζεται στη βιβλιογραφία το παράδειγμα των σιτηρών ή του καλαμποκιού, καθώς τα σιτηρά μπορούν χρησιμοποιηθούν είτε ως τροφή, οπότε και να καταναλωθούν, είτε ως σπόροι, οπότε και να επενδυθούν (να καλλιεργηθούν, δηλαδή, στη γη). Για το λόγο αυτό και τα υποδείγματα που υποθέτουν ένα και μόνο ομοιογενές προϊόν είναι γνωστά στη βιβλιογραφία ως 'corn-economy models'.

(*vi.ε*) Αναντικατάστατους παραγωγικούς συντελεστές.

(*vi.στ*) Το οριακό προϊόν (οριακή παραγωγικότητα) κάθε συντελεστή προσεγγίζει το μηδέν (συν άπειρο) καθώς η απασχολούμενη ποσότητα των υπηρεσιών του αντίστοιχου συντελεστή προσεγγίζει το άπειρο (μηδέν).

(*vii*) Η αύξηση της παραγωγικότητας η οποία δεν μπορεί να αποδοθεί στην αύξηση των ποσοτήτων των παραγωγικών συντελεστών υπό συνθήκες σταθερών αποδόσεων κλίμακας, ονομάζεται *μεγέθυνση της συνολικής παραγωγικότητας* (total factor productivity growth), και γίνεται με σταθερό εξωγενή ρυθμό.[8]

(*viii*) Η απόσβεση του φυσικού κεφαλαίου είναι ένα σταθερό πολλαπλάσιο του υπάρχοντος κεφαλαίου.

(*ix*) Όλες οι οικονομικές μονάδες είναι λήπτες τιμών (price takers) και, κατά συνέπεια, όλες οι αγορές είναι τέλεια ανταγωνιστικές. Έτσι, τα νοικοκυριά και οι επιχειρήσεις παίρνουν τις τιμές του προϊόντος και των υπηρεσιών των παραγωγικών συντελεστών σαν δεδομένες και τα μεν νοικοκυριά επιλέγουν την προσφορά των υπηρεσιών των παραγωγικών συντελεστών και τη ζήτηση του προϊόντος για κατανάλωση και επένδυση ώστε να μεγιστοποιήσουν την ευημερία τους υπό τον περιορισμό του εισοδήματός τους, οι δε επιχειρήσεις επιλέγουν τη ζήτηση των υπηρεσιών των παραγωγικών συντελεστών και την προσφορά του προϊόντος ώστε να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη τους υπό τον περιορισμό της τεχνολογίας.

Παρατήρηση: Η ομοιογένεια των νοικοκυριών είναι μια θεωρητική αφαίρεση που μας επιτρέπει να ομιλούμε περί ενός αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού ως αν τούτο να ήταν και το μοναδικό. Η υπόθεση (*ii*) δικαιολογείται δε στη βάση του επιχειρήματος ότι ενδιαφερόμαστε περισσότερο για τα χαρακτηριστικά της ισορροπίας και για τη μεγέθυνση της οικονομίας στο σύνολό της, παρά για τις

[8] Όπως θα γίνει σαφές στα παρακάτω κεφάλαια, τα σύγχρονα υποδείγματα περί ενδογενούς οικονομικής μεγέθυνσης επιχειρούν να ερμηνεύσουν την αύξηση την συνολικής παραγωγικότητας αίροντας κατά τον ένα ή άλλο τρόπο την υπόθεση των σταθερών αποδόσεων κλίμακας ως προς το σύνολο των παραγωγικών συντελεστών. Τούτο γίνεται συνήθως είτε με την εισαγωγή κάποιων εξωτερικοτήτων (externalities) στη διαδικασία παραγωγής και συσσώρευσης κεφαλαίου και νέας γνώσης και τεχνογνωσίας και την παράλληλη διατήρηση της υπόθεσης περί τέλειου ανταγωνισμού, είτε με την εισαγωγή μονοπωλιακών στοιχείων συμβατών με τις αύξουσες αποδόσεις σε κάποιο στάδιο παραγωγής.

όποιες διαφορές μεταξύ των οικονομικών μονάδων. Εξάλλου, η ειδικότερη υπόθεση περί ίδιου αρχικού πλούτου και ίδιων δυνατοτήτων θα μπορούσε να παραληφθεί εάν εναλλακτικά υποθέσουμε ίδιες αλλά και ομοθετικές προτιμήσεις. Σε αυτή την περίπτωση το μέγεθος του πλούτου ή εισοδήματος δεν επηρεάζει την κατανομή της κατανάλωσης για το κάθε συγκεκριμένο νοικοκυριό, οπότε και η κατανομή του πλούτου ή εισοδήματος δεν επηρεάζει την ισορροπία της οικονομίας. Σε αυτή την περίπτωση θα μπορούσαμε να ομιλούμε περί του μέσου νοικοκυριού αντί του αντιπροσωπευτικού και δεν θα υπήρχε καμία διαφορά όσον αφορά τη γενική ισορροπία της οικονομίας και τα συμπεράσματα του υποδείγματος. Εάν ωστόσο υπάρχει ανομοιογένεια μεταξύ των νοικοκυριών ως προς τις προτιμήσεις τους, τότε δεν δικαιούμαστε να χρησιμοποιήσουμε την έννοια του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού, αλλά πρέπει να εξετάσουμε τη συμπεριφορά του κάθε τύπου νοικοκυριών ξεχωριστά. Κάτι τέτοιο αφενός ξεφεύγει από τα όρια του παρόντος βιβλίου, αλλά και δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο θεωρητικό ενδιαφέρον.

<u>Παρατήρηση</u>: Ιδιαίτερη σημασία έχει και η υπόθεση (*vi*.α) περί των σταθερών αποδόσεων κλίμακας ως προς το σύνολο των αμειβόμενων παραγωγικών συντελεστών και η υπόθεση (*vi*.δ) περί της φθίνουσας αποδοτικότητας του κεφαλαίου. Η μεν υπόθεση των σταθερών αποδόσεων ως προς το σύνολο των εισροών είναι κρίσιμη για την ύπαρξη συνθηκών τέλειου ανταγωνισμού στις αγορές και συνεπάγεται ότι το μέγεθος της οικονομίας δεν παίζει κανένα ρόλο στο ρυθμό ανάπτυξης της οικονομίας. Η δε υπόθεση της φθίνουσας αποδοτικότητας του κεφαλαίου, όπως θα γίνει σαφές αργότερα, είναι κρίσιμη για το συμπέρασμα ότι ο μακροχρόνιος ρυθμός οικονομικής μεγέθυνσης θα είναι μηδέν εάν δεν υπάρχει εξωγενής αύξηση της συνολικής παραγωγικότητας.

<u>Παρατήρηση</u>: Είναι δυνατόν κανείς να υποκαταστήσει την υπόθεση (*vii*) με την στοχαστική της εναλλακτική. Δηλαδή, να υποθέσει ότι ο ρυθμός αύξησης της συνολικής παραγωγικότητας ακολουθεί μια *στοχαστική διαδικασία* (stochastic process), αλλά και ότι τούτη διέπεται από έναν εξωγενή νόμο πιθανότητας (probability law). Αυτό έγινε από τους Brock & Mirman (1971). Η

υποκατάσταση αυτή έχει πολλές τεχνικές δυσκολίες αλλά δίνει στο υπόδειγμα ρεαλισμό και επιτρέπει την ταυτόχρονη εξέταση των φαινομένων της οικονομικής μεγέθυνσης και των οικονομικών διακυμάνσεων, κάτι το οποίο έγινε ιδιαίτερα από τους Kydland & Prescott (1982) και Long & Plosser (1983) και οδήγησε έτσι στη *Θεωρία των Πραγματικών Οικονομικών Κύκλων* (Real Business Cycles).[9]

3.2.3 <u>Η Πρόσθετη Υπόθεση του Solow.</u>

Ειδικά για το υπόδειγμα του Solow, το οποίο, όπως θα δούμε αργότερα, αποτελεί ειδική περίπτωση του υποδείγματος των Cass και Koopmans, γίνεται και η ακόλουθη πρόσθετη υπόθεση. Οι προτιμήσεις των νοικοκυριών είναι τέτοιες ώστε:

(*x.α*) Η προσφορά των υπηρεσιών των παραγωγικών συντελεστών είναι τέλεια ανελαστική, ήτοι δεδομένου μεγέθους.

(*x.β*) Το ποσοστό του εισοδήματός τους που αποταμιεύεται και επενδύεται είναι επίσης δεδομένο και παραμένει σταθερό στο χρόνο.[10]

Η τελευταία αυτή υπόθεση του Solow είναι μάλλον περιοριστική και δεν είναι συμβατή με τα κύρια γνωρίσματα των περισσοτέρων οικονομιών. Παρόλα αυτά, οι βασικές εξηγήσεις του υποδείγματος του Solow δεν αλλάζουν και τα ποιοτικά συμπεράσματα δεν διαφοροποιούνται ιδιαίτερα εάν κανείς αφαιρέσει την υπόθεση αυτή και γενικεύσει το υπόδειγμα του Solow. Αυτό έγινε, όπως είπαμε, στα δύο φημισμένα άρθρα των Cass (1965) και Koopmans (1965), όπου

[9] Για ανασκόπηση και ανάλυση της σχετικής θεωρίας παραπέμπεστε στο Blanchard & Fischer (1989), ch. 7, καθώς και στο Barro (1989).

[10] Η υπόθεση του σταθερού ποσοστού αποταμίευσης ήταν συμβατή με τη γενικότερη κεϋνσιανή τάση της εποχής σχετικά με τις θεωρίες κατανάλωσης και αποταμίευσης. Πρέπει, πάντως, να σημειώσουμε ότι ο Solow (1956) εξέτασε και ορισμένες περιπτώσεις όπου το ποσοστό αποταμίευσης ήταν μεταβαλλόμενο. Η σχετική αντιμετώπιση του ζητήματος της αποταμίευσης από το Solow, όμως, βασιζόταν σε καθαρά ad hoc υποθέσεις και σε καμία περίπτωση δεν προχώρησε ο ίδιος στην μικροοικονομική ανάλυση της υποκείμενης ορθολογικής συμπεριφοράς των καταναλωτών-νοικοκυριών. Τούτο, όπως επισημάναμε, έγινε από τους Cass (1965) και Koopmans (1965) στη βάση της προσέγγισης του Ramsey (1928).

το ποσοστό αποταμίευσης και η προσφορά εργασίας προσδιορίζονται ενδογενώς μέσω της αριστοποιητικής συμπεριφοράς των νοικοκυριών και των επιχειρήσεων.

3.2.4 Η Ισορροπία της Οικονομίας στο Νεοκλασσικό Υπόδειγμα.

Τόσο στο εν προκειμένω εξεταζόμενο Νεοκλασσικό Υπόδειγμα, όσο και σε άλλα υποδείγματα οικονομικής ανάπτυξης που αναλύουμε σε επόμενα κεφάλαια, η διαχρονική ή δυναμική πορεία ή τροχιά (intertemporal or dynamic trajectory or path) της οικονομίας χαρακτηρίζεται ως προς το σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας (competitive equilibrium). Το σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας (ή ΣΑΙ, εφ' εξής) αποτελείται από ένα διάνυσμα ζητουμένων και προσφερομένων ποσοτήτων (προϊόντος, κατανάλωσης, επενδύσεων, κεφαλαίου και εργασίας) και ένα διάνυσμα σχετικών τιμών (πραγματικό κόστος χρήσης κεφαλαίου, πραγματικό μισθό και πραγματικά κέρδη) που αντιστοιχούν:

(α) Στη λύση του προβλήματος του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού.
(β) Στη λύση του προβλήματος της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης.
(γ) Στην εκκαθάριση των αγορών προϊόντος και εισροών.

Είναι λοιπόν προφανές από τα ανωτέρω ότι η ανάλυσή μας είναι μια *ανάλυση ισορροπίας* (equilibrium analysis) και ότι ειδικότερα πρόκειται για ένα δυναμικό υπόδειγμα γενικής ισορροπίας.

<u>Παρατήρηση</u>: Στην παρουσίαση του υποδείγματος θα είμαστε ιδιαίτερα αναλυτικοί, προκειμένου να γίνει πλήρως κατανοητό το υπόδειγμα σε όλες του τις πτυχές, και θα εξετάσουμε με λεπτομέρεια τη συμπεριφορά όλων των μεγεθών. Συμβαίνει, πάντως, ο λόγος *κεφαλαίου-εργασίας* να είναι το μέγεθος που καθορίζει το σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας κατά μοναδικό τρόπο. Τούτο θα γίνει αντιληπτό κατά την παρουσίαση του υποδείγματος.

Πριν αναφερθούμε στις ιδιότητες του σημείου ανταγωνιστικής ισορροπίας, αξίζει να σημειωθεί ότι το υπόδειγμα του Solow συνήθως παρουσιάζεται ως το πρόβλημα ενός κοινωνικού σχεδιαστή (social planner or Ramsey government), ο οποίος προσπαθεί να μεγιστοποιήσει την ευημερία του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού υπό τους περιορισμούς της τεχνολογίας και των πόρων της οικονομίας. Αυτό γίνεται γιατί η λύση του τελευταίου προβλήματος, αν και ευκολότερη, ταυτίζεται με το σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας ως προς τις ποσότητες. Κατά μία βαθύτερη έννοια, όμως, τούτο είναι επακόλουθο του Πρώτου Θεμελιώδους Θεωρήματος των Οικονομικών της Ευημερίας (First Fundamental Theorem of Welfare Economics) ή του Θεωρήματος του Adam Smith περί της Αοράτου Χειρός (Invisible Hand Theorem). Σύμφωνα με αυτό το θεώρημα, υπό ορισμένες συνθήκες που στο προκείμενο υπόδειγμα ικανοποιούνται, κάθε σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας είναι άριστο κατά Pareto (Pareto Optimum).

Όπως ήδη έχουμε αφήσει να εννοηθεί, το υπόδειγμα αυτό μπορεί να εξηγήσει τα κύρια γνωρίσματα του Kaldor. Αλλά ακόμη πιο ενδιαφέρον είναι ο τρόπος με τον οποίο τα εξηγεί και ο οποίος περιλαμβάνει ίσως αρκετές εκπλήξεις.

Πολύ συμπερασματικά μπορούμε να πούμε τα ακόλουθα για τη συμπεριφορά ισορροπίας της οικονομίας στα πλαίσια του βασικού Νεοκλασσικού Υποδείγματος:

- Το σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας της οικονομίας ακολουθεί ένα νόμο κίνησης που στην απουσία εξωγενούς αύξησης της συνολικής παραγωγικότητας τείνει σε ένα σταθερό λόγο κεφαλαίου-εργασίας.
- Μία χώρα μπορεί να μεγεθύνεται στην πορεία της από ένα χαμηλότερο λόγο κεφαλαίου-εργασίας προς τον σταθερό λόγο κεφαλαίου-εργασίας (ήτοι στην πορεία σύγκλισης προς τη στάσιμη ισορροπία της), αλλά πέρα από αυτό μπορεί να μεγεθύνεται μόνο εάν αυξάνεται εξωγενώς και διαρκώς η συνολική παραγωγικότητά της. Με άλλα λόγια, εάν δεν υπάρχει εξωγενής αύξηση της συνολικής παραγωγικότητας η οικονομία σταδιακά συγκλίνει προς μία κατάσταση μακροχρόνιας στασιμότητας.
- Ο ρυθμός μακροχρόνιας οικονομικής μεγέθυνσης είναι εξωγενής και προσδιορίζεται από το ρυθμό της εξωγενούς τεχνολογικής εξέλιξης.

- Εφόσον οι τεχνολογία είναι κοινή για όλες τις οικονομίες, προβλέπεται σταδιακή σύγκλιση των ρυθμών οικονομικής μεγέθυνσης μεταξύ των φτωχότερων και των πλουσιότερων οικονομιών.

Ένα δε πολύ σπουδαίο συμπέρασμα για την οικονομική πολιτική είναι ότι δεν υπάρχει κανένας λόγος για άσκηση οικονομικής πολιτικής. Ειδικότερα:

- Η άσκηση οικονομικής πολιτικής μπορεί να επηρεάζει τον σταθερό λόγο κεφαλαίου-εργασίας και την πορεία σύγκλισης προς αυτόν, αλλά όχι και τη μακροχρόνια μεγέθυνση της οικονομίας, καθώς ο ρυθμός αύξησης της συνολικής παραγωγικότητας και, κατ’ επέκταση, ο ρυθμός μακροχρόνιας οικονομικής μεγέθυνσης είναι εξωγενής.
- Κάθε δε στρεβλωτική (distortionary, non-lump-sum) παρέμβαση της κυβέρνησης θα έχει ως αποτέλεσμα την καθαρή μείωση της κοινωνικής ευημερίας. Και τούτο διότι το ΣΑΙ είναι ήδη Pareto Optimum, οπότε οποιαδήποτε στρεβλωτική παρέμβαση θα οδηγήσει σε απόκλιση από τη (στατικά και διαχρονικά) αποτελεσματική κατανομή των πόρων.

Στα πλαίσια του υποδείγματος αυτού, λοιπόν, η οικονομία πετυχαίνει αυτόματα το λεγόμενο «Χρυσό Κανόνα»[11] της οικονομικής ανάπτυξης (Golden Rule) και δεν υπάρχει χώρος για την άσκηση οποιασδήποτε αναπτυξιακής οικονομικής πολιτικής.[12]

---

11 Μπορεί να δειχθεί ότι υπάρχει ένα και μοναδικό ποσοστό αποταμίευσης $s = \dfrac{f'(k^*)\cdot k^*}{f(k^*)}$ για το οποίο μεγιστοποιείται η κατανάλωση ανά νοικοκυριό στην σταθερή κατάσταση.

12 Τα σχετικά συμπεράσματα περί της αποτελεσματικότητας κατά Pareto του ΣΑΙ και του αντίστοιχου ρόλου της οικονομικής πολιτικής μπορούν να μεταβληθούν μερικώς και υπό ορισμένες προϋποθέσεις στα πλαίσια του εναλλακτικού υποδείγματος των επαλλήλων γενεών (overlapping-generations model). Σε αυτό το υπόδειγμα είναι δυνατό το ΣΑΙ να μην επιτυγχάνει αποτελεσματικότητα στη διαχρονική κατανομή των πόρων και η συσσώρευση του κεφαλαίου να μην ακολουθεί το Χρυσό Κανόνα, οπότε και πλέον υπάρχει χώρος για την άσκηση οικονομικής πολιτικής.

3.3 Το Υπόδειγμα Cass-Koopmans με Πεπερασμένο Χρονικό Ορίζοντα

3.3.1 Εισαγωγή

Όπως τονίσαμε επανειλημμένα, η Νεοκλασσική Μεθοδολογία, που ενσωματώνεται τόσο χαρακτηριστικά στο βασικό Νεοκλασσικό Υπόδειγμα της Οικονομικής Μεγέθυνσης, αποτελεί το θεμέλιο λίθο όλης της σύγχρονης Μακροοικονομικής Θεωρίας και την κοινή βάση όλων των σχετικών υποδειγμάτων.

Είναι, λοιπόν, παιδαγωγικά σκόπιμο να ξεκινήσουμε από την αναλυτική παρουσίαση του δυναμικού υποδείγματος γενικής ισορροπίας των Cass (1965) και Koopmans (1965). Θα μπορέσουμε έτσι να αναπτύξουμε την κοινή μεθοδολογία και να αναλύσουμε τα βασικά συστατικά στοιχεία όλων των άλλων δυναμικών υποδειγμάτων γενικής ισορροπίας που θα μας απασχολήσουν αργότερα.

Το υπόδειγμα αυτό μπορεί να παρουσιαστεί με πολλούς τρόπους. Οι τρόποι αυτοί διαφέρουν κυρίως σε δύο σημεία. Πρώτον, στο εάν ο χρόνος θεωρείται *συνεχής* ή *διακριτή* μεταβλητή· και δεύτερον, στο εάν ο χρονικός ορίζοντας θεωρείται *πεπερασμένος* ή *άπειρος*.

Όσον αφορά το πρώτο σημείο, σε όλα τα υποδείγματα που παρουσιάζουμε στο βιβλίο αυτό, θα θεωρήσουμε το χρόνο ως διακριτή μεταβλητή. Τούτο σημαίνει ότι τα σχετικά υποδείγματα έχουν τροποποιηθεί καταλλήλως προκειμένου να παρουσιαστούν ως έχουν στο βιβλίο αυτό, καθώς στο πρωτότυπο τους συνήθως ο χρόνος είναι συνεχής. Αυτή η τροποποίηση, αν και έχει κάποιο κόστος από την πλευρά του μαθηματικού χειρισμού, μας επιτρέπει να καταστήσουμε πιο εύληπτες και κατανοητές τις βαθύτερες οικονομικές έννοιες που κρύβονται πίσω από τις αντίστοιχες μαθηματικές σχέσεις και συνάμα, να αναπτύξουμε μια ενιαία μεθοδολογία για όλο το σύγγραμμα αυτό: όλα τα υποδείγματα παρουσιάζονται στην μορφή τους για διακριτό χρόνο.[13]

[13] Τούτη η ενιαία μεθοδολογία, μαζί με την κάλυψη του κύριου όγκου της σχετικής σύγχρονης αρθρογραφίας, καθιστά το βιβλίο αυτό πρωτοπόρο και ίσως μοναδικό

Όσον αφορά το δεύτερο σημείο, μόνο στην τρέχουσα ενότητα και για καθαρά παιδαγωγικούς λόγους θα θεωρήσουμε τον χρονικό ορίζοντα ως πεπερασμένο. Θα υποθέσουμε ειδικότερα ότι εν προκειμένω έχουμε μια οικονομία με ορίζοντα δύο μόνο περιόδων. Στις αμέσως επόμενες ενότητες, όμως, θα επεκτείνουμε την ανάλυσή μας στην περίπτωση του άπειρου χρονικού ορίζοντα. Και σε όλα τα μετέπειτα κεφάλαια θα ασχολούμαστε μόνο με αυτή την περίπτωση.

3.3.2 Βασικές Υποθέσεις του Υποδείγματος Cass-Koopmans

Έστω μία οικονομία που αποτελείται από ένα «μεγάλο» αριθμό νοικοκυριών, *n*, και ένα «μεγάλο» αριθμό επιχειρήσεων, *m*. Λόγω του «μικρού» μεγέθους τους, τόσο τα νοικοκυριά, όσο και οι επιχειρήσεις, είναι λήπτες τιμών (price takers). Τα νοικοκυριά είναι όμοια μεταξύ τους και το κάθε ένα από αυτά έχει ζωή δύο περιόδων. Οι επιχειρήσεις είναι επίσης όμοιες μεταξύ τους και παράγουν ένα ομοιογενές προϊόν, χρησιμοποιώντας δύο ομοιογενείς παραγωγικούς συντελεστές, το φυσικό κεφάλαιο και την ανθρώπινη εργασία. Το παραγόμενο σε κάθε περίοδο ομοιογενές προϊόν, μπορεί είτε να καταναλωθεί άμεσα, είτε να αποταμιευθεί και επενδυθεί για να αποτελέσει κεφάλαιο για την αμέσως επόμενη περίοδο. Οι παραγωγικοί συντελεστές και οι επιχειρήσεις είναι ιδιοκτησία των νοικοκυριών, τα οποία νοικιάζουν τις υπηρεσίες του κεφαλαίου και της εργασίας τους στις επιχειρήσεις έναντι κάποιων αμοιβών και παράλληλα αγοράζουν από αυτές το προϊόν τους, είτε για να το καταναλώσουν, είτε για να το επενδύσουν. Οι αγορές του προϊόντος και των παραγωγικών συντελεστών είναι τέλεια ανταγωνιστικές. Δηλαδή, κανένας οικονομικός παράγοντας δεν μπορεί να επηρεάζει τις τιμές.

Στο υπόδειγμα που παρουσιάζουμε στην προκείμενη ενότητα, ο χρονικός ορίζοντας των νοικοκυριών είναι πεπερασμένος (finite time horizon), έστω

στη διεθνή βιβλιογραφία περί της Θεωρίας της Οικονομικής Ανάπτυξης. Τα λιγοστά ανάλογης ύλης συγγράμματα που κυκλοφορούν στη διεθνή αγορά, όπως εκείνο των Barro & Sala-i-Martin (1995), δεν διέπονται από μια τέτοια ενιαία μεθοδολογική παρουσίαση, καθώς άλλα υποδείγματα παρουσιάζονται με διακριτό χρόνο και άλλα με συνεχή.

αποτελούμενος από δύο διαδοχικές χρονικές περιόδους (τις περιόδους 1 και 2, εφ' εξής). Η ερμηνεία μπορεί να είναι ότι τα εξεταζόμενα νοικοκυριά ζουν δύο μόνο περιόδους και μετά τούτων πεθαίνουν, πιθανώς αφήνοντας κάποιο φυσικό κεφάλαιο ως κληρονομιά στα επιγενόμενα νοικοκυριά.

3.3.3 Τα Νοικοκυριά και η Οικονομική Συμπεριφορά τους

3.3.3.α *Οι Προτιμήσεις των Νοικοκυριών*

Όπως έχουμε διευκρινίσει εξ αρχής, εφόσον τα νοικοκυριά είναι ομοιογενή ως προς τις προτιμήσεις τους και τους οικονομικούς περιορισμούς που αντιμετωπίζουν, μπορούμε να περιορίσουμε την ανάλυσή μας στην εξέταση της συμπεριφοράς του ενός και αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού.[14]

Υποθέτουμε ότι οι προτιμήσεις του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού είναι διαχρονικά συνεπείς και αμετάβλητες. Τούτο σημαίνει ότι οι προτιμήσεις δεν μεταβάλλονται από περίοδο σε περίοδο και ότι ένα καταναλωτικό σχέδιο το οποίο είναι το άριστο θεωρούμενο σε κάποια χρονική στιγμή, παραμένει άριστο εάν θεωρηθεί από οποιαδήποτε άλλη (μεταγενέστερη) χρονική στιγμή. Κατά συνέπεια, εάν το αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό επιλέξει κάποιο καταναλωτικό και επενδυτικό σχέδιο στην αρχή του χρονικού ορίζοντα ως το άριστο σχέδιο, τότε θα συνεχίσει να ακολουθεί αυτό το σχέδιο για όλο το χρονικό ορίζοντα.[15]

Έστω, λοιπόν, ότι οι συνεπείς διαχρονικές προτιμήσεις (intertemporal preferences) του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού χαρακτηρίζονται από μία συνάρτηση διαχρονικής χρησιμότητας (intertemporal utility function) της ακόλουθης μορφής:

$$U = U(c_1, l_1, c_2, l_2) + v(k_3) \tag{3.1}$$

---

14 Το αντίστοιχο θα κάνουμε και για τις επιχειρήσεις.

15 Για διεξοδικότερη ανάλυση του ζητήματος της χρονικής ασυνέπειας των προτιμήσεων και για σχετικό παράδειγμα παραπέμπεστε στο Blanchard & Fischer (1989), section 2.5.

όπου: $c_t \in \Re_+$ είναι η κατανάλωση του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού στη χρονική περίοδο t (για t=1,2), $l_t \in [0,\tau]$ είναι η σχόλη ή ανάπαυση (ο χρόνος, δηλαδή, που δεν διατίθεται για δραστηριότητες της αγοράς) στην περίοδο t, όπου $\tau>0$ είναι ο συνολικός ανά περίοδο διαθέσιμος χρόνος $k_t \in \Re_+$ είναι το απόθεμα φυσικού κεφαλαίου του νοικοκυριού στην αρχή της περιόδου t (t=1,2,3), "$U:\Re_+\times[0, \tau] \times\Re_+\times[0, \tau]\rightarrow\Re$ " είναι η συνάρτηση διαχρονικής χρησιμότητας από την κατανάλωση και τη σχόλη των περιόδων t=1 και t=2, και $v:\Re_+\rightarrow\Re$ είναι η συνάρτηση χρησιμότητας από το κεφάλαιο που αφήνει το υπό εξέταση νοικοκυριό ως κληρονομιά για τα επιγενόμενα νοικοκυριά (π.χ. οι γονείς για τα παιδιά τους).

Για τη συνάρτηση U, με U: $A\rightarrow\Re$ όπου $A\equiv\Re_{++}\times(0, \tau)\times\Re_{++}\times(0, \tau)$ είναι το πεδίο ορισμού της, υποθέτουμε τα ακόλουθα:

($xi.\alpha$) Η U είναι $C^2(A)$, ήτοι συνεχώς διπλά διαφορίσιμη στο Α. Με άλλα λόγια, υπάρχουν τόσο όλες οι πρώτες μερικοί παράγωγοι, όσο και όλες οι δεύτερες μερικές παράγωγοι της U, και είναι όλες συνεχείς.[16]

($xi.\beta$) Είναι αυστηρά αύξουσα στο Α, το οποίο σημαίνει ότι για κάθε $(c_1, l_1,c_2,l_2)\in\Re_{++}\times(0,\tau)\times\Re_{++}\times(0, \tau)$ ισχύει $U_{c_t}>0$ και $U_{l_t}>0$ για t=1,2.

($xi.\gamma$) Είναι κοίλη στο Α, οπότε η Εσσιανή μήτρα της, είναι αρνητικά ημιορισμένη.

($xi.\delta$) Είναι αυστηρά οιονεί κοίλη στο Α.

($xi.\varepsilon$) Η οριακή χρησιμότητα κάθε μίας μεταβλητής εκ των c_t και l_t, για t=1,2 (δηλαδή, η πρώτη μερική παράγωγος της U ως προς αυτή την αντίστοιχη

16 Η υπόθεση ότι η U είναι μόνο C^1(Α), επομένως, μόνο μία φορά συνεχώς διαφορίσιμη, είναι επαρκής για την απόδειξη των σχετικών θεωρημάτων που θα παρουσιάσουμε παρακάτω και για τη γενική ισχύ των ποιοτικών συμπερασμάτων του υποδείγματος. Η πιο αυστηρή υπόθεση ότι η U είναι και C^2(Α), όμως, απλοποιεί κατά πολύ τον μαθηματικό χειρισμό του υποδείγματος, και ακριβώς για αυτό το λόγο υιοθετείται στη δική μας ανάλυση. Δεδομένης έτσι της ύπαρξης και της συνέχειας των δεύτερων μερικών παραγώγων της U, θα δυνάμεθα πλέον να αναφερθούμε στη Εσσιανή και στη πλαισιωμένη μήτρα του Hess της U όταν θα χρειαστεί να χαρακτηρίσουμε ένα (δεσμευμένο) στάσιμο σημείο της ως U (δεσμευμένο) ακρότατο, καθώς και όταν θα θελήσουμε να κάνουμε ανάλυση ευαισθησίας (συγκριτική στατική) του όποιου ακρότατου της U. Σημειώνουμε επίσης ότι παρόμοια θα ισχύουν και για τη συνάρτηση παραγωγής F, την οποία θεμελιώνουμε και αναλύσουμε παρακάτω.

μεταβλητή), τείνει στο μηδέν ή στο άπειρο όπως η αντίστοιχη μεταβλητή τείνει στο άπειρο ή στο μηδέν, αντίστοιχα. Δηλαδή, είναι:

$$U_{c_1}, U_{l_1}, U_{c_2}, U_{l_2} \to 0 \text{ καθώς } c_1, l_1, c_2, l_2 \to +\infty \text{ , αντίστοιχα, και}$$

$$U_{c_1}, U_{l_1}, U_{c_2}, U_{l_2} \to +\infty \text{ καθώς } c_1, l_1, c_2, l_2 \to 0, \text{ αντίστοιχα.}$$

Συμβολισμός:

$\aleph = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$

$\aleph_{+} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$\aleph_{++} = \{1, 2, \ldots\}$

$\Re$: Χώρος Πραγματικών Αριθμών

$\Re_{+} = [0, \infty)$

$\Re_{++} = (0, \infty)$

C(X): Χώρος Συνεχών Πραγματικών Συναρτήσεων από το X στους Πραγματικούς Αριθμούς

C$^{\nu}$(X): Χώρος των ν-φορές διαφορίσιμων συναρτήσεων από το X στους πραγματικούς αριθμούς

Παρατήρηση: Οι υποθέσεις (*xi.β*) και (*xi.δ*) περί αυστηρά θετικής μονοτονικότητας και αυστηρά οιονεί κοιλότητας της U, συνεπάγονται ότι ο οριακός λόγος υποκατάστασης μεταξύ των διαφόρων αγαθών (δηλαδή μεταξύ κατανάλωσης ή μεταξύ σχόλης διαφορετικών περιόδων, ή μεταξύ κατανάλωσης και σχόλης της αυτής ή διαφορετικής περιόδου) θα είναι αυστηρά φθίνων (κατά απόλυτη τιμή) και οι καμπύλες αδιαφορίας θα έχουν αυστηρά αρνητική κλίση και θα είναι αυστηρά κυρτές. Για παράδειγμα, ο οριακός λόγος διαχρονικής υποκατάστασης (marginal rate of intertemporal substitution in consumption) της κατανάλωσης της περιόδου 2, c_2, με κατανάλωση της περιόδου 1, c_1, που ορίζεται ως:

$$MRS_{c_2 \to c_1} \equiv -dc_2/dc_1 = \mathrm{U}_{c_1}(.)/\mathrm{U}_{c_2}(.) \tag{3.2}$$

,φθίνει (κατά απόλυτη τιμή) καθώς ο λόγος c_1/c_2 αυξάνει. Το χαρακτηριστικό αυτό της αυστηρής κυρτότητας των καμπυλών αδιαφορίας εκφράζει την τάση του νοικοκυριού να προτιμά σχετικά «εξισορροπημένους» συνδυασμούς αγαθών και υπηρεσιών, ήτοι να προτιμά αυστηρά τα μίγματα δύο οποιονδήποτε συνδυασμών ίσης χρησιμότητας έναντι των συνδυασμών αυτών καθαυτών.

Παρόμοια, για την συνάρτηση $v: \Re_+ \to \Re$ υποθέτουμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

(*xi.στ*) Η v είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη στο $\Re_+$, $\mathbf{C}^2(\Re_+)$, επομένως υπάρχουν η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος και είναι συνεχείς.[17]

(*xi.ζ*) Είναι αυστηρά αύξουσα στο $\Re_+$, ήτοι $v'(k) > 0 \ \forall k \in \Re_+$.

(*xi.η*) Είναι αυστηρά κοίλη στο $\Re_+$, οπότε $v''(k) > 0 \ \forall k \in \Re_+$.

(*xi.θ*) Η οριακή χρησιμότητα του τελικού αποθέματος κεφαλαίου τείνει στο μηδέν ή στο άπειρο καθώς το απόθεμα αυτό τείνει στο άπειρο ή στο μηδέν, αντίστοιχα. Δηλαδή, είναι:

$v'(k_3) \to 0$ καθώς $k_3 \to +\infty$

$v'(k_3) \to +\infty$ καθώς $k_3 \to 0$.

<u>Παρατήρηση</u>: Ο όρος $v(k_3)$ στη διαχρονική συνάρτηση χρησιμότητας του νοικοκυριού εκφράζει την υπόθεση ότι τα σημερινά νοικοκυριά ενδιαφέρονται για την ευημερία των νοικοκυριών που θα τα διαδεχθούν, και ακριβώς για αυτό το λόγο θέλουν να τους κληροδοτήσουν φυσικό κεφάλαιο. Για παράδειγμα, οι γονείς ενδιαφέρονται για την ευημερία των παιδιών τους και για αυτό αφήνουν κάποια κληρονομιά σε αυτά μετά το θάνατό τους. Η αξία αυτού του κληροδοτήματος, k_3, σε όρους χρησιμότητας του σημερινού νοικοκυριού δίνεται ακριβώς από τη συνάρτηση v.

<u>Παρατήρηση:</u> Οι υποθέσεις στη (*xi.ε*) περί της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των παραγώγων της U αναφέρονται συνήθως στη βιβλιογραφία ως συνθήκες Inada

[17] Και πάλι, η πιο χαλαρή υπόθεση ότι η v είναι $\boldsymbol{C}^1(\Re_+)$ θα ήταν επαρκής, αλλά υποθέτουμε ότι είναι $\boldsymbol{C}^2(\Re_+)$ για λόγους απλούστευσης.

(Inada conditions). Οι συνθήκες Inada μαζί με τις υποθέσεις (*xi.β*) και (*xi.δ*) περί αυστηρά θετικής μονοτονικότητας και αυστηρά οιονεί κοιλότητας της U, καθώς και τις ανάλογες υποθέσεις περί της v, εξασφαλίζουν ύπαρξη, μοναδικότητα και εσωτερικότητα στη λύση του προβλήματος του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού.[18]

3.3.3.β *Γεωμετρική Παρουσίαση*

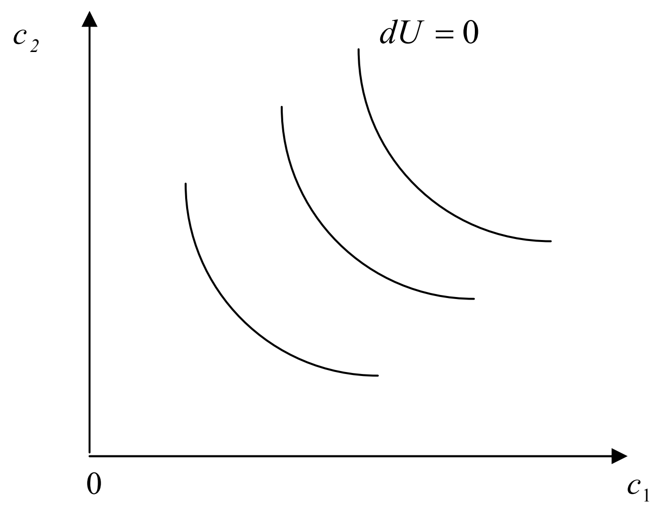
Ο χάρτης προτιμήσεων του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού αποτελείται από τις καμπύλες αδιαφορίας ή ίσης χρησιμότητας (indifference curves) στο χώρο κατανάλωσης διαφορετικών περιόδων (c_1,c_2), στο χώρο σχόλης διαφορετικών περιόδων(ℓ_2,ℓ_1), και στους χώρους (για t=1,2) κατανάλωσης-σχόλης της ίδιας περιόδου (c_t,l_t), όπως φαίνεται και στα Διαγράμματα 3.1, 3.2 και 3.3, αντίστοιχα. Η κατεύθυνση προτίμησης είναι πάντοτε βορειοανατολική. Επομένως, όσο προς τα άνω και δεξιά βρίσκεται μία καμπύλη αδιαφορίας, τόσο υψηλότερο είναι το επίπεδο χρησιμότητας που αντιστοιχεί σε αυτή.

Παρατήρηση: Εκ των υποθέσεων (*xi.β*) και (*xi.δ*) ότι η U είναι αυστηρά αύξουσα και αυστηρά οιονεί κοίλη, έπεται ότι οι καμπύλες αδιαφορίας είναι αυστηρά αρνητικά κεκλιμένες και αυστηρά κυρτές. Από δε την υπόθεση (*xi.ε*) περί των ορίων των οριακών χρησιμοτήτων, έπεται ότι οι καμπύλες αδιαφορίας προσεγγίζουν ασυμπτωτικά τους άξονες.

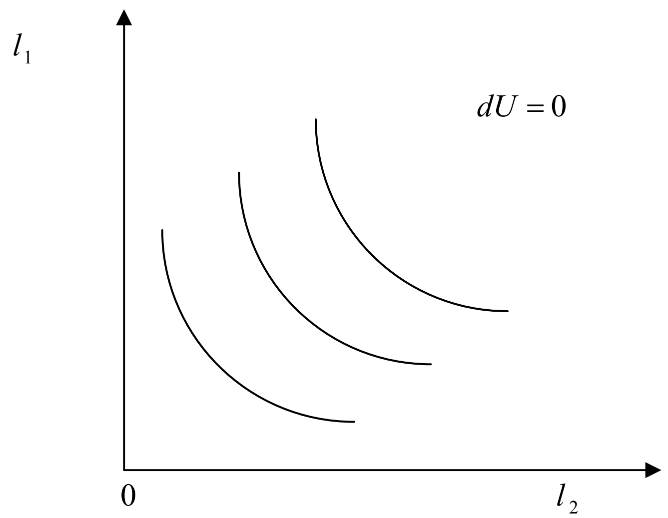
---

[18] Ανάλογες υποθέσεις θα κάνουμε παρακάτω και για τη συνάρτηση παραγωγής, F, προκειμένου να εξασφαλιστεί ύπαρξη και εσωτερικότητα (αλλά όχι μοναδικότητα) στη λύση του προβλήματος της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης.

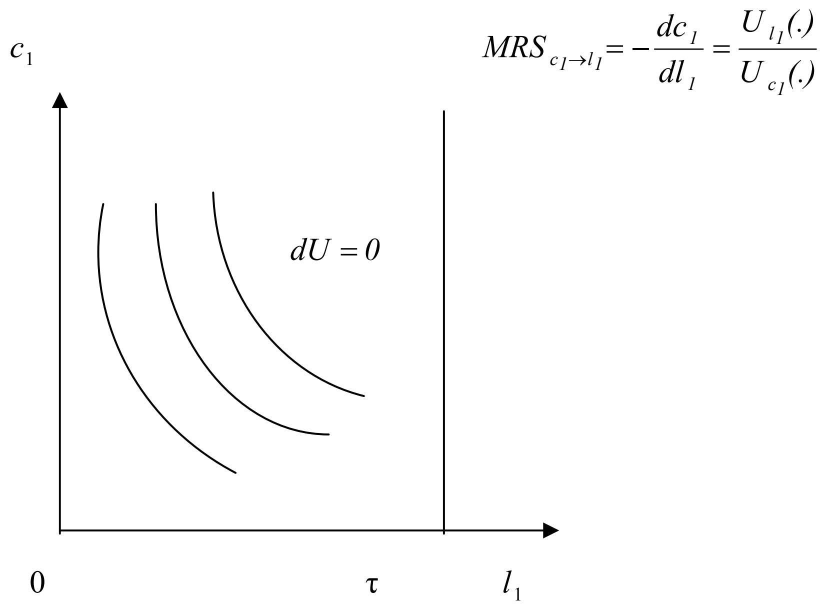
$$MRS_{c_2 \rightarrow c_1} \equiv -\frac{dc_2}{dc_1} = \frac{U_{c_1}(.)}{U_{c_2}(.)}$$



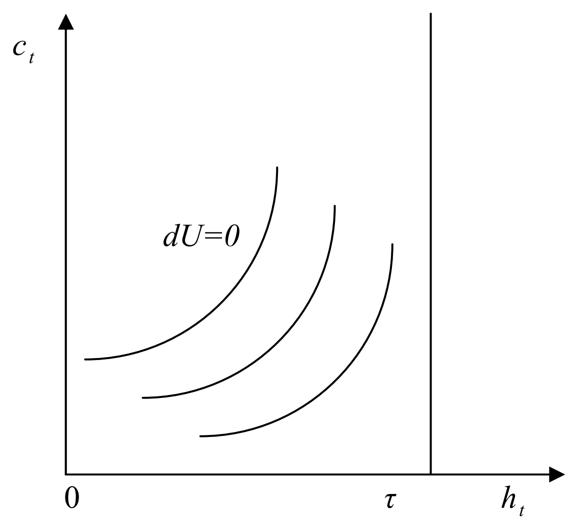
Διάγραμμα 3.1: Καμπύλες αδιαφορίας του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού στο χώρο (c_1, c_2).



Διάγραμμα 3.2: Καμπύλες αδιαφορίας του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού στο χώρο (ℓ_2, ℓ_1)



Διάγραμμα 3.3: Καμπύλες αδιαφορίας του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού στο χώρο (ℓ_1, c_1).



Διάγραμμα 3.4: Καμπύλες αδιαφορίας του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού στο χώρο (h_t, c_t).

Όσον αφορά τις προτιμήσεις μεταξύ κατανάλωσης και σχόλης της ίδιας περιόδου (για t=1,2), αντί του χώρου σχόλης-κατανάλωσης (ℓ_t, c_t), μπορούμε εναλλακτικά να χρησιμοποιήσουμε το χώρο κατανάλωσης-εργασίας (h_t, c_t) όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 3.4. Σε αυτή την περίπτωση, ο χρόνος εργασίας, που δίνεται ως $h_t = \tau - l_t$, είναι επιβλαβής (bad) υπό την έννοια ότι όσο περισσότερος είναι ο χρόνος εργασίας h_t, τόσο χαμηλότερη είναι η χρησιμότητα U του νοικοκυριού, καθώς τόσο λιγότερος είναι ο χρόνος ανάπαυσης. Έπεται ότι εν προκειμένω οι καμπύλες αδιαφορίας είναι θετικά κεκλιμένες (καθώς και αυστηρά κυρτές) και ότι η κατεύθυνση προτίμησης είναι βορειοδυτική.

Ο χρόνος που το αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό διαθέτει για εργασία κατά την περίοδο t συμβολίζεται με h_t και δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$h_t = \tau - l_t$$

όπου $\tau>0$ είναι ο συνολικά διαθέσιμος χρόνος για ασχολίες της αγοράς σε κάθε περίοδο.

Η κλίση των καμπυλών αυτών που αντανακλούν την κυρτότητα των καμπυλών αδιαφορίας, είναι ο οριακός λόγος υποκατάστασης τους.

3.3.3.γ <u>*Παραδείγματα Συναρτήσεων Διαχρονικής Χρησιμότητας.*</u>

◊ *Συνάρτηση Χρησιμότητας Σταθερής Ελαστικότητας Διαχρονικής Υποκατάστασης (ΣΕΔΥ).*

Για την περίπτωση των δύο περιόδων, η Συνάρτηση Χρησιμότητας Σταθερής Ελαστικότητας Διαχρονικής Υποκατάστασης, ή ΣΕΔΥ (constant elasticity of intertemporal substitution, CEIS), ορίζεται ως ακολούθως:

$$U(c_1, l_1, c_2, l_2) = \frac{(c_1^{\theta} l_1^{1-\theta})^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + \beta \frac{(c_2^{\theta} l_2^{1-\theta})^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \qquad (3.3)$$

όπου $\beta\in(0,1)$ είναι ο σταθερός συντελεστής διαχρονικής προτίμησης και όπου, $\gamma>0$, $\gamma\neq 1$ και $\theta\in[0,1]$. Προφανώς δε,

$$U: \Re_+\times[0,\tau]\,\Re_+\times[0,\tau]\rightarrow\Re.$$

Παρατηρείστε εξάλλου ότι η συνάρτηση ΣΕΔΥ μπορεί να διατυπωθεί εναλλακτικά και ισοδύναμα με την ακόλουθη μορφή:

$$U(c_1, l_1, c_2, l_2) = u(c_1, l_1) + \beta\, u(c_2, l_2) \tag{3.4}$$

όπου η συνάρτηση $u: \Re_+\times[0,\tau]\rightarrow\Re$ είναι η *συνάρτηση στιγμιαίας ή ανά περίοδο χρησιμότητας* (instantaneous utility function) που εκφράζει την ευημερία του νοικοκυριού κατά μία ορισμένη χρονική περίοδο και που εν προκειμένω ορίζεται ως:

$$u(c_t, l_t) = \frac{\left(c_t^{\theta} l_t^{1-\theta}\right)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \tag{3.5}$$

Από τις (3.4) και (3.5), λοιπόν, γίνεται προφανές ότι η συνάρτηση ΣΕΔΥ είναι μια ειδική περίπτωση του τύπου των συναρτήσεων που καλούνται *αθροιστικά διαχωρίσιμες ως προς το χρόνο* (additively seperable over time).

Η συνάρτηση ΣΕΔΥ, όπως έχει οριστεί στη (3.3), ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις της Νεοκλασικής Θεωρίας Οικονομικής Μεγέθυνσης. Ειδικότερα για τις υποθέσεις (*xi.α*) και (*xi.β*), *(xi.γ)* από τη (3.3) έχουμε:

$$\begin{aligned} U_{c_1}(.) &= u_c(c_1, l_1) = \\ &= \left(c_1^{\theta}\, l_1^{1-\theta}\right)^{-\gamma} \theta\, c_1^{\theta-1}\, l_1^{1-\theta} = \\ &= \left(c_1^{\theta}\, l_1^{1-\theta}\right)^{-\gamma} \left(c_1^{\theta}\, l_1^{1-\theta}\right) \theta\, c_1^{-1} = \\ &= \left(c_1^{\theta}\, l_1^{1-\theta}\right)^{1-\gamma} \theta\, c_1^{-1} = \\ &= \varphi_1\, \theta\, c_1^{-1} > 0 \end{aligned}$$

και παρόμοια,

$$U_{c_2}(.) = \beta\, u_c(c_2, l_2) = \beta\, \varphi_2\, \theta\, c_2^{-1} > 0$$

$$U_{l_1}(.) = u_l(c_1, l_1) = \varphi_1\,(1-\theta)\, l_1^{-1} > 0$$

$$U_{l_2}(.) \;=\; \beta\, u_l(\,c_2,l_2\,) \;=\; \beta\, \varphi_2\,(\,1 - \theta\,)\, l_2^{-1} \;>\; 0$$

όπου ορίζουμε $\varphi_t \equiv (c_t^{\theta}\, l_t^{1-\theta})^{1-\gamma}$ για t=1,2.

Η συνάρτηση ΣΕΔΥ $U(c_1,l_1,c_2,l_2)$ είναι δυο φορές διαφορίσιμη, $\mathrm{U} \in \mathbf{C}^2$. Για την μήτρα του Hess της U, έχουμε:

$$\mathbf{H}_U(c_1,l_1,c_2,l_2) \;\equiv\; \frac{\partial^2 U(.)}{\partial(\,c_1,l_1,c_2,l_2\,)\;\partial(\,c_1,l_1,c_2,l_2\,)'} \;=$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_u(c_1,l_1) & \mathbf{O}_{2\times 2} \\ & \\ \mathbf{O}_{2\times 2} & \beta\mathbf{H}_u(c_2,l_2) \end{bmatrix}$$

όπου:

$$\mathbf{H}_u(c,l) \equiv \frac{\partial^2\, u(\,c,l)}{\partial(\,c,l\,)\;\partial(\,c,l)'} = \begin{bmatrix} u_{cc}(\,c,l) & u_{cl}(\,c,l) \\ u_{lc}(\,c,l) & u_{ll}(\,c,l) \end{bmatrix}$$

είναι η Εσσιανή μήτρα της στιγμιαίας συνάρτησης χρησιμότητας, $u(c,l)$. Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι

$$u_{cc} < 0 \;\;,\;\; u_{ll} < 0 \;\;,\;\; u_{cl} = u_{lc} > 0 \;\;,$$

$$|\mathbf{H}_u| = u_{cc}\, u_{ll} - u_{cl}^{\,2} \geq 0 \qquad\qquad \forall (c,l) \in \Re_{++} \times (0,\tau)$$

οπότε έπεται ότι η Εσσιανή μήτρα H_u της u είναι αρνητικά ημιορισμένη για κάθε (c,l) το οποίο ισοδύναμα σημαίνει ότι η συνάρτηση u είναι (ολικά) κοίλη. Με βάση το παραπάνω συνεπάγεται ότι η H_U είναι αρνητικά ημιορισμένη για κάθε (c_1,l_1,c_2,l_2) και , αντίστοιχα, η U είναι (ολικά) κοίλη. Με άλλα λόγια για την ειδική περίπτωση της συνάρτησης ΣΕΔΥ, αποδεικνύοντας ότι η στιγμιαία συνάρτηση χρησιμότητας είναι κοίλη, δείχνουμε ότι η συνάρτηση διαχρονικής χρησιμότητας είναι επίσης κοίλη, ως άθροισμα κοίλων συναρτήσεων.

Παρομοίως, μπορούμε να δείξουμε ότι η *u* είναι οιονεί κοίλη για κάθε (c,l), οπότε και έπεται ότι και η *U* είναι οιονεί κοίλη. Ειδικότερα, εξετάζουμε τις κύριες ελάσσονες $|B_1|$ και $|B_2|$ της παρακάτω πλαισιωμένης ορίζουσας της *u*:

$$|B| \equiv \begin{vmatrix} 0 & u_c & u_l \\ u_c & u_{cc} & u_{cl} \\ u_l & u_{lc} & u_{ll} \end{vmatrix}, \text{ όπου } |B_1| = \begin{vmatrix} o & u_c \\ u_c & u_{cc} \end{vmatrix}, \quad |B_2| = |B|$$

Εφόσον ισχύουν οι φυσικοί περιορισμοί μη αρνητικότητας για (c,l), οι αναγκαίες συνθήκες για την οιονεί κοιλότητα της u είναι $|B_1| \leq 0$ και $|B_2| \geq 0$ και οι ικανές, είναι $|B_1| < 0$ και $|B_2| > 0$.

Κατ'αυτό τον τρόπο, δείχνουμε ότι η *u* οπότε και η *U* είναι οιονεί κοίλη, αλλά το κριτήριο δεν είναι ικανό για να επιβεβαιώσει την αυστηρά οιονεί κοιλότητα της *u* και κατ'επέκταση της *U* (βλέπε A. Chiang, *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 3rd Edition, p.393-397). Εξάλλου μπορούμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση ΣΕΔΥ ικανοποιεί τις συνθήκες Inada, εξετάζοντας τα όρια των (μερικών) οριακών χρησιμοτήτων, u_c και u_l.

Η συνάρτηση χρησιμότητας ΣΕΔΥ φέρει το όνομά της, από την ιδιότητα την οποία έχει, ότι δηλαδή η ελαστικότητα διαχρονικής υποκατάστασης στην κατανάλωση (elasticity of intertemporal substitution in consumption) είναι σταθερή για κάθε (c_1,l_1,c_2,l_2) και ειδικότερα ίση με $[1-\theta(1-\gamma)]^{-1} \in (0,+\infty)$.

Αναλυτικότερα, η ελαστικότητα υποκατάστασης μεταξύ κατανάλωσης της περιόδου 2 με κατανάλωση της περιόδου 1, για οποιαδήποτε συνάρτηση διαχρονικής χρησιμότητας ορίζεται ως ακολούθως:

$$\sigma_{c_2 \to c_1} \equiv \frac{\partial(c_2/c_1)}{\partial(MRS_{c_2 \to c_1})} \cdot \frac{(MRS_{c_2 \to c_1})}{(c_2/c_1)} \tag{3.6}$$

Εναλλακτικά, με βάση την ιδιότητα των φυσικών λογαρίθμων $d(lnx) = dx/x$, έπεται ότι:

$$\sigma_{c2\to c1} = \frac{\partial ln(c_2/c_1)}{\partial ln(MRS_{c2\to c1})} \tag{3.7}$$

όπου $MRS_{c2\to c1}$ είναι ο οριακός λόγος διαχρονικής υποκατάστασης στη κατανάλωση.

Για την ειδική περίπτωση της συνάρτησης ΣΕΔΥ, αντικαθιστώντας τον MRS στην (3.7) από την (3.2), καταλήγουμε ότι:

$$\sigma_{c2\to c1} = \frac{\partial ln(c_2/c_1)}{\partial ln(MRS_{c2\to c1})} = \frac{1}{1-\theta(1-\gamma)} \tag{3.8}$$

Έπεται ότι, στην περίπτωση της συνάρτησης ΣΕΔΥ, η $\sigma_{c2\to c1}$ είναι σταθερή και συναρτάται θετικά με το θ και αρνητικά με το γ. Αξίζει στο σημείο αυτό να σημειωθεί ότι στην περίπτωση όπου $\theta=1$ οπότε και $u(c,\ell) = \frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$, καθώς επίσης, $\sigma_{c2\to c1} = \frac{1}{\gamma}$, συνεπώς η ελαστικότητα διαχρονικής υποκατάστασης στην κατανάλωση είναι αντιστρόφως ανάλογη του συντελεστή αποστροφής στον κίνδυνο.

<u>Παρατήρηση:</u> Σημειώνεται ότι η παράμετρος γ, που αποκαλείται *συντελεστής σχετικής αποστροφής στον κίνδυνο* (coefficient of relative risk aversion), είναι ένας δείκτης της κοιλότητας της συνάρτησης $u(c) = \frac{(c^{1-\gamma}-1)}{(1-\gamma)}$, επιπλέον ισούται με την ελαστικότητα της οριακής χρησιμότητας της κατανάλωσης, $u'(c) = c^{-\gamma}$. Κατά συνέπεια, όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της γ, τόσο πιο ανελαστική είναι η διαχρονική υποκατάσταση κατανάλωσης και τόσο πιο μεγάλο θα είναι το ποσό εκείνο που θα δεχόταν να πληρώσει το νοικοκυριό, υπό συνθήκες αβεβαιότητας, για να αποφύγει τον κίνδυνο και να εξασφαλίσει μία βέβαια κατανάλωση. Αν και στα όρια του παρόντος βιβλίου δεν θα αναλύσουμε τις περιπτώσεις στις οποίες οι οικονομικοί παράγοντες αποφασίζουν υπό συνθήκες αβεβαιότητας, παρ'όλο αυτά είναι χρήσιμο να σκεφτόμαστε το γ ως έναν δείκτη της αποστροφής του νοικοκυριού στον κίνδυνο.

Παρόμοια, μπορούμε να δείξουμε ότι για τη συνάρτηση ΣΕΔΥ η ελαστικότητα διαχρονικής υποκατάστασης στη σχόλη (elasticity of intertemporal substitution in leisure) είναι επίσης σταθερή και συναρτάται αρνητικά με τον συντελεστή αποστροφής στον κίνδυνο.

Παρατήρηση: Όπως θα γίνει σαφές αργότερα, η τιμή της ελαστικότητας διαχρονικής υποκατάστασης στην κατανάλωση παίζει σημαντικό ρόλο στη διαδικασία της οικονομικής μεγέθυνσης. Από την άλλη, η ελαστικότητα διαχρονικής υποκατάστασης στη σχόλη έχει μεγάλη σημασία για τη δυναμική των οικονομικών διακυμάνσεων. Εφόσον και οι δύο ελαστικότητες εξαρτώνται αρνητικά από τον συντελεστή αποστροφής στον κίνδυνο *γ*, ο συντελεστής αυτός είναι ιδιάζουσας σημασίας για την μελέτη τόσο του φαινομένου της οικονομικής ανάπτυξης όσο και του φαινομένου των οικονομικών κύκλων. Στο παρόν βιβλίο, πάντως, θα μας απασχολήσει ο ρόλος του *γ* μόνο για τη δυναμική της οικονομικής ανάπτυξης.

◊ *Χρονικά Διαχωρίσιμη Λογαριθμικά Προσθετική Συνάρτηση Ευημερίας*

Η συνάρτηση αυτή προέρχεται από την (3.4) καθώς το $\gamma \to 1$, και έχει όλες τις ιδιότητες της συνάρτησης ευημερίας της νεοκλασσικής θεωρίας οικονομικής μεγέθυνσης. Το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο $A: (0,\infty)\times(0,\tau]\times(0,\infty)\times(0,\tau]$. Η παρακάτω εξίσωση αντανακλά την χρονικά διαχωρίσιμη λογαριθμικά προσθετική συνάρτηση ευημερίας:

$$U(c_1,l_1,c_2,l_2) = u(c_1,l_1) + \beta u(c_2,l_2)$$

όπου $u(c_t,l_t) = \theta \ln c_t + (1-\theta)\ln l_t$, $\forall\ t=1, 2$ συνεπώς

$$U(c_1,l_1,c_2,l_2) = \left[\theta \ln c_1 + (1-\theta)\ln l_1\right] + \beta\left[\theta \ln c_2 + (1-\theta)\ln l_2\right]$$

$$\text{όπου } \beta,\ \theta \in (0,1) \qquad (3.9)$$

Επίσης αξίζει να σημειωθούν τα εξής:

(α) Η παράμετρος *β*, που όπως αναφέραμε είναι ο συντελεστής διαχρονικής προτίμησης, θα μπορούσαμε εναλλακτικά να τον ονομάσουμε "συντελεστής προεξόφλησης" χαρακτηρίζει την υπομονετικότητα του νοικοκυριού. Προφανώς,

$$MRS_{c_2 \to c_1} = -dc_2 / dc_1 = U_{c_1} / U_{c_2} = \left(\frac{1}{\beta}\right) c_2 / c_1$$

Άρα όσο μεγαλύτερο είναι το β τόσο λιγότερες c_2 χρειάζονται για να υποκαταστήσουν μία μονάδα c_1. Δηλαδή, όσο πιο μεγάλο είναι το β τόσο πιο υπομονετικό είναι το νοικοκυριό.

(β) Η παράμετρος *θ*, χαρακτηρίζει την σχετική προτίμηση του νοικοκυριού για κατανάλωση έναντι σχόλης της ίδιας περιόδου. Προφανώς,

$$MRS_{l_1 \to c_1} \equiv -\frac{dl_1}{dc_1} = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)\frac{l_1}{c_1}$$

Άρα όσο μεγαλύτερο είναι το θ τόσο περισσότερες μονάδες l_1 χρειάζονται για να υποκαταστήσουν μία μονάδα c_1.

(γ) Αργότερα θα χαρακτηρίσουμε την διαδικασία οικονομικής μεγέθυνσης με βάση τις παραμέτρους *β, θ* και *γ*, που όπως είδαμε χαρακτηρίζουν την υπομονετικότητα, την σχετική προτίμηση για κατανάλωση έναντι σχόλης και την αποστροφή στον κίνδυνο, αντίστοιχα.

(δ) Η ελαστικότητα διαχρονικής υποκατάστασης στην κατανάλωση είναι σταθερή και ίση με την μονάδα

$$\sigma_{c_2 \to c_1} = \frac{\partial \ln(c_2/c_1)}{\partial \ln(MRS_{c_2 \to c_1})} = 1$$

3.3.3.δ *Εισοδηματικός Περιορισμός του Νοικοκυριού*

Οι περιορισμοί εισοδήματος του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού περιγράφονται από τις παρακάτω ανισότητες:

$$P_t c_t + P_t i_t \leq P_{k_t} k_t + P_{h_t} h_t + D_t \ , \ \forall \ t=1,2 \tag{3.10}$$

όπου P_t τιμή του προϊόντος στην περίοδο t $(t=1,2)$

i_t επένδυση του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού στην περίοδο t $(t=1,2)$

P_{k_t} ονομαστική απόδοση του κεφαλαίου στην περίοδο t $(t=1,2)$

P_{h_t} ονομαστικός μισθός στην περίοδο t $(t=1,2)$

D_t ονομαστικά μερίσματα του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού στην περίοδο t $(t=1,2)$

Διαιρώντας τους ονομαστικούς εισοδηματικούς περιορισμούς με την τιμή του προϊόντος της αντίστοιχης περιόδου έχουμε:

$$c_t + i_t \leq p_{k_t} k_t + p_{h_t} h_t + d_t \quad (t=1,2) \tag{3.11}$$

όπου $p_{k_t} = \dfrac{P_{k_t}}{P_t}$, $p_{h_t} = \dfrac{P_{h_t}}{P_t}$, $d_t = \dfrac{D_t}{P_t}$

είναι το πραγματικό κόστος χρήσης κεφαλαίου, ο πραγματικός μισθός και τα πραγματικά μερίσματα του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού στην περίοδο *t*, αντίστοιχα.

<u>Παρατήρηση:</u> Ο μόνος τρόπος που τα νοικοκυριά μπορούν να μεταφέρουν αγοραστική δύναμη (πλούτο) από την περίοδο 1 στην περίοδο 2 είναι μέσω αποταμίευσης και επένδυσης σε πραγματικό κεφάλαιο. Το υπόδειγμα αυτό εύκολα μπορεί να μετατραπεί ώστε να επιτρέπει στα νοικοκυριά να μεταφέρουν πλούτο

από την περίοδο 1 στην περίοδο 2 και αντίστροφα με το να δανείζονται και να δανείζουν σε χρηματοπιστωτικές αγορές με την εισαγωγή ενός εισοδηματικού περιορισμού δύο περιόδων. (βλέπε Άσκηση 3.1).

Άσκηση 3.1: Αν ο εισοδηματικός περιορισμός του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού είναι:

$$\sum_{t=1}^{2}\left[P_t\left(c_t+i_t\right)-P_{k_t}k_t-P_{h_t}h_t-D_t\right]\leq 0 \qquad (3.12)$$

δείξτε ότι:

(α) Σε σχετικές τιμές με βάση τις τιμές της περιόδου 1 ο περιορισμός αυτός ισοδυναμεί με τη σχέση:

$$\sum_{t=1}^{2}p_t\left(c_t+i_t-p_{k_t}k_t-p_{h_t}h_t-d_t\right)\leq 0 \qquad (3.13)$$

όπου: $p_t=\dfrac{P_t}{P_1}$, $\quad p_{kt}=\dfrac{P_{k_t}}{P_t}$, $\quad p_{ht}=\dfrac{P_{h_t}}{P_t}$, $\quad d_t=\dfrac{D_t}{P_1}$

(β) Ο περιορισμός (3.13) είναι ισοδύναμος με τους περιορισμούς :

$$p_{t+1}a_{t+1}+p_tc_t+p_ti_t\leq p_t\left(a_t+p_{k_t}k_t+p_{h_t}h_t+d_t\right) \quad (t=1,2) \qquad (3.14)$$

όπου: $a_1=p_3\,a_3=0$ (3.15)

και p_ta_t είναι η αξία σε τιμές του προϊόντος της περιόδου 1 ενός αξιόγραφου που αντικατοπτρίζει μία απαίτηση (οφειλή) α_t μονάδων προϊόντος στην αρχή της περιόδου *t*.

(γ) Πόσες σχετικές τιμές υπάρχουν στον περιορισμό (3.13). Τί αντιπροσωπεύουν οι τιμές αυτές;

(δ) Ποιές οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για τη μεγιστοποίηση της ευημερίας του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού υπό τον περιορισμό (3.13) και τους περιορισμούς (3.16)-(3.21), όταν η συνάρτηση ευημερίας του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού ικανοποιεί τις σχετικές υποθέσεις της νεοκλασσικής θεωρίας οικονομικής μεγέθυνσης:

3.3.3.ε *Ο Κανόνας Μετάβασης του Κεφαλαίου ή Νόμος Κίνησης του Κεφαλαίου*

Η απώλεια της ικανότητας του υπάρχοντος κεφαλαίου να παράγει υπηρεσίες κεφαλαίου λόγω φθοράς, παλαίωσης, κ.τ.λ., δηλ., η φυσική απόσβεση του κεφαλαίου, είναι ένα σταθερό ποσοστό του υπάρχοντος κεφαλαίου, $\delta \in [0,1]$, υπό την υπόθεση βέβαια ότι η προσφορά εργασίας είναι πλήρως ανελαστική κατά την χρονική περίοδο $t=1,2$ ($N=1$ κανονικοποίηση). Έτσι ο κανόνας μετάβασης του κεφαλαίου γίνεται:

$$k_{t+1} = (1-\delta)\, k_t + i_t \qquad \forall\ (t = 1,2) \tag{3.16}$$

3.3.3.στ *Άλλοι περιορισμοί*

Επιπλέον, οι επιλογές του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού δεσμεύονται από τους εξής περιορισμούς:

$$c_t \geq 0 \qquad (t = 1,2) \tag{3.17}$$

$$h_t \geq 0 \qquad (t = 1,2) \tag{3.18}$$

$$l_t \geq 0 \qquad (t = 1,2) \tag{3.19}$$

$$l_t + h_t \leq \tau \qquad (t = 1,2) \tag{3.20}$$

$$k_1 \in \Re_+ \qquad \text{δεδομένο} \tag{3.21}$$

Παρατήρηση: Οι περιορισμοί (3.17) - (3.20) ονομάζεται "φυσικοί περιορισμοί" ("physical constraints"). Ο περιορισμός (3.21) αποτελεί την "αρχική συνθήκη" ("initial condition"). Μπορεί να θεωρηθεί ότι k_1 είναι το κεφάλαιο που έχουν αφήσει τα προγενέστερα νοικοκυριά για τα σημερινά.

3.3.3.ζ Το Πρόβλημα του Αντιπροσωπευτικού Νοικοκυριού

Στην αρχή της κάθε περιόδου το αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό επιλέγει ένα σχέδιο κατανάλωσης, επένδυσης (αποταμίευσης), σχόλης, εργασίας κατά τη διάρκεια της υπόλοιπης ζωής του $(c_1, i_1, l_1, h_1, c_2, i_2, l_2, h_2)$ ώστε να μεγιστοποιήσει την συνάρτηση χρησιμότητας του (3.1), υπό τους περιορισμούς του εισοδήματός (3.10), τον κανόνα μετάβασης του κεφαλαίου (3.16), τους φυσικούς περιορισμούς (3.17) - (3.20) και την αρχική συνθήκη (3.21), θεωρώντας τις τιμές των προϊόντων και των υπηρεσιών των παραγωγικών συντελεστών σαν δεδομένες. Επομένως έχουμε:

$$\max_{\{c_t, l_t, h_t, k_{t+1}\}_{t=1}^{2}} \left[U(c_1, l_1, c_2, l_2) + v(k_3)\right]$$

υπό τους περιορισμούς

$$c_t + i_t \le p_{k_t} k_t + p_{h_t} h_t + d_t, \qquad \forall \ (t = 1,2)$$

$$k_{t+1} = (1-\delta)\, k_t + i_t, \qquad \forall \ (t = 1,2)$$

$$l_t + h_t \le \tau \qquad \forall \ (t = 1,2)$$

$$c_t \ge 0, \ \ l_t \ge 0, \ \ h_t \ge 0 \qquad \forall \ (t = 1,2)$$

$$k_1 \in \Re_+ \qquad \text{δεδομένο}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Με βάση την υπόθεση ότι η συνάρτηση χρησιμότητας είναι αυστηρά αύξουσα, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι σε οποιαδήποτε λύση του προβλήματος του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού οι ανισοτικοί περιορισμοί (3.11) και (3.20) θα ικανοποιούνται με ισότητα στο max. Από τις (3.16) και (3.11) προκύπτει η (3.11b). Ακόμη, οι δεσμεύσεις στα όρια των πρώτων μερικών παραγώγων στη συνάρτηση ευημερίας συνεπάγονται ότι σε οποιαδήποτε λύση του προβλήματος του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού οι περιορισμοί (3.17) έως (3.19) θα ικανοποιούνται μόνο με αυστηρή ανισότητα, επομένως το πρόβλημα του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού μπορεί να απλουστευθεί ως εξής:

$$c_t = (1 - p_{k_t} - \delta)k_t - k_{t+1} + p_{h_t} h_t + d_t, \qquad \forall \; (t = 1,2) \tag{3.11b}$$

επίσης η (3.20) γίνεται:

$$l_t = \tau - h_t$$

επομένως

$$\max_{\{h_t, k_{t+1}\}_{t=1}^{2}} U\{[(1 + p_{k_1} - \delta)k_1 - k_2 + p_{h_1} h_1 + d_1], (\tau - h_1), \\ [(1 + p_{k_2} - \delta)k_2 - k_3 + p_{h_2} h_2 + d_2], (\tau - h_2)\} + v(k_3) \tag{3.22}$$

Άρα, οι συνθήκες για τη λύση αυτού του προβλήματος είναι:

<u>Συνθήκες Kuhn-Tucker:</u>

$$U_{c_1} p_{h_1} - U_{l_1} \leq 0 \qquad [=0 \text{ αν } h_1 > 0] \tag{3.23}$$

$$-U_{c_1} + U_{c_2}(1 + p_{k_2} - \delta) \leq 0 \qquad [=0 \text{ αν } \mathrm{k}_2 > 0] \tag{3.24}$$

$$U_{c_2} p_{h_2} - U_{l_2} \leq 0 \qquad [=0 \text{ αν } h_2 > 0] \tag{3.25}$$

$$-U_{c_2} + v'(k_3) \leq 0 \qquad [=0 \text{ αν } k_3 > 0] \tag{3.26}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες Inada, οι σχέσεις (3.23)-(3.26) μπορούν να διατυπωθούν ως εξής:

$$U_{l_1} / U_{c_1} = p_{h_1}$$

$$U_{c_1} / U_{c_2} = (1 + p_{k_2} - \delta)$$

$$U_{l_2} / U_{c_2} = p_{h_2}$$

$$U_{c_2} = v'(k_3)$$

ή εναλλακτικά:…

$$\mathrm{MRS}_{c1 \to l_1} = \mathrm{p}_{h_1}$$

$$\mathrm{MRS}_{c2 \to l_2} = \mathrm{p}_{h_2}$$

$$MRS_{c_2 \to c_1} = 1 + p_{k_2} - \delta$$

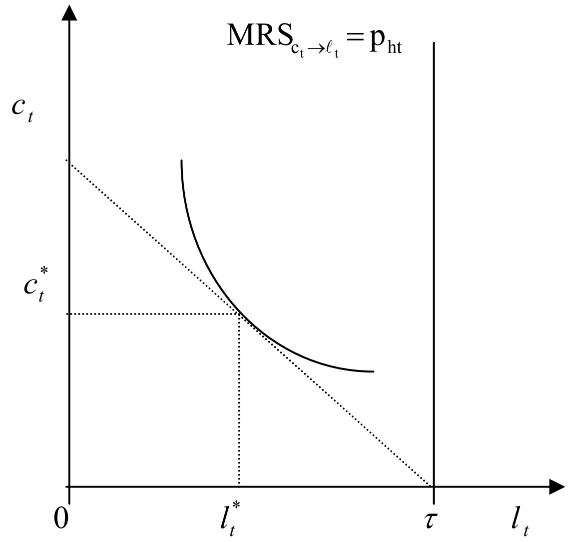
$$U_{c_2} = v'(k)$$

Παρατήρηση: Εφόσον η αντικειμενική συνάρτηση είναι κοίλη στις μεταβλητές (h_1, k_2, h_2, k_3) και το σύνολο των περιορισμών είναι κυρτό συνεπάγεται ότι οι συνθήκες (3.23) - (3.26) είναι και ικανές.

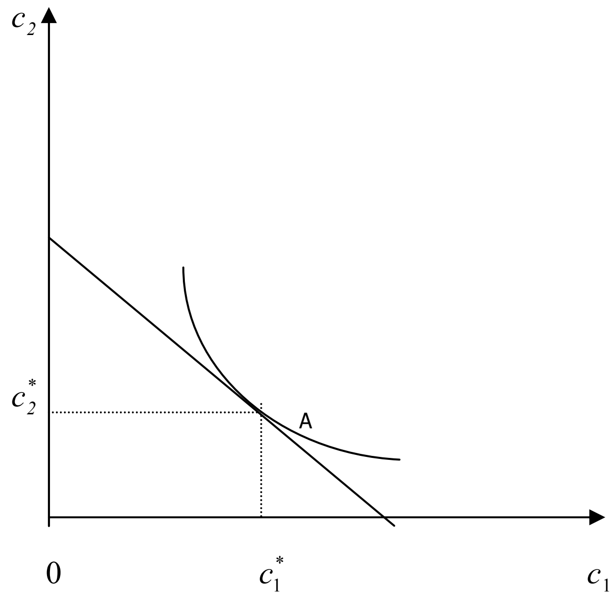
Οικονομική Ερμηνεία: Το οικονομικό νόημα των συνθηκών αυτών είναι απλά ότι το αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό μεγιστοποιεί την ευημερία του υπό τους περιορισμούς του εισοδήματος του κτλ. όταν, για την περίπτωση της εσωτερικής λύσης, εξισώνει τον οριακό λόγο υποκατάστασης της κατανάλωσης της κάθε περιόδου με ελεύθερο χρόνο την ίδια περίοδο, με τον πραγματικό μισθό της περιόδου αυτής. Και εξισώνει το οριακό λόγο υποκατάστασης κατανάλωσης της επόμενης περιόδου με κατανάλωση στην παρούσα περίοδο, με το μικτό πραγματικό κόστος χρήσης του κεφαλαίου, $1 + p_{k_2} - \delta$. Η τιμή $1 + p_{k_2} - \delta$ είναι προφανώς το κόστος ευκαιρίας για μια μονάδα κεφαλαίου που διατίθεται στην αρχή της περιόδου 1 αλλά δεν καταναλώνεται κατά την διάρκεια της περιόδου αυτής. (Βλέπετε Διαγράμματα 3.5 και 3.6, αντίστοιχα). Η περίπτωση γωνιακής λύσης, για παράδειγμα $l_1 = \tau$ παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 3.7. Στην περίπτωση αυτή ο πραγματικός μισθός είναι παντού μικρότερος του οριακού λόγου υποκατάστασης κατανάλωσης με ελεύθερο χρόνο. Στην συνέχεια υιοθετώντας τις κατάλληλες υποθέσεις θα αποκλείσουμε το ενδεχόμενο γωνιακής λύσης στο πρόβλημα του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού.

3.3.3.η *Γεωμετρική Παρουσίαση*

Παρακάτω παρατίθεται η διαγραμματική απεικόνιση του προβλήματος του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού.

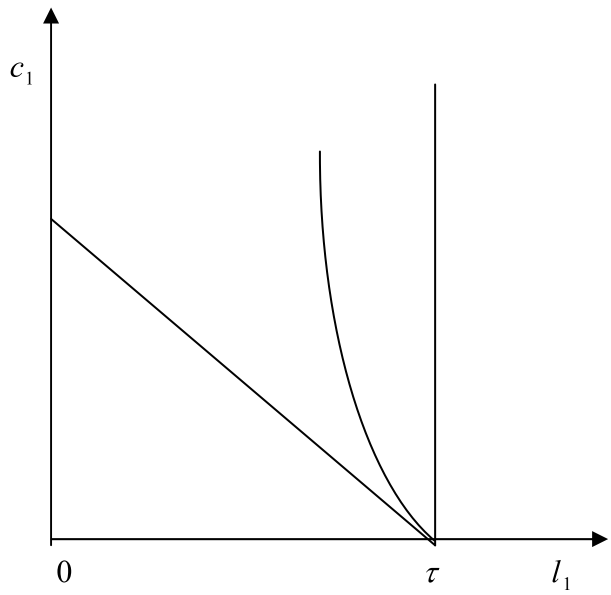


Διάγραμμα 3.5



Διάγραμμα 3.6

Στο σημείο Α του διαγράμματος 3.6, ισχύει ότι: $MRS_{c_2 \to c_1} = (1 + p_{k_2} - \delta)$



Διάγραμμα 3.7

Στο συγκεκριμένο διάγραμμα ο $MRS_{c_1 \to l_1} > p_{h_1}$

3.3.4 <u>Η Οικονομική Συμπεριφορά των Επιχειρήσεων</u>.

3.3.4. α <u>Τα Κέρδη της Αντιπροσωπευτικής Επιχείρησης</u>

Τα κέρδη της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης στην περίοδο *t* είναι:

$$\Pi_t = P_t Y_t - P_{k_t} K_t - P_{h_t} L_t \quad (t=1,2) \tag{3.27}$$

όπου Y_t: ποσότητα του παραγομένου προϊόντος στην περίοδο t, ($t=1,2$)

K_t: εισροή κεφαλαίου στην περίοδο t, ($t=1,2$)

L_t : εισροή εργασίας στην περίοδο t, ($t=1,2$)

Διαιρώντας τα ονομαστικά κέρδη με την τιμή του προϊόντος της αντίστοιχης περιόδου έχουμε την συνάρτηση του πραγματικού κέρδους:

$$\pi_t = Y_t - p_{k_t} K_t - p_{h_t} L_t \tag{3.28}$$

όπου $\pi_t = \Pi_t / P_t$, $p_{k_t} = P_{k_t} / P_t$, $p_{h_t} = P_{h_t} / P_t$

3.3.4. β *Τεχνολογία Παραγωγής*

Η τεχνολογία της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης στην περίοδο t χαρακτηρίζεται από την νεοκλασσική συνάρτηση παραγωγής:

$$Y_t \leq F(K_t, L_t) \text{ για } (t=1,2) \tag{3.29}$$

όπου : F $: \Re_+ \times \Re_+ \rightarrow \Re_+$ είναι:

(i) Συνεχώς διπλά διαφορίσιμη

(ii) αυστηρά αύξουσα

(iii) κοίλη

(iv) αυστηρά οιονεί κοίλη

(v) F (0 , .) = F (. , 0)=0

(vi) Συνθήκες Inada

$F_K \rightarrow 0$ καθώς $K \rightarrow +\infty$, $F_L \rightarrow 0$ καθώς $L \rightarrow +\infty$

$F_K \rightarrow +\infty$ καθώς $K \rightarrow 0$, $F_L \rightarrow +\infty$ καθώς $L \rightarrow 0$

(vii) Ομογενής πρώτου βαθμού

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L), \quad \forall (K, L) \in \Re_+^2, \quad \forall \lambda > 0$$

Παρατήρηση: Οι (vi) ιδιότητες της νεοκλασσικής συνάρτησης παραγωγής είναι γνωστές ως συνθήκες Inada. Γενικά οι περιορισμοί αυτοί είναι πιο ισχυροί από ότι χρειάζεται αλλά είναι ιδιαίτερα απλουστευτικοί. Οι δεσμεύσεις στις συναρτήσεις παραγωγής της νεοκλασσικής θεωρίας οικονομικής μεγέθυνσης συνεπάγονται:

(i) συνεχή οριακά προϊόντα

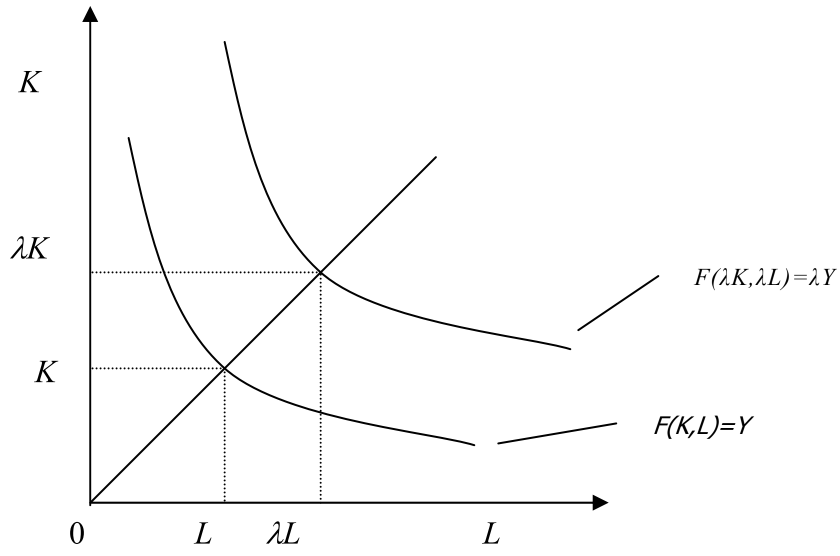
(ii) θετικά οριακά προϊόντα

(iii) φθίνοντα οριακό λόγο τεχνικής υποκατάστασης ή αυστηρά κυρτές ως προς την αρχή των αξόνων καμπύλες ισοπαραγωγής

(iv) συναρτήσεις παραγωγικοτήτων (κεφαλαίου και εργασίας) που ξεκινούν από την αρχή των αξόνων

(v) οριακά προϊόντα και καμπύλες ίσου προϊόντος που προσεγγίζουν ασυμπτωτικά τους άξονες

(vi) σταθερές αποδόσεις κλίμακος (βλέπε διάγραμμα 3.8).



Διάγραμμα 3.8

◊ *Συνάρτηση Παραγωγής Σταθερής Ελαστικότητας Υποκαταστάσης (Constant-Elasticity-of-Substitution)*

Η συνάρτηση παραγωγής τύπου CES ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες της νεοκλασσικής θεωρίας της οικονομικής μεγέθυνσης, όμως το κύριο χαρακτηριστικό της συνίσταται στο γεγονός ότι αν και έχει σε όλα της τα σημεία σταθερή ελαστικότητα υποκατάστασης, εντούτοις επιτρέπει στην τιμή της να λαμβάνει και τιμές άλλες από τη μονάδα. Η συνάρτηση αυτή έχει την μορφή:

$$F(L,K) = A\,[\,aK^{-\rho} + (1-\alpha)L^{-\rho}\,]^{-\frac{1}{\rho}}\ ,\quad A>0\ ,\ 0<\alpha<1\ ,\quad -1<\rho\neq 0$$

όπου

A = παράμετρος αποτελεσματικότητας, η οποία σχετίζεται με την υπάρχουσα τεχνολογία

a = διανεμητική παράμετρος η οποία προσδιορίζει τη σχετική συμμετοχή των παραγωγικών συντελεστών στο τελικό προϊόν

ρ = παράμετρος υποκατάστασης, η οποία προσδιορίζει την ελαστικότητα υποκατάστασης της συγκεκριμένης συνάρτησης

Υπολογίζουμε την ελαστικότητα υποκατάστασης της εργασίας με κεφάλαιο, αφού πρώτα βρούμε τις οριακές αποδόσεις MP_L και MP_K και τον οριακό λόγο τεχνικής υποκατάστασης, έτσι έχουμε :

$$-\frac{dK}{dL} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{(1-\alpha)A^{-\rho}Y^{\rho+1}L^{-(\rho+1)}}{\alpha A^{-\rho}Y^{\rho+1}K^{-(\rho+1)}} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\rho}$$

$$\sigma = \frac{\dfrac{d\left(K/L\right)}{d\left(MRTS_{K\to L}\right)}}{\dfrac{K/L}{MRTS_{K\to L}}} = \frac{\dfrac{d\left(K/L\right)}{d\left(MP_L/MP_K\right)}}{\dfrac{K/L}{MP_L/MP_K}} = \frac{\dfrac{d\left(K/L\right)}{d\left[\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\left(\dfrac{K}{L}\right)^{1+\rho}\right]}}{\dfrac{K/L}{\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\left(\dfrac{K}{L}\right)^{1+\rho}}}$$

επίσης έχουμε

$$\frac{d\left[\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\left(\dfrac{K}{L}\right)^{1+\rho}\right]}{d\left(K/L\right)} = \frac{1-\alpha}{\alpha}(1+\rho)\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho}$$

Άρα,

$$\frac{d\left(K/L\right)}{d\left[\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\left(\dfrac{K}{L}\right)^{1+\rho}\right]} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)(1+\rho)}\left(\frac{K}{L}\right)^{-\rho}$$

Ο παρανομαστής της εξίσωσης που περιγράφει την ελαστικότητα υποκατάστασης ισούται με:

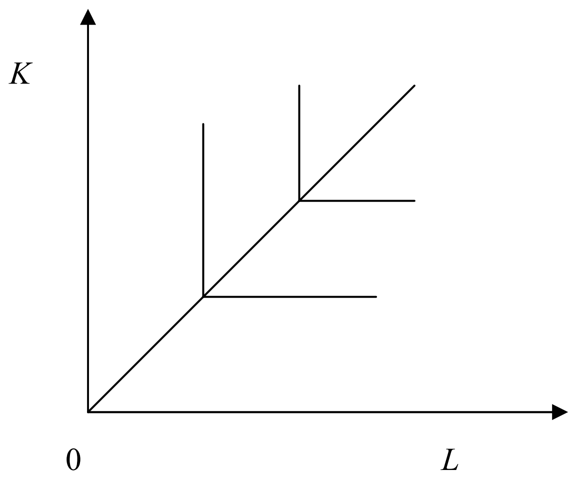
$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{K}{L}\right)^{-\rho}$$

Τέλος κάνοντας τις κατάλληλες αντικαταστάσεις υπολογίζουμε την ελαστικότητα που είναι ίση με :

$$\sigma = \frac{1}{1+\rho}$$

Παρατήρηση: Διαπιστώνουμε ότι η τυχούσα συνάρτηση παραγωγής CES, είναι σταθερή σε όλο το πεδίο ορισμού της, η τελική μορφή της συνάρτησης παραγωγής που χαρακτηρίζεται από σταθερή ελαστικότητα υποκατάστασης προσδιορίζεται από την παράμετρο ρ κατά συνέπεια η CES μπορεί να λαμβάνει τιμές και άλλες εκτός από την μονάδα. Αναλυτικότερα έχουμε :

(α) Για $\rho \to +\infty$ $(\sigma \to 0)$, η συνάρτηση παραγωγής προσεγγίζει την τεχνολογία των σταθερών αναλογίων (Leontief), συνεπώς οι καμπύλες ίσου προϊόντος τείνουν να σχηματίζουν ορθές γωνίες, όπως στο διάγραμμα 3.9.

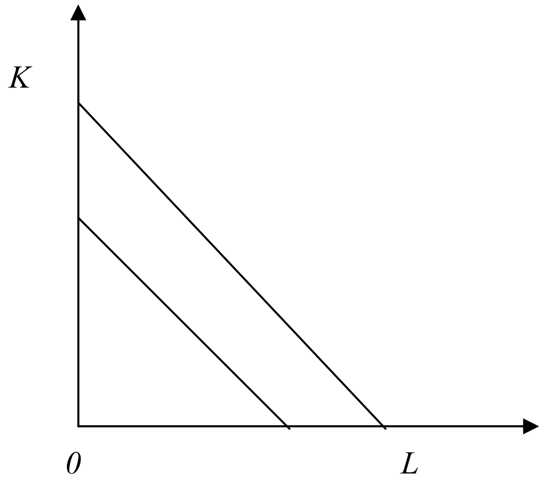


Διάγραμμα 3.9

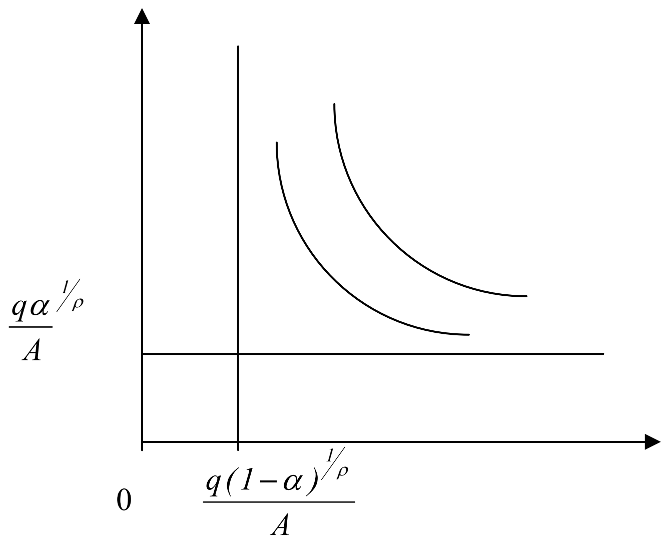
(β) Για $\rho \to 0$ $(\sigma \to 1)$, η συνάρτηση παραγωγής προσεγγίζει την Cobb-Douglas. Οι συναρτήσεις τύπου C-D αποτελούν ειδική περίπτωση των συναρτήσεων CES, έτσι αν εξετάσουμε μια ακολουθία συναρτήσεων CES τέτοιων ώστε το ρ να τείνει στο μηδέν, το όριό τους είναι μια συνάρτηση τύπου C-D, οι καμπύλες ίσου προϊόντος είναι ομαλές.

(γ) Για $\rho \to -1$ $(\sigma \to +\infty)$, η συνάρτηση παραγωγής είναι γραμμική, οι καμπύλες ίσου προϊόντος τείνουν να σχηματίζουν ευθείες γραμμές, όπως απεικονίζεται στο διάγραμμα 3.10, (τέλεια υποκατάσταση).

(δ) Για $\rho > 0$ [σ ∈ (0 , 1)], οι καμπύλες ίσου προϊόντος προσεγγίζουν ασυμπτωτικά τους άξονες είναι $L = \frac{q(1-\alpha)^{\frac{1}{\rho}}}{A}$ και $K = \frac{q\alpha^{\frac{1}{\rho}}}{A}$. (βλέπε διάγραμμα 3.11).

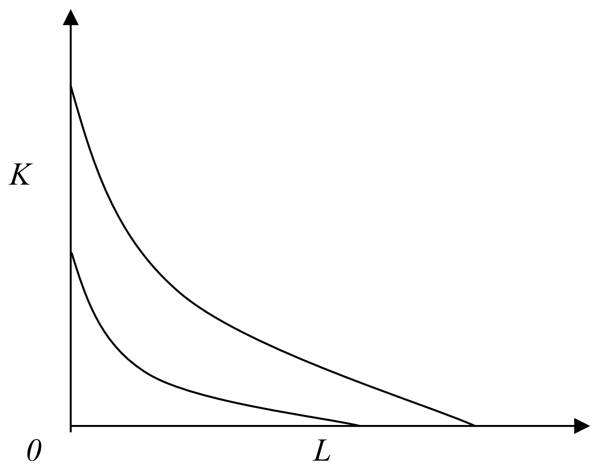


Διάγραμμα 3.10



Διάγραμμα 3.11

(ε) Για $0 > \rho > -1$ $[\sigma \in (1,+\infty)]$, οι καμπύλες ίσου προϊόντος τέμνουν τους άξονες, όπως βλέπουμε στο διάγραμμα 3.12.



Διάγραμμα 3.12

<u>Παράδειγμα-Εφαρμογή</u>: *Συνάρτηση Παραγωγής Cobb-Douglas*

$$F(K, L) = A K^{\alpha} L^{1-\alpha} \quad , \quad A>0,\ \alpha \in (0, 1)$$

ο οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης του K με το L στην παραγωγής είναι:

$$-\frac{dK}{dL} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{AK^{\alpha}(1-\alpha)L^{-\alpha}}{A\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}} = \frac{(1-\alpha)K}{\alpha L}$$

όποτε

$$\frac{\frac{dK}{dL}}{\frac{K}{L}} = \frac{(1-\alpha)}{\alpha}$$

επομένως παραγωγίζοντας την σχέση την παραπάνω σχέση ως προς K/L καταλήγουμε :

$$\frac{d\left(\frac{dK}{dL}\right)}{d\left(\frac{K}{L}\right)} = \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \text{ αντιστρέφοντας } \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{d\left(\frac{dK}{dL}\right)} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)}$$

και η ελαστικότητα υποκατάστασης του K με το L στην παραγωγή είναι:

$$\sigma = \frac{\dfrac{d\left(K/L\right)}{d\left(MRTS_{K\to L}\right)}}{\dfrac{K/L}{MRTS_{K\to L}}} = \left[\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\right]\left[\frac{\alpha}{(1-\alpha)}\right] = 1$$

η παραπάνω συνάρτηση παραγωγής ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες της συνάρτησης παραγωγής της νεοκλασσικής θεωρίας οικονομικής μεγέθυνσης.

3.3.4.γ *Επιπρόσθετοι περιορισμοί*

Επιπλέον οι επιλογές της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης δεσμεύονται από τους εξής περιορισμούς :

$$K_t \geq 0 \qquad \forall \ (t=1,2) \tag{3.30}$$

$$L_t \geq 0 \qquad \forall \ (t=1,2) \tag{3.31}$$

Το Θεώρημα του Euler

Αν η $F: \Re_+ \times \Re_+ \rightarrow \Re_+$ είναι διαφορίσιμη και ομογενής συνάρτηση πρώτου βαθμού, τότε:

$$F(K, L) = F_K(K, L)K + F_L(K, L)L, \qquad \forall K, L \in \Re_+ \times \Re_+ \tag{3.32}$$

Απόδειξη:

Από την υπόθεση:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \qquad \forall \lambda \in \Re_+,\ (K, L) \in \Re_+ \times \Re_+$$

Παραγωγίζοντας ως προς λ, έχουμε

$$F_K(\lambda K, \lambda L)\, K + F_L(\lambda K, \lambda L)\, L = F(K, L)$$

Η τελευταία σχέση μας δίνει την (3.32) για $\lambda=1$

Οι Ιδιότητες της Συνάρτησης Παραγωγικότητας

Αν η F: $\Re_+ \times \Re_+ \to \Re_+$ είναι μία συνάρτηση παραγωγής της νεοκλασσικής θεωρίας οικονομικής μεγέθυνσης τότε η συνάρτηση παραγωγικότητας $f: \Re_+ \to \Re_+$ ορίζεται από την σχέση :

$$Y = F(K,L) = LF(\frac{K}{L},1) = L f(k) \tag{3.33}$$

και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες :

(i) $F_K(K,L)=f'(k)>0$

(ii) $F_L(K, L) = f(k) - f'(k)\,k > 0$

(iii) $f(k)$ είναι αυστηρά κοίλη

(iv) $F(0,L)=F(K,0)=f(0)=0$

(v) $f'(k) \to +\infty$ *καθώς* $k \to 0$

(vi) $f'(k) \to 0$ *καθώς* $k \to +\infty$

Αποδείξεις :

(i) Από τον ορισμό (3.33) παραγωγίζοντας ως προς K :

$$F_K(K,L) = L f'(\frac{K}{L})(\frac{1}{L}) = f'(k)$$

(ii) Από την (3.33) παραγωγίζοντας ως προς L:

$$F_L(K,L) = \frac{1}{L} F(K,L) - f'(K)\frac{K}{L^2} = f(k) - f'(k)k$$

$$F_L\ (K,L) = f(k) + L\left(-\frac{K}{L^2}\right) f'(k) = f(k) - f'(k)k$$

(iii) Για να είναι η F αυστηρά κοίλη θα πρέπει να ισχύει :

$$F[\lambda K_1 + (1-\lambda)K_2\ ,\ \lambda L_1 + (1-\lambda)\ L_2] > \lambda\ F\ (K_1\ ,\ L_1) + (1-\lambda)\ F(K_2\ ,\ L_2)$$

$$\forall \lambda \in (0,\ 1),\ \ (K_1\ ,\ L_1),\ \ (K_2,\ L_2) \in \Re_{++} \times \Re_{++}$$

χωρίς απώλεια γενικότητας έστω $L_1 < L_2$

Ξέρουμε επίσης ότι η F είναι ομογενής πρώτου βαθμού έτσι έχουμε:

$$F\left[\frac{\lambda L_1}{\lambda L}\frac{K_1}{L_1} + \frac{(1-\lambda)L_2}{\lambda L}\frac{K_2}{L_2}, 1\right] >$$

$$\frac{\lambda L_1}{\lambda L} F\left(\frac{K_1}{L_1}, 1\right) + \frac{(1-\lambda)L_2}{\lambda L} F\left(\frac{K_2}{L_2}, 1\right)$$

όπου θέτω $L\lambda = \lambda L_1 + (1 - \lambda)L_2$. Επιλύοντας αλγεβρικά την παραπάνω σχέση έχουμε

$$\frac{(1-\lambda)L_2}{\lambda L} = \frac{(1-\lambda)\dfrac{\lambda L - \lambda L_1}{1-\lambda}}{\lambda L} = \frac{\lambda L - \lambda L_1}{\lambda L} = 1 - \lambda\frac{L_1}{\lambda L} = 1 - \mu$$

Τελικά καταλήγουμε

$$F\left(\mu\frac{K_1}{L_1} + (1-\mu)\frac{K_2}{L_2}, 1\right) > \mu F\left(\frac{K_1}{L_1}, 1\right) + (1-\mu) F\left(\frac{K_2}{L_2}, 1\right) \Leftrightarrow$$

$$f\,[\mu k_1 + (1-\mu)k_2] > \mu f(k_1) + (1-\mu)\,f(k_2)$$

$$\forall \ \mu \in (0,1),\ k_1,\ k_2$$

έπεται από τα παραπάνω ότι η f είναι αυστηρά κοίλη.

(v) & (vi) Συνεπάγονται από την ιδιότητα (i) και τους περιορισμούς

$F_K(K, L) \to +\infty$ καθώς $K \to 0$

$F_L(K, L) \to 0$ καθώς $K \to +\infty$ Q.E.D.

Μια απλή συνάρτηση παραγωγής η οποία ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες είναι η συνάρτηση παραγωγής τύπου Cobb-Douglas :

$$Y = A\, K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

όπου $A > 0$ είναι το επίπεδο της τεχνολογίας και α είναι μία σταθερά $0 < \alpha < 1$

Η συνάρτηση Cobb-Douglas μπορεί να μετασχηματιστεί ως:

$$y = A\, k^{\alpha}$$

για την μετασχηματισμένη συνάρτηση παραγωγικότητας τύπου Cobb-Douglas ισχύουν τα ακόλουθα :

$$f'(k) = A\, \alpha\, k^{\alpha-1} > 0$$

$$f''(k) = -A\, \alpha\, (1-\alpha)\, k^{\alpha-2} < 0$$

$$\lim_{k \to +\infty} f'(k) = 0$$

$$\lim_{k \to 0} f'(k) = +\infty$$

3.3.4.δ *Το Πρόβλημα της Αντιπροσωπευτικής Επιχείρησης*

Στην αρχή της κάθε περιόδου η αντιπροσωπευτική επιχείρηση επιλέγει ένα σχέδιο εισροών κεφαλαίου και εργασίας και συνεπώς παραγόμενου προϊόντος $(K_1, L_1, Y_1, K_2, L_2, Y_2)$ ώστε να μεγιστοποιήσει τα πραγματικά της κέρδη (3.28), υπό τους περιορισμούς της τεχνολογίας (3.29) και τους φυσικούς περιορισμούς (3.30) και (3.31) θεωρώντας τις τιμές του προϊόντος και των παραγωγικών συντελεστών σαν δεδομένες. Επίσης παρατηρούμε από τη φύση της αντικειμενικής συνάρτησης της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης ότι σε οποιαδήποτε λύση του προβλήματός της, ο ανισοτικός περιορισμός (3.29) θα ικανοποιείται με ισότητα. Με βάση τα παραπάνω το πρόβλημα της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης μπορεί να τεθεί ως εξής:

$$\max_{(Y_t,K_t,L_t)} \left\lfloor Y_t - p_{K_t} K_t - p_{h_t} L_t \right\rfloor \tag{3.34}$$

υπό τους περιορισμούς

$$Y_t \leq F(K_t, L_t)$$

$$K_t \geq 0, \qquad L_t \geq 0 \qquad\qquad \forall \ (t=1,2)$$

Η F είναι αυστηρά αύξουσα άρα συνεπάγεται ότι η (3.29) ικανοποιείται ως ισότητα στο max, συνεπώς

$$\max_{(K_t,L_t)\in\Re_+^2} \left\lfloor F(K_t,L_t) - p_{K_t} K_t - p_{h_t} L_t \right\rfloor$$

Οι συνθήκες για τη επίλυση αυτού του προβλήματος είναι οι εξής:

<u>*Συνθήκες Kuhn-Tucker:*</u>

$$F_K(K_t,L_t) - p_{k_t} \leq 0\ [=0 \quad \text{αν } K_t > 0\,] \tag{3.35}$$

$$F_L(K_t, L_t) - p_{h_t} \leq 0\ [=0 \quad \text{αν } L_t > 0\,] \tag{3.36}$$

Λόγω των συνθηκών Inada, οι σχέσεις (3.35) και (3.36) τελικά διατυπώνονται ως εξής:

$$F_K(K_t,L_t) = p_{k_t} \tag{3.37}$$

$$F_L(K_t,L_t) = p_{h_t} \tag{3.38}$$

Από (3.37) και (3.38) συνεπάγεται ότι

$$MRTS_{K \to L} = \frac{p_{h_t}}{p_{k_t}}$$

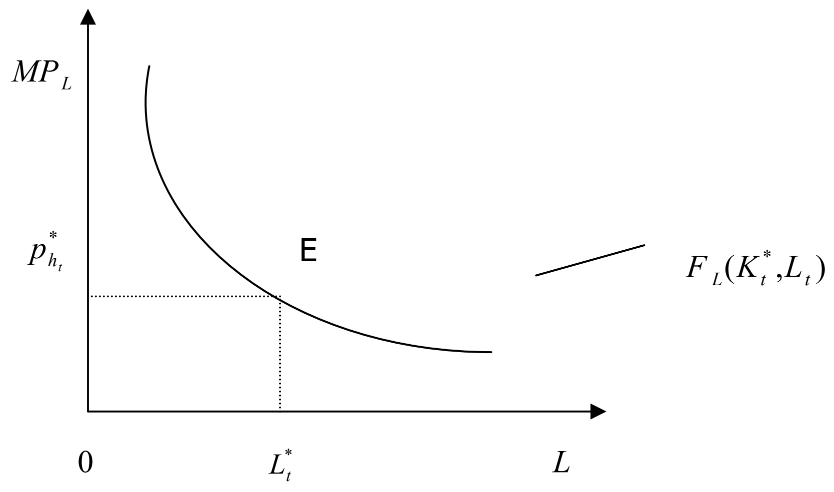
Παρατήρηση: Εφόσον η αντικειμενική συνάρτηση είναι αυστηρά κοίλη και το σύνολο των περιορισμών είναι κυρτό, οι αναγκαίες συνθήκες πρώτης τάξης είναι και ικανές Επιπροσθέτως οι δεσμεύσεις τύπου Inada στη συνάρτηση παραγωγής της νεοκλασσικής θεωρίας οικονομικής μεγέθυνσης συνεπάγονται ότι σε οποιαδήποτε λύση του προβλήματος της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης οι παραπάνω συνθήκες θα ισχύουν με ισότητα (Εσωτερική λύση).

Οικονομική Ερμηνεία: Η οικονομική ερμηνεία των παρακάτω συνθηκών είναι προφανής. Η αντιπροσωπευτική επιχείρηση θα χρησιμοποιήσει τόσες υπηρεσίες από τον κάθε παραγωγικό συντελεστή ώστε να εξισώσει την πραγματική τιμή των υπηρεσιών αυτών με το οριακό προϊόν του αντίστοιχου συντελεστή (βλέπετε Διαγράμματα 3.13 και 3.14.) Αν υποθέσουμε ότι $K_t^*, L_t^*,$ είναι ποσότητες των παραγωγικών συντελεστών που αποτελούν την άριστη λύση του προβλήματος της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης, τότε η παραγόμενη ποσότητα του προϊόντος της επιχείρησης αντανακλάται από την ακόλουθη σχέση:

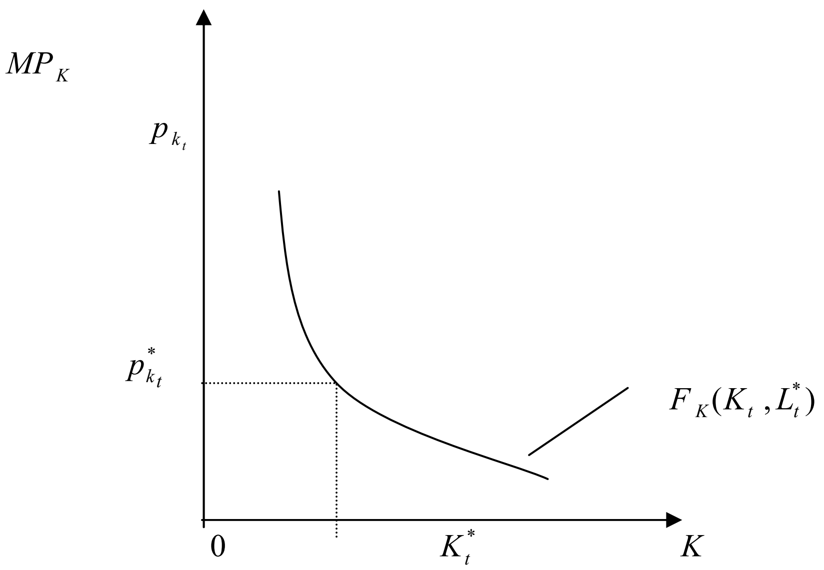
$$Y_t^* = F(K_t^*, L_t^*) \qquad (3.39)$$

3.3.4.ε Γεωμετρική Παρουσίαση

Επίλυση του προβλήματος της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης.



Διάγραμμα 3.13



Διάγραμμα 3.14

3.3.5 Το Σημείο Ανταγωνιστικής Ισορροπίας (ΣΑΙ)

Η ανταγωνιστική γενική ισορροπία της οικονομίας χαρακτηρίζεται από μια ακολουθία:

$$\left\{c_t^*, i_t^*, h_t^*, k_{t+1}^*; Y_t^*, K_t^*, L_t^*; p_{k_t}^*, p_{h_t}^*; d_t^*, \pi_t^*\right\}_{t=1}^{2}$$

τέτοια ώστε:

- Δεδομένης της ακολουθίας $\left\{p_{K_t}, p_{h_t}\right\}_{t=1}^{2}$ η ακολουθία $\left\{c_t^*, i_t^*, h_t^*\right\}_{t=1}^{2}$ αντιστοιχεί σε μια $\left\{\mathrm{k}_t^*, \mathrm{h}_t^*, \mathrm{k}_{t+1}^*\right\}_{t=1}^{2}$ λύση του προβλήματος του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού.

- Δεδομένης της ακολουθίας $\left\{p_{k_t}, p_{h_t}, d_t\right\}_{t=1}^{2}$ η ακολουθία $\left\{Y_t^*, K_t^*, L_t^*\right\}_{t=1}^{2}$ αποτελεί λύση του προβλήματος της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης.

- Δεδομένης της ακολουθίας $\left\{c_t, i_t, h_t; Y_t, K_t, L_t; d_t\right\}_{t=1}^{2}$ η ακολουθία $\left\{p_{k_t}^*, p_{h_t}^*, d_t^*\right\}_{t=1}^{2}$ εκκαθαρίζει τις αγορές υπό την έννοια ότι εξισώνει την προσφορά με την αντίστοιχη ζήτηση:

(ι) *Αγορές Προϊόντος:*

$$mY_1^* = ny_1^* = n(c_1^* + i_1^*) \qquad (3.40)$$

$$mY_2^* = ny_2^* = n(c_2^* + i_2^*)$$

(ιι) *Αγορές Υπηρεσιών Κεφαλαίου:*

$$mK_1^* = n\,k_1^* \qquad (3.41)$$

$$mK_2^* = n\,k_2^*$$

(ιιι) *Αγορές Υπηρεσιών Εργασίας:*

$$mL_1^* = nh_1^{*`} \qquad (3.42)$$

$$mL_2^* = nh_2^*$$

(ιν) Συνθήκη Διανομής Κερδών:

$$\pi_1^* = d_1^* = 0$$

$$\pi_2^* = d_2^* = 0 \qquad \forall t = 1,2$$

3.3.6 Οι Κανόνες Κίνησης του Σημείου Ανταγωνιστικής Ισορροπίας

Οι υποθέσεις για τις ιδιότητες των προτιμήσεων που έχουν γίνει έχουν εξασφαλίσει την ύπαρξη και μοναδικότητα εσωτερικής λύσης στο πρόβλημα μεγιστοποίησης της ευημερίας του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού. Ομοίως, οι υποθέσεις για τα χαρακτηριστικά της τεχνολογίας έχουν εξασφαλίσει την ύπαρξη και μοναδικότητα εσωτερικής λύσης στο πρόβλημα μεγιστοποίησης των κερδών της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης. Δεδομένων των επιλογών των οικονομικών μονάδων, καθορίζεται ένα διάνυσμα σχετικών τιμών που εξισώνει τις δυνάμεις της προσφοράς και της ζήτησης στις επιμέρους αγορές παραγωγικών συντελεστών και τελικού προϊόντος.

Συνεπώς, στο ΣΑΙ θα ισχύουν ταυτόχρονα οι ακόλουθες συνθήκες που επαναλαμβάνονται για διευκόλυνση:

$$U_{c_1}(c_1^*, l_1^*) p_{h_1}^* = U_{l_1}(c_1^*, l_1^*) \tag{3.24}$$

$$U_{c_1}(c_1^*, l_1^*) = U_{c_2}(c_2^*, l_2^*)(1 + p_2^* - \delta) \tag{3.25}$$

$$U_{c_2}(c_2^*, l_2^*) p_{h_2}^* = U_{l_2}(c_2^*, l_2^*) \tag{3.26}$$

$$U_{c_2}(c_2^*, l_2^*) = v'(k_3^*) \tag{3.27}$$

$$k_1 \in \Re_+ \qquad \text{δεδομένο} \tag{3.22}$$

$$F_K(K_t^*, L_t^*) = p_{k_t}^* \qquad \forall\ t=1,2 \tag{3.37}$$

$$F_L(K_t^*, L_t^*) = p_{h_t}^* \qquad \forall\ t=1,2 \tag{3.38}$$

$$mY_t^* = ny_t^* = n(c_t^* + i_t^*) \qquad \forall\ t=1,2 \tag{3.40}$$

$$mK_t{*} = nk_t{*} \qquad \forall\ t{=}1{,}2 \qquad (3.41)$$

$$mL_t{*} = nh_t{*} \qquad \forall\ t{=}1{,}2 \qquad (3.42)$$

Συνδυάζοντας τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για τη λύση του προβλήματος του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού, τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για τη λύση του προβλήματος της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης και τον ορισμό του σημείου ανταγωνιστικής ισορροπίας συνεπάγεται ότι οι ακόλουθες δύο Συνθήκες (Συνθήκες Euler) πρέπει να ικανοποιούνται στο σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας:

$$\frac{u_{l_t}(c_t^*,l_t^*)}{u_{c_t}(c_t^*,l_t^*)} = F_L(K_t^*,L_t^*) \Leftrightarrow\ MRS_{c_t\to l_t} = MP_{L_t} \quad (\forall\ t{=}1{,}2) \qquad (3.43)$$

$$\frac{u_{c_t}(c_t^*,l_t^*)}{u_{c_{t+1}}(c_{t+1}^*,l_{t+1}^*)} = \beta\left[1-\delta+F_K\left(k_{t+1}^*,h_{t+1}^*\right)\right] \Leftrightarrow MRS_{c_{t+1}\to c_t} = MRT_{c_{t+1}\to c_t} =$$

$$= [1-\delta+MP_{K_{t+1}}] \ (\forall\ t{=}1{,}2) \qquad (3.44)$$

μαζί με την Τερματική Συνθήκη:

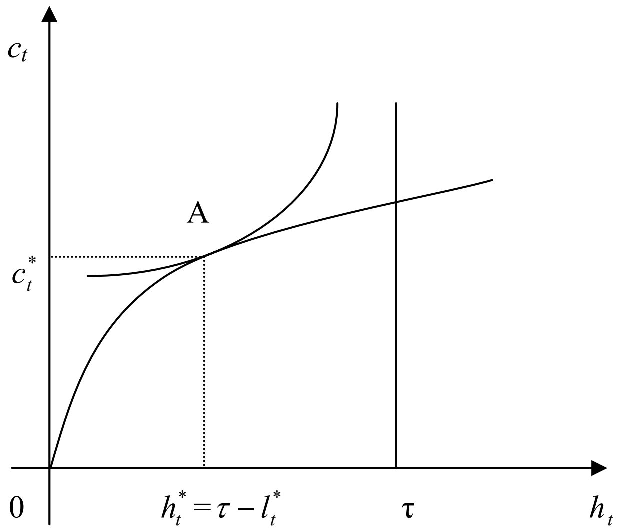
$$\mathrm{u_c(c_T^*,l_T^*) = v'(k_{T+1}^*)}, \qquad (\mathrm{T} = 2) \qquad (3.45)$$

$k_1^* = k_1$ δεδομένο

όπου έχουμε κρατήσει μόνο τις ισότητες στις σχέσεις (3.23), (3.24), (3.25) και (3.26) δεδομένου ότι αν h_t, $k_{t+1} = 0 \quad (t = 1,2)$, τα δεξιά μέλη (και μικρότερα σε απόλυτη τιμή) των σχέσεων αυτών θα έπρεπε να είναι συν άπειρο ενώ τα αριστερά μέλη θα έπρεπε να είναι πραγματικοί αριθμοί, πράγμα που είναι αδύνατο.

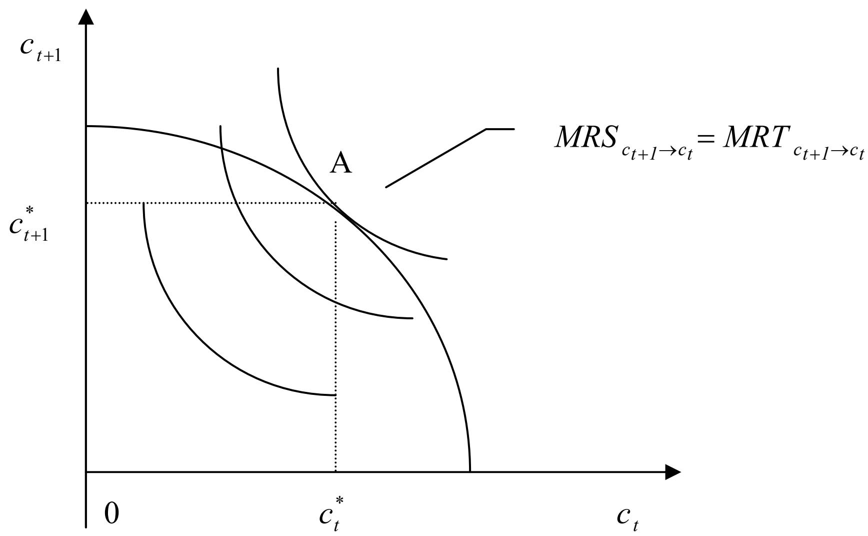
Οικονομική Ερμηνεία: Η πρώτη Συνθήκη του Euler εξισώνει τον οριακό λόγο υποκατάστασης c_t με l_t με το οριακό προϊόν της εργασίας (βλέπε Διάγραμμα 3.15). Δηλαδή, εξισώνει την αξία μιας ώρας ελεύθερου χρόνου στην κατανάλωση $\left(\frac{u_{l_t}}{u_{c_t}}\right)$

με την αξία μιας ώρας εργασίας στην παραγωγή (F_{L_t}), σε κάθε περίοδο της ζωής του νοικοκυριού. Το ίδιο ισχύει και με τη δεύτερη συνθήκη Euler που εξισώνει τον οριακό λόγο υποκατάστασης c_2 με c_1 με το μικτό οριακό προϊόν του κεφαλαίου στην περίοδο 2. Δηλαδή, εξισώνει την αξία μιάς μονάδας κεφαλαίου που καταναλώνεται την περίοδο 1 με την αξία μιάς μονάδας κεφαλαίου που δεν καταναλώνεται την περίοδο αυτή, (βλέπε διάγραμμα 3.16).



Διάγραμμα 3.15

Στο σημείο Α ισχύει ότι: $MRS_{c_t \to l_t} = MP_{L_t}$. Η συνάρτηση παραγωγής που συγκεκριμένου διαγράμματος είναι της μορφής $F(K_t, \frac{nh_t}{m})$.



Διάγραμμα 3.16

Άσκηση 3.2: Αν η συνάρτηση παραγωγής $F: \Re_+ \times \Re_+ \to \Re_+$ είναι διαφορίσιμη και ομογενής πρώτου βαθμού δείξτε πως:

$F_K\,(K, L) = F_K\,(k, h)$

$F_L\,(K, L) = F_L\,(k, h)$

όπου $mK = nk$ και $mL = nh$.

Λύση: Εφόσον η συνάρτηση παραγωγής είναι ομογενής πρώτου βαθμού, καθώς και διαφορίσιμη έχουμε:

$$F\,(K, L) = F\,(nk/m, nh/m) = \frac{n}{m} F\,(k, h) = \frac{n}{m} F\,(\frac{mK}{n}, \frac{mL}{n})$$

$$F_K\,(K, L) = \frac{n}{m} F_K\,(k, h) \frac{m}{n} = F_K\,(k, h)$$

και

$$F_L\,(K, L) = \frac{n}{m} F_L\,(k, h) \frac{m}{n} = F_L\,(k, h) \qquad \text{Q.E.D.}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Η έκφραση $1\text{-}\delta + F_K\,(K_{t+1}, L_{t+1})$ είναι ο οριακός λόγος μετασχηματισμού του c_{t+1} σε c_t. Δηλαδή, είναι η κλίση της καμπύλης παραγωγικών δυνατοτήτων της οικονομίας μεταξύ παρούσας κατανάλωσης c_t και της κατανάλωσης της επόμενης περιόδου c_{t+1}, των λοιπών προϊόντων και των υπηρεσιών των παραγωγικών συντελεστών παραμενόντων σταθερών. Συνεπώς:

$$MRT_{c_{t+1} \to c_t} = -\frac{dc_{t+1}}{dc_t} = 1\text{-}\delta + F_K\,(K_{t+1}, L_{t+1})$$

Απόδειξη: Από την συνθήκη για την εκκαθάριση της αγοράς προϊόντος την περίοδο $t+1$, έχουμε:

$n(c_{t+1} + i_{t+1}) = mY_{t+1}$

η συνάρτηση προσφοράς της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης περιγράφεται παρακάτω, και λαμβάνοντας υπόψη την ιδιότητα της γραμμικής ομογένειας έχουμε:

$$n(c_{t+1} + i_{t+1}) = mF(K_{t+1}, L_{t+1})$$

$$c_{t+1} + i_{t+1} = F\left(\frac{mK_{t+1}}{n}, \frac{mL_{t+1}}{n}\right)$$

Με βάση τις συνθήκες εκκαθάρισης των αγορών κεφαλαίου και εργασίας στην περίοδο *t+1:*

$$c_{t+1} + i_{t+1} = F(k_{t+1}, h_{t+1})$$

Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψη τον κανόνα μετάβασης του κεφαλαίου του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού και επαναλαμβάνοντας τα πρώτα τρία βήματα αυτής της απόδειξης για τα αντίστοιχα μεγέθη της περιόδου t, έχουμε:

$$c_{t+1} + k_{t+2} - (1-\delta)k_{t+1} = F(k_{t+1}, h_{t+1}) \Leftrightarrow$$
$$c_{t+1} + k_{t+2} = F(k_{t+1}, h_{t+1}) + (1-\delta)k_{t+1} =$$
$$= F\{[(1-\delta)k_t + i_t], h_{t+1}\} + (1-\delta)[(1-\delta)k_t + i_t] =$$
$$= F\,[(1-\delta)k_t + F(k_t, h_t) - c_t, h_{t+1}] + (1-\delta)[(1-\delta)k_t + F(k_t, h_t) - c_t] \Leftrightarrow$$
$$F\{[(1-\delta)k_t + F(k_t, h_t) - c_t], h_{t+1}\} + (1-\delta)[(1-\delta)k_t + F(k_t, h_t) - c_t] - c_{t+1} - k_{t+2} = 0$$

αλλά η κλίση της τελευταίας συνάρτησης στο χώρο (c_t, c_{t+1}) δίνεται από την σχέση:

$$F_K(K_{t+1}, L_{t+1})(-1)\,dc_t + (1-\delta)(-1)dc_t + (-1)dc_{t+1} = 0$$

Παραπάνω έχουμε αποδείξει ότι $F_K(k_t, h_t) = F_K(K_t, L_t)$ (Βλέπετε Άσκηση 3.2) συνεπώς:

$$-\frac{dc_{t+1}}{dc_t} = 1 - \delta + F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) \qquad Q.E.D.$$

3.3.7. Pareto Optimum

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση του σημείου της ανταγωνιστικής ισορροπίας, αξίζει να σημειωθεί ότι οι συνθήκες (3.43) - (3.45) προκύπτουν και από το πρόβλημα ενός κοινωνικού σχεδιαστή, ο οποίος προσπαθεί να μεγιστοποιήσει την ευημερία του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού υπό τον περιορισμό της διαθέσιμης τεχνολογίας και τους περιορισμούς των διαθεσίμων οικονομικών πόρων. Δηλαδή, από ένα πρόβλημα της μορφής: υπό τους

$$\max_{\{c_t, i_t, l_t, h_t\}_{t=1}^{2}} [U(c_1, l_1, c_2, l_2) + v(k_3)] \quad (3.46)$$

$$c_t + i_t \leq F(k_t, h_t) \quad \forall\ t=1,2 \quad (3.47)$$

$$k_{t+1} = (1-\delta)\, k_t + i_t \quad \forall\ t=1,2 \quad (3.48)$$

$$c_t, k_{t+1}, l_t, h_t \geq 0 \quad \forall\ t=1,2 \quad (3.49)$$

$$l_t + h_t \leq \tau \quad \forall\ t=1,2 \quad (3.50)$$

$$k_1 \in (0, +\infty) \quad \text{δεδομένο} \quad (3.51)$$

Παρατήρηση: Για λόγους που έχουμε ήδη εξηγήσει, οι περιορισμοί (3.46) και (3.50) δεν μπορεί να ισχύουν με ανισότητα σε μία λύση του παραπάνω προβλήματος. Άρα, χωρίς απώλεια γενικότητας το πρόβλημα του κοινωνικού σχεδιαστή μπορεί να τεθεί ως εξής:

$$\max_{k_2, h_1, k_3, h_2 \geq 0} \{ U\, [F(k_1, h_1) - k_2 + (1-\delta) k_1, \tau - h_1, F(k_2, h_2) - k_3 + (1-\delta) k_2, \tau - h_2] + v(k_3)\} \quad (3.52)$$

Συνεπάγεται ότι οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για μία λύση του προβλήματος του κοινωνικού σχεδιαστή είναι οι (3.43) - (3.45). Η λύση του προβλήματος του κοινωνικού σχεδιαστή χαρακτηρίζει την Pareto Optimum κατανομή των οικονομικών πόρων. Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να εκφρασθούν ως εξής:

Θεώρημα (Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα των Οικονομικών της Ευημερίας):

Το σημείο Ανταγωνιστικής Ισορροπίας στο Νεοκλασσικό Υπόδειγμα Οικονομικής Μεγέθυνσης, αν υπάρχει, είναι Pareto Optimum. Το παραπάνω προέρχεται από το Πρώτο Θεώρημα της Οικονομίας της Ευημερίας. Το θεώρημα αυτό εξασφαλίζει ότι μια ανταγωνιστική αγορά θα εξαντλήσει όλα τα κέρδη από συναλλαγές. Μια κατανομή ισορροπίας που επιτυγχάνεται από ένα σύνολο ανταγωνιστικών αγορών θα είναι κατ'ανάγκην αποτελεσματική κατά Pareto.

Μια κατανομή ονομάζεται άριστη ή αποτελεσματική κατά Pareto, αν δεν είναι δυνατό, μέσα από μια αναδιοργάνωση της παραγωγής και ανταλλαγής, να βελτιώσουμε την θέση ενός ατόμου χωρίς να χειροτερεύσουμε τη θέση κάποιου άλλου. Τέλος θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η αριστοποίηση κατά Pareto μας παρέχει ένα κριτήριο οικονομικής αποτελεσματικότητας που κυριαρχεί στην σύγχρονη οικονομική της ευημερίας.

Παρατήρηση: Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση U είναι αυστηρά κοίλη, κάθε λύση των εξισώσεων (3.42) - (3.45) είναι η μοναδική λύση του προβλήματος του κοινωνικού σχεδιαστή. Αυτό είναι σημαντικό διότι μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας υπάρχει και στην συνέχεια να το χαρακτηρίσουμε, αν υπάρχει, λύνοντας το πρόβλημα του κοινωνικού σχεδιαστή. Το πρόβλημα αυτό είναι πολύ πιο εύκολο να λυθεί από ότι το πρόβλημα του σημείου της ανταγωνιστικής ισορροπίας.

3.4 Το Υπόδειγμα Cass-Koopmans με Άπειρο Χρονικό Ορίζοντα

3.4.1α. *Άπειρος Χρονικός Ορίζοντας*

Αν τα νοικοκυριά της οικονομίας που μελετούμε ζούσαν τρείς αντί δύο περιόδους είναι προφανές ότι και οι νόμοι κίνησης του σημείου της ανταγωνιστικής ισορροπίας (3.43), (3.44) και (3.45) θα εξακολουθούσαν να ισχύουν για $t=1,2,3$, $t=1,2$ *και* $t=3$, αντίστοιχα. Γενικά, αν τα νοικοκυριά της οικονομίας που μελετούμε ζούσαν T περιόδους, όπου $T \in N_+$ είναι προφανές εξίσου, ότι οι νόμοι κίνησης του σημείου της ανταγωνιστικής ισορροπίας θα εξακολουθούν να ισχύουν για $t=1,\ldots, T$, $t=1, \ldots T-1$ και $t=T$, αντίστοιχα. Εύλογα όμως γεννιέται το ερώτημα αν οι ίδιες σχέσεις εξακολουθούν να ισχύουν καθώς ο χρόνος ζωής των νοικοκυριών στην οικονομία που μελετούμε τείνει στο άπειρο. Για παράδειγμα, αν δεχθούμε ότι τα νοικοκυριά που μελετούμε είναι δυναστείες που αναμένεται να ζουν για πάντα, ο χρόνος T του υποδείγματός μας τείνει στο άπειρο. Οι οικονομολόγοι προτιμούν αυτή τη "δομή" γιατί οποιοδήποτε πεπερασμένο T δημιουργεί ερωτηματικά αυθαιρεσίας. Τέλος, η περίπτωση του πεπερασμένου ορίζοντα μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση άπειρου χρονικού ορίζοντα. Μπορεί να δείξει κανείς με πεπερασμένη επαγωγή ότι στην περίπτωση άπειρου χρονικού ορίζοντα το σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας θα χαρακτηρίζεται από τις σχέσεις (3.43) και (3.44) για όλα τα $t \in N_+$. Στην περίπτωση της συνθήκης (3.45) όμως τα πράγματα είναι διαφορετικά καθώς το T τείνει στο άπειρο.

Στην περίπτωση του πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα $T \in N_+$, η συνθήκη (3.45) σημαίνει ότι η αξία του κεφαλαίου την περίοδο $T + 1$, είναι ίση με την οριακή χρησιμότητα της κατανάλωσης της προηγούμενης περιόδου. Αν η αξία του κεφαλαίου την περίοδο $T + 1$ είναι θετική τότε κάποιο κεφάλαιο θα παραμείνει "αφάγωτο" στην αρχή αυτής της περιόδου. Ετσι έχουμε υποθέσει μέχρι τώρα για να εξασφαλίζουμε, βέβαια κατά τρόπο αυθαίρετο, την συνέχεια της οικονομίας. Στην περίπτωση όμως που το T πάει στο άπειρο δεν υπάρχει λόγος να παραμένει "αφάγωτο" κεφάλαιο. Συνθήκες που εξασφαλίζουν αυτό το αποτέλεσμα είναι Τερματικές Συνθήκες που καθορίζουν ότι η παρούσα αξία "αφάγωτου" κεφαλαίου καθώς ο χρόνος πηγαίνει προς το άπειρο είναι μηδέν. Παρακάτω θα αναφερθούμε σε αυτές τις συνθήκες.

3.4.1.β *Μεταβλητός Πληθυσμός*

Ο άπειρος ορίζοντας μας δίνει την ευκαιρία να εισάγουμε στο βασικό υπόδειγμα μεταβλητό πληθυσμό. Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των νοικοκυριών στην αρχή της περιόδου t, n_t, αυξάνεται με σταθερό ρυθμό, g_n:

$$n_{t+1} = (1+g_n)n_t \quad g_n \in \Re_+ \tag{3.53}$$

Ασκηση 3.3: Δείξτε πως στην οικονομία με μεταβαλλόμενο πληθυσμό το κεφάλαιο ανά νοικοκυριό ακολουθεί το νόμο κίνησης:

$$(1+g_n)k_{t+1}=(1-\delta)k_t+i_t$$

3.4.1.γ *Αγνός Συντελεστής Χρονικής Προτίμησης*

Το πρόβλημα της ανταγωνιστικής ισορροπίας ή του κοινωνικού σχεδιαστή με άπειρο χρονικό ορίζοντα απλουστεύεται σημαντικά με την υπόθεση ότι οι προτιμήσεις του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού χαρακτηρίζονται από μία χρονικά διαχωρίσιμη συνάρτηση ευημερίας της μορφής:

$$U(c_o,l_o,c_1,l_1,\ldots)=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t,l_t)n_t \qquad (3.54)$$

όπου: β $\in(0,1)$ είναι ο "αγνός συντελεστής χρονικής προτίμησης" (pure factor of time preference) και $u:\Re_+\times[0,\tau]\rightarrow\Re$ είναι μία συνάρτηση "προσωρινής χρησιμότητας" (temporal utility) στην κάθε περίοδο *t*. Ο αντίστροφος του αγνού συντελεστή χρονικής προτίμησης μετράει την προτίμηση για χρησιμότητα στην τρέχουσα έναντι χρησιμότητας της επόμενης περιόδου όταν οι καταναλωτικοί συνδυασμοί των δύο περιόδων είναι ίδιοι.

$$MRS_{c_{t+1}\rightarrow c_t}=\frac{U_{c_t}}{U_{c_{t+1}}}=\frac{u_{c_t}}{\beta(1+g_n)u_{t+1}}=\frac{1}{\beta(1+g_n)}=\frac{1}{\beta^*}$$

,όπου $\beta^*=\beta(1+g_n)$

Προφανώς ένα νοικοκυριό που έχει δυσκολία να ανταλλάξει τρέχουσα κατανάλωση για κατανάλωση αργότερα θα τείνει να έχει σχετικά χαμηλό *β*. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημάνουμε ότι το πλεονέκτημα των χρονικά διαχωρίσιμων περιόδων είναι ότι το σύστημα των συνθηκών Euler (3.43) και (3.44) γίνεται αυτόνομο. Το ακριβές νόημα αυτού του αποτελέσματος θα γίνει αντιληπτό αργότερα.

3.4.2 Συνθήκες Euler για το Σημείο Ανταγωνιστικής Ισορροπίας με Μεταβαλλόμενο Πληθυσμό

Λαμβάνοντας υπ' όψη τις σχέσεις (3.53) και (3.54) έπεται ότι οι συνθήκες Euler του Σημείου Ανταγωνιστικής Ισορροπίας (3.43) και (3.44) μπορούν να γραφούν με τον ακόλουθο τρόπο, αντικαθιστώντας την (3.45) με την Τερματική συνθήκη:

$$\frac{u_{l_t}}{u_{c_t}} = F_L(k_t, h_t)\ ,\ (\forall\ t = 1,2) \qquad (3.55)$$

$$u_{c_t} = \beta\, u_{c_{t+1}}\,[1 - \delta + F_K(k_{t+1}, h_{t+1})]\ \ (\forall\ t=1,2) \qquad (3.56)$$

$$\beta^t\, u_{c_t}\, k_{t+1} \to 0 \quad \text{καθώς}\ \ t \to +\infty \qquad (3.57)$$

Παρατήρηση: Μπορεί να δειχθεί ότι οι συνθήκες (3.55) - (3.57) είναι αναγκαίες και ικανές για τη λύση του προβλήματος του κοινωνικού σχεδιαστή και της ανταγωνιστικής ισορροπίας. Σημειώνεται ότι γενικά σε προβλήματα με άπειρο χρονικό ορίζοντα οι κατάλληλες συνθήκες "καμπυλότητας" (curvature) δεν κάνουν τις συνθήκες πρώτης τάξης ικανές. Συνήθως χρειάζονται και τερματικές συνθήκες όπως η (3.57). Περνάμε τώρα στην ανάλυση της πορείας μιάς οικονομίας που ικανοποιεί τις συνθήκες (3.55) - (3.57).

Πρόταση: Το *σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας*

$$\{(c_t, i_t, l_t, h_t), (Y_t, K_t, L_t), (p_{k_t}, p_{h_t}, d_t)\}_{t=0}^{\infty}$$

μπορεί να χαρακτηρισθεί κατά μοναδικό τρόπο από την ακολουθία του κεφαλαίου και εργασίας ανά νοικοκυριό $\{ k_{t+1}, h_t \}_{t=0}^{\infty}$

Απόδειξη: Από τη συνθήκη ισορροπίας στην αγορά προϊόντος, (3.40), έχουμε

$$n_t\,(c_t + i_t) = mF(K_t, L_t),\ \forall t \in N_+$$

Διαιρώντας με τον αριθμό των νοικοκυριών και αναγνωρίζοντας την ιδιότητα των σταθερών αποδόσεων κλίμακας της συνάρτησης παραγωγής και τις συνθήκες ισορροπίας τις αγορές υπηρεσιών κεφαλαίου και εργασίας, (3.41) και (3.42), έχουμε:

$$\begin{aligned} c_t + i_t &= (m/n_t)\,F\,(K_t, L_t) \\ &= F\left(\frac{mK_t}{n_t},\ \frac{mL_t}{n_t}\right) \\ &= F\,(k_t, h_t) \end{aligned} \tag{3.58}$$

Από τον κανόνα μετάβασης του κεφαλαίου (βλέπε Άσκηση 3.3), έχουμε:

$$i_t = (1 + g_n)k_{t+1} - (1\text{-}\delta)k_t \tag{3.59}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.58) και (3.59), έχουμε:

$$c_t = F(k_t h_t) + (1\text{-}\delta)k_t - (1\text{-}g_n)k_{t+1} \tag{3.60}$$

Επίσης, από την προηγούμενη άσκηση (3.2) έχουμε:

$$F_K\,(K_t, L_t) = F_K\,(k_t, h_t)$$

$$F_L\,(K_t, L_t) = F_L\,(k_t, h_t)$$

και τέλος, έχουμε $d_t = 0$.

Επομένως, συνεπάγεται από τον ορισμό του σημείου της ανταγωνιστικής ισορροπίας και τις παραπάνω σχέσεις ότι αν η ακολουθία

$$\{\,(c_t^*, l_t^*, i_t^*, h_t^*), (Y_t^*, K_t^*, L_t^*), (p_{k_t}^*, p_{h_t}^*, d_t^*)\,\}_{t=0}^{\infty}$$

είναι ένα σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας τότε μπορεί να χαρακτηρισθεί κατά μοναδικό τρόπο από την ακολουθία $\{k^*_{t+1}, h^*_t\}_{t=0}^{\infty}$, σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$c_t^* = F\,(k_t,\ h_t) + (1-\ \delta)\,k_t\ -\ (1 + g_n)\,k_{t+1} \tag{3.61}$$

$$l_t^* = \tau -\ h_t \tag{3.62}$$

$$i_t^* = (1 + g_n)\,k_{t+1}\ -\ (1\text{-}\delta)\,k_t \tag{3.63}$$

$$h_t^* = h_t \tag{3.64}$$

$$Y_t^* = F\left(\frac{n_t k_t}{m},\ \frac{n_t h_t}{m}\right) \tag{3.65}$$

$$K_t^* = \frac{n_t k_t}{m} \tag{3.66}$$

$$L_t^* = \frac{n_t h_t}{m} \tag{3.67}$$

$$p_{k_t}^* = F_K\ (k_t, h_t\ ) \tag{3.68}$$

$$p_{l_t}^* = F_L\ (k_t, h_t\ ) \tag{3.69}$$

$$\pi_t^* = 0 \tag{3.70}$$

Q.E.D.

<u>Παρατήρηση</u>: Οι νόμοι κίνησης του σημείου της ανταγωνιστικής ισορροπίας μπορούν να εκφρασθούν σε σχέση με την ακολουθία $\{\ k_{t+1}, h_t\ \}_{t=0}^{\infty}$ ως εξής:

$$\frac{u_{l_t}\ [\ F(k_t, h_t\ ) + (1 - \delta\ ) k_t - (1 + g_n\ ) k_{t+1}, \tau - h_t\ ]}{u_{c_t}\ [\ F(k_t, h_t\ ) + (1 - \delta\ ) k_t - (1 + g_n\ ) k_{t+1}, \tau - h_t\ ]} = F_L(k_t, h_t\ ) \tag{3.71}$$

$$\begin{aligned} u_{c_t}\ [\ F(k_t, h_t\ ) + (1 - \delta\ ) k_t - (1 + g_n\ ) k_{t+1}, \tau - h_t\ ] = \beta\, u_{c_{t+1}} \{\ [\ F(k_{t+1}, h_{t+1}\ ) + \\ + (1 - \delta\ ) k_{t+1} - (1 + g_n\ ) k_{t+2}, \tau - h_{t+1}\ ]\ \}\ [\ 1 - \delta + F_K(k_{t+1}, h_{t+1}\ )\ ] \end{aligned}$$

Ασκηση 3.4: Δείξτε ότι η τελευταία σχέση μετατρέπεται ως εξής:

$$u_{c_t}\ [F(k_t, h_t) + (1 - \delta) k_t - (1 + g_n) k_{t+1}, \tau - h_t](1 + g_n) =$$

$$\begin{aligned} \beta\, u_{c_{t+1}}\ [F(k_{t+1}, h_{t+1}) - (1 + g_n) k_{t+2} + (1 - \delta) k_{t+1}, \tau - h_{t+1}] \\ [(1 - \delta) + F_k(k_{t+1}, h_{t+1})] \end{aligned}$$

όταν ο κοινωνικός σχεδιαστής δεν ενδιαφέρεται για την μελλοντική αύξηση του αριθμού των νοικοκυριών ή την αύξηση του αριθμού των μελών του κάθε νοικοκυριού αν ο αριθμός των νοικοκυριών παραμένει σταθερός. Δηλαδή, όταν η συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας είναι η εξής:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t\, u(c_t, l_t)$$

Πρόταση: Έστω ότι η συνάρτηση χρησιμότητας, *u(c,l),* και η συνάρτηση παραγωγής, *F(k,h),* ικανοποιούν τις συνθήκες του υποδείγματος Cass-Koopmans. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι η κατανάλωση αγαθών και υπηρεσιών αφ'ενός και η σχόλη αφ'ετέρου είναι συμπληρωματικά αγαθά, δηλ., $u_{cl}(c,1)>0$. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό σημείο $h^{*}\in(0,\tau)$ που αντιπροσωπεύει την εργασία του σημείου ανταγωνιστικής ισορροπίας, σε κάθε περίοδο, δεδομένου του κεφαλαίου στην αρχή και το τέλος της περιόδου αυτής.

Απόδειξη: Το σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας χαρακτηρίζεται από την σχέση (3.71). Το δεξί μέλος της σχέσης αυτής, $\phi(k,h)\equiv F_L(k_t,h_t)$, δηλαδή $\phi(.)=MP_L$ η συνάρτηση $\phi:\Re_{+}\times\Re_{+}\rightarrow\Re_{+}$ έχει αυστηρά θετικές τιμές για $(k,h)\neq 0$, είναι επίσης διαφορήσιμη και αυστηρά φθίνουσα συνάρτηση της εργασίας:

$$\phi:\in(\Re_{++}\times\Re_{++})$$

$$\phi_h(k,h)=F_{LL}(k,h)<0$$

$$\phi_K(k,h)=F_{KL}(k,h)\gtreqless 0$$

Επιπλέον από τις συνθήκες Inada συνεπάγεται ότι,

$$\phi\rightarrow+\infty \quad \text{καθώς} \quad h\rightarrow 0$$

$$\phi\rightarrow 0 \quad \text{καθώς} \quad h\rightarrow+\infty$$

Από το αριστερό μέλος της (3.71), ορίζουμε μια άλλη συνάρτηση $\chi(k,k',h)$,η οποία είναι

$$\chi:\ \Re_{+}\times\Re_{+}\times(0,\tau)\rightarrow\Re_{+}$$

$$\chi:\ [\Re_{++}\times\Re_{++}(0,\tau)]$$

έχει αυστηρηρά θετικές τιμές για $(k,k',h)\neq 0$ και είναι διαφορίσιμη ως προς $(k,k',h)\neq 0$, προφανώς $\chi(.)=MRS_{c\rightarrow l}$

$$\chi(k,k',h)\equiv\frac{u_l[F(k,h)+(1-\delta)k-k',\tau-h]}{u_c[F(k,h)+(1-\delta)k-k',\tau-h]} \tag{3.72}$$

είναι επίσης μια θετική και διαφορήσιμη συνάρτηση της εργασίας:

Έπειτα,

$$\chi_h(k,k',h) = \frac{(u_{lc} F_h - u_{ll})u_c - (u_{cc} F_h - u_{cl})u_l}{u_c^2} \tag{3.73}$$

Η $u(c,l)$ είναι διαφορήσιμη και αυστηρά αύξουσα συνάρτηση, u_c, $u_l > 0$. Εφόσον, $u(c,l)$ είναι δύο φορές διαφορήσιμη και αυστηρά κοίλη συνάρτηση, $u_{cc}<0$, $u_{ll} < 0$. Τέλος, εφόσον τα c και l είναι συμπληρωματικά αγαθά, $u_{cl} > 0$. Έπεται ότι $\chi_h(k,k',h) > 0$.

Επίσης, παρατηρούμε ότι:

$$\chi \to +\infty \; \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma \;\; h \to \tau(l \to 0) \;\; \text{και} \; \chi \to \frac{u_l(c,\ell)}{u_c(c,\ell)} > 0$$

καθώς $h \to 0(l \to \tau)$. Επιπλέον έχουμε ότι

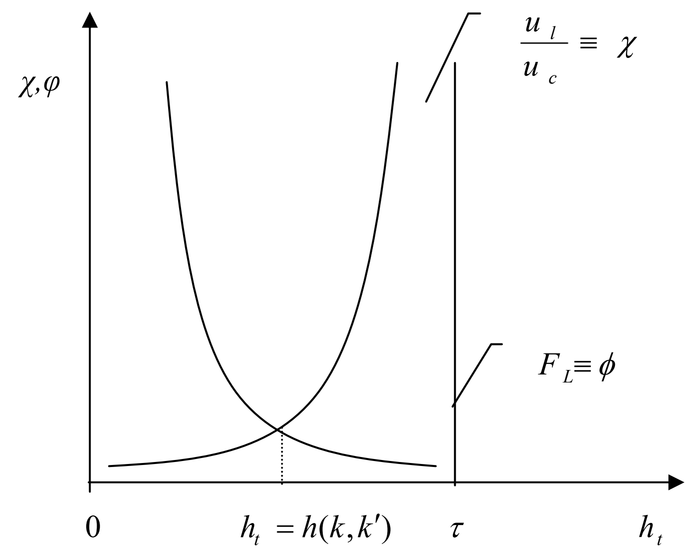
$$\chi_k(k,k',h) = \frac{\vartheta}{\vartheta k}\left[\frac{u_l(.)}{u_c(.)}\right]$$

$$= \frac{[u_{lc}u_c - u_{cc}u_l]}{u_c^2}[1-\delta + F_K] > 0$$

και

$$\chi_{k'}(k,k',h) = \frac{[u_{lc}u_c - u_{cc}u_l]}{u_c^2}[-1] < 0 \tag{3.74}$$

Η μορφή της γραφικής παράστασης των συναρτήσεων φ και χ (βλέπε διάγραμμα 3.17) αποδεικνύει ότι υπάρχει ένα μοναδικό σημείο $h^* \in (0,\tau)$ όπου οι δύο γραφικές παραστάσεις διασταυρώνονται.



Διάγραμμα 3.17

<u>**Θεώρημα:**</u> Ορίζοντας την συνάρτηση

$$\omega(h) \equiv \chi(k,k',h) - \phi(k,h) \qquad (3.75)$$

παρατηρούμε ότι:

$\omega: (0,\tau) \to \Re$

$\omega \in (0,\tau)$

$\omega' > 0$

$\omega \to -\infty$ καθώς $h \to 0$

$\omega \to +\infty$ καθώς $h \to \tau$

΄Αρα $\omega(h) < 0$ για αρκετά μικρό h και $\omega(h) > 0$ για αρκετά μεγάλο h. Κατά συνέπεια και εφόσον η ω είναι συνεχής έπεται από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής (βλέπε, π.χ., Λουκάκης (1988, τομ.Α., σελ.145)) ότι υπάρχει ένα $h^* \in (0,\tau)$ τέτοιο ώστε $\omega(h^*) = 0$. Προφανώς, η (3.71) ισχύει τότε και μόνο τότε που $\omega(h) = 0$. Απομένει να δείξουμε ότι το h^* είναι το μοναδικό σημείο όπου $\omega(h) = 0$. Αλλά αυτό είναι προφανές, διότι η ω είναι συνεχής και αυστηρά αύξουσα.

Πρόταση: Κάτω από τις υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος υπάρχει μία μοναδική συνάρτηση

$$h: \Re_{++} \times \Re_{++} \to (0,\tau)$$

που εκφράζει την εργασία του σημείου ανταγωνιστικής ισορροπίας, σε κάθε περίοδο, σε σχέση με το κεφάλαιο στην αρχή και το τέλος της περιόδου αυτής:

$$h_t = h(k_t, k_{t+1}) \tag{3.76}$$

Επίσης,

$h_k \leq 0$ όπως $\dfrac{u_{lc}u_c - u_{cc}u_l}{u_c^2}(1-\delta+F_k) \leq F_{lk}$ και

$$h_{k'} > 0$$

Απόδειξη: Ορίζοντας στην συνέχεια συνάρτηση $\omega : \Re_+ \times \Re_+ \times (0,\tau) \to \Re$

$$\omega : C'(\Re_{++} x \Re_{++} x (0,\tau))$$

$$\omega(k,k',h) \equiv \chi(k,k',h) - \phi(k,h)$$

δηλαδή $\omega \equiv MRS_{c\to l} - MP_L$

και σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει ένα και μοναδικό $h^* \in (0,\tau)$ έτσι ώστε $\omega(k,k',h^*) = 0$.

Επιπλέον, από τις σχέσεις (3.73)-(3.74) έχουμε

$$\omega_h(k,k',h^*) > 0$$

$$\omega_{k'}(k,k',h) = \chi_{k'}(k,k',h)$$

$$\omega_{k'} = \chi_{k'} = \frac{u_{lc}(-1)u_c - u_{cc}(-1)u_l}{u_c^2} < 0$$

και

$$\omega_k(.) = \chi_k(.) - \phi_k(.)$$

$$= \frac{[u_{lc}u_c - u_{cc}u_l]}{u_c^2}[1-\delta+F_K] - F_{LK} \lesseqgtr 0,$$

έπεται από το Θεώρημα των Πλεγμένων Συναρτήσεων (βλέπε, π.χ., Λουκάκης, 1988, τόμος Β!, σελ. 388-390) ότι υπάρχει μία μοναδική συνάρτηση

$h: \Re_{++} \times \Re_{++} \to (0,\tau)$

$h = h(k, k')$

$h \in (\Re_{++} \times \Re_{++})$

τέτοια ώστε

$\omega[k,k',h(k,k')] \equiv 0$

από το θεώρημα των Πεπλεγμένων Συναρτήσεων έπεται ότι:

$$h_k(.) = \frac{-\omega_k(.)}{\omega_h(.)} \geq 0, \text{ ή } \leq 0$$

$$h_{k'}(.) = -\frac{\omega_{k'}(.)}{\omega_h(.)} > 0$$

Q.E.D.

Ασκηση 3.5: Δείξτε ότι αν $u(c_t, l_t) = \gamma \ln c_t + (1-\gamma) \ln l_t$ και $F(k_t, h_t) = Ak_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$, όπου γ,α $\in (0,1)$, $A > 0$ και $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,A,g_n\}$ έτσι ώστε $c_t = (1 - s)\, y_t$, για κάποιο $s \in (0,1)$, τότε $\frac{h_t}{\tau - h_t} = \frac{(1-\alpha)\gamma}{(1-\gamma)(1-s)} > 0$. Δηλαδή, αν το ποσοστό του εισοδήματος που αποταμιεύεται, s, είναι σταθερό, τότε σταθερό είναι και το ποσοστό του χρόνου που διατίθεται για εργασία.

<u>Παρατήρηση</u>: Το σημείο της ανταγωνιστικής ισορροπίας χαρακτηρίζεται πλήρως από το κεφάλαιο του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού του οποίου ο κανόνας κίνησης είναι μια εξίσωση διαφοράς δεύτερης τάξης:

$$\begin{aligned} &+u_{c_t}\{F[k_t, h(k_t, k_{t+1})] + (1-\delta)k_t - k_{t+1}, \tau - h(k_t, k_{t+1})\} = \\ &= \beta u_{c_{t+1}}\{F[k_{t+1}, h(k_{t+1}, k_{t+2})] + \\ &+(1-\delta)k_{t+1} - k_{t+2}, \tau - h(k_{t+1}, k_{t+2})\}\ \{1 - \delta + F_k[k_{t+1}, h(k_{t+1}, k_{t+2})]\} \end{aligned} \tag{3.77}$$

υπό την αρχική συνθήκη

$$k_0 \in \Re_+ \text{ δεδομένο} \tag{3.78}$$

και την τερματική συνθήκη

$\beta^t u_{c_t}\{F[k_t, h(k_t, k_{t+1})] + (1-\delta)k_t - k_{t+1},$

$$[\tau - h(k_t, k_{t+1})]\}k_{t+1} \to 0 \text{ καθώς } t \to +\infty \qquad (3.79)$$

Δυστυχώς, εκτός από ειδικές περιπτώσεις η εξίσωση αυτή δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά[19]. Μπορούμε όμως να μάθουμε αρκετά πράγματα για την συμπεριφορά του κεφαλαίου του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού στο ΣΑΙ εξετάζοντας τις ποιοτικές ιδιότητες της εξίσωσης αυτής.

Παρατήρηση: Το αποτέλεσμα της παραπάνω πρότασης αποδεικνύει ότι δεν υπάρχει συστηματική σχέση ανάμεσα στην εργασία και το κεφάλαιο στην αρχή της κάθε περιόδου (όπως θα δούμε παρακάτω, το ίδιο ισχύει και για το κεφάλαιο της σταθερής ισορροπίας). Την πρόβλεψη της θεωρίας φαίνεται να επαληθεύουν και οι ενδείξεις. Για το λόγο αυτό, στη συνέχεια θα αγνοήσουμε την εργασία, θεωρώντας ότι το ποσοστό συνολικού χρόνου που διατίθεται για εργασία είναι σταθερό.

[19]**Οι περιπτώσεις αυτές είναι οι εξής:**

α) (i) Η τετραγωνική συνάρτηση χρησιμότητας
(ii) Η γραμμική συνάρτηση παραγωγής
(iii) Η γραμμική συνάρτηση κεφαλαίου

β) (i) Η λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας
(ii) Η Cobb-Douglas συνάρτηση παραγωγής
(iii) Ολοκληρωτική απόσβεση του κεφαλαίου

γ) [Eckstein, Φουλίδης, Κολλίντζας (1995)]
(i) Translog συνάρτηση χρησιμότητας
(ii) Translog συνάρτηση παραγωγής
(iii) Cobb-Douglas συνάρτηση μετάβασης κεφαλαίου