Στοιχεία Θεωρίας Μητρών – Ορίζουσα – Αντιστροφή

Στο προηγούμενο παρατηρήσαμε ότι η διαδικασία επίλυσης γραμμικών συστημάτων είναι δυνατόν να εφαρμόσει και την αντιστροφή κατάλληλης μήτρας από τους συντελεστές. Βάσει του ορισμού η εύρεση της αντίστροφης μπορεί να αναχθεί στην επίλυση του συστήματος $AA^{-1}=I$ ως προς τα στοιχεία της A^{-1} (με περαιτέρω διαδικασία επαλήθευσης του $A^{-1}A=I$). Στο παρακάτω περιγράφεται διαδικασία αντιστροφής που δεν εμπλέκει άμεσα την επίλυση συστήματος όπως το παραπάνω. Εμπλέκει όμως έννοιες όπως η ορίζουσα και η προσαρτημένη μήτρα της A.

A. Υπομήτρες Σχετικές με την Ορίζουσα

Ορισμός. Έστω $A\in M_{n\times n}$, με $n>1$, η υπομήτρα (submatrix) που αντιστοιχεί στην γραμμή i και στην στήλη j της A, όπου $i,j=1,\dots,n$, είναι η $(n-1)\times(n-1)$ μήτρα που προκύπτει αν διαγράψουμε την ιοστή γραμμή και την jοστή στήλη της A.

Παράδειγμα. $n=2$ $\quad A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ $\quad E_{1,1}=1,\ E_{1,2}=3,\ E_{2,1}=2,\ E_{2,2}=1.$

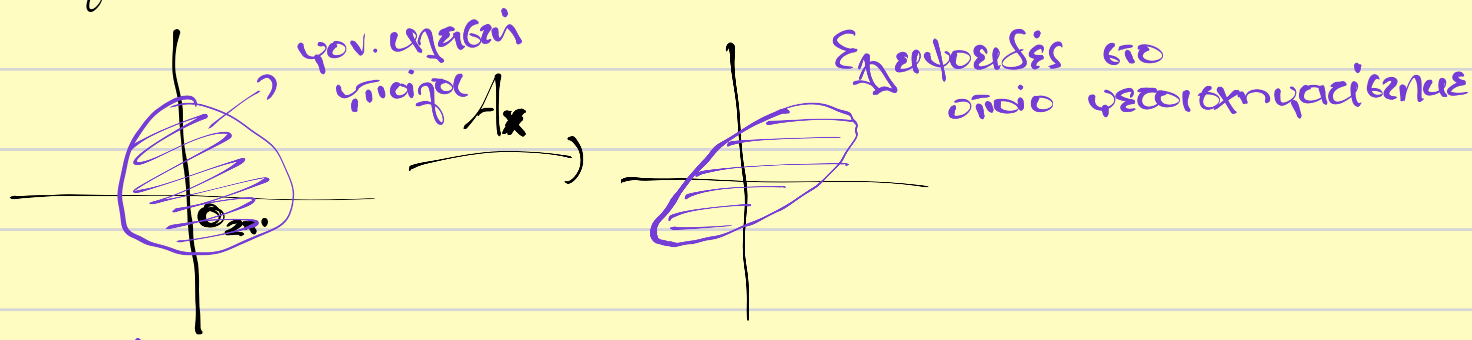
Παράδειγμα. $n=3$ $\quad A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 5 & 3\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ $\quad E_{2,1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ (βρείτε τις υπόλοιπες).

Είναι προφανές ότι γενικά η A θα έχει n^2 τέτοιες υπομήτρες. Θα μπορούσαμε να επεκτείνουμε τον ορισμό και όταν $n=1$ θεωρώντας ότι όταν $A\in\mathbb{R}$ $E_{1,1}=\emptyset$.

B. Η Ορίζουσα Τετραγωνικής Μήτρας

Η διαδικασία υπολογισμού της ορίζουσας αποδίδει σε κάθε τετραγωνική μήτρα πραγματικό αριθμό που αποδίδει ιδιότητες της μήτρας. Τόσο ο γενικός ορισμός όσο και η ακριβής γεωμετρική ερμηνεία ξεφεύγουν του εύρους του μαθήματος. Παρόλα το παρακάτω μας αποδίδει μια γεωμετρική διαίσθηση της έννοιας. Έστω λοιπόν $A \in M_{n\times n}$. Γνωρίζουμε ότι όταν το $x \in \mathbb{R}^n$ πολλαπλασιάζεται γενικά με την A από αριστερά μετασχηματίζεται σε κάποιο άλλο στοιχείο του $\mathbb{R}^n$. Είναι εύλογο να αναρωτηθούμε πώς η A μετασχηματίζει κάθε στοιχείο της κλειστής μοναδιαίας μπάλας του $\mathbb{R}^n$, δηλ. των $x \in \mathbb{R}^n$ με Ευκλείδειο μήκος, $\|x\| \le 1$. Αποδεικνύεται ότι ο πολλαπλασιασμός με την A από αριστερά μετασχηματίζει την μπάλα σε n-διάστατο ελλειψοειδές στο $\mathbb{R}^n$ με κέντρο το $O_{n\times 1}$.

Π.χ. $n=2$ για κάποια σχετική A μπορεί να έχουμε:



Η ορίζουσα της A θα είναι ο n-διάστατος όγκος του ελλειψοειδούς κατάλληλα προσημασμένος. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι αν η A ιδιάζουσα τότε το ελλειψοειδές είναι εκφυλισμένο ως προς τουλάχιστον μία διάσταση του $\mathbb{R}^n$ (π.χ. όταν $A = O_{n\times n}$ τότε είναι απλώς ένα σημείο) οπότε ο n-διάστατος όγκος του είναι μηδενικός.

Θα προχωρήσουμε σε αναδρομικό ορισμό της ορίζουσας (ο κυρίως ορισμός θα απαιτούσε την χρήση της έννοιας των εναλλασσόμενων μορφών – alternating forms) που θα είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικός ως προς το κόστος (σε πλήθος πράξεων) υπολογισμού της.

Ορισμός. Έστω $A \in M_{n\times n}$. Η ορίζουσα (determinant) της A ($\det(A)$ ή $|A|$) ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

1. Για $n=1$, $\det(A) = A$,
2. Για $n=2$, $\det(A) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$,
3. (*) Για $n>2$, για όποιο $i=1,\dots,n$

$$\det(A) = \alpha_{i1}(-1)^{i+1}\det(E_{i,1}) + \alpha_{i,2}(-1)^{i+2}\det(E_{i,2}) + \dots + \alpha_{i,n}(-1)^{i+n}\det(E_{i,n})$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(-1)^{i+j}\det(E_{i,j}). \quad (*) \ \square$$

Παρατηρήσεις:

1. Το (*) ονομάζεται ανάπτυγμα Laplace της $\det(A)$ ως προς την γραμμή i.

[α] Το 2. είναι υποπερίπτωση του 3. για $n=2$ οπότε θα μπορούσε να παραληφθεί από τον ορισμό.

Θα αποδίδει το ίδιο αποτέλεσμα όποιο i και να επιλέξουμε.

2. Ο $\det(E_{ij})$ ονομάζεται (i,j)-ελάσσονα (minor) της A, ενώ η προσημασμένη $(-1)^{i+j}\det(E_{ij})$ ελάσσονα ονομάζεται (i,j) συμπαράγοντας (cofactor) της A.

3. Ο ορισμός ανάγει τον υπολογισμό της $\det(A)$ στον υπολογισμό οριζουσών μικρότερων διαστάσεων, ενώ είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι για μεγάλο n το πλήθος των πράξεων που απαιτεί είναι περίπου $cn!$ για $c>0$. □

Παραδείγματα.

1. $n=2$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A)=1\cdot 1-(-2)2=5$.

2. $n=3$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
$$\det(A)=1(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+2(-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+0\cdot(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=1\cdot(1\cdot 1-2\cdot 1)-2\cdot(0\cdot 1-1\cdot 2)+0\cdot(0\cdot 1-1\cdot 1)=-1+4=3.$$

Το ανάπτυγμα εφαρμόσαμε για $i=1$ - δοκιμάστε και τις υπόλοιπες επιλογές.

Ιδιότητες ορίζουσας. Είναι δυνατόν να αποδειχθούν τα παρακάτω.

i. $\det(A)=\det(A^T)$ (οπότε το ανάπτυγμα Laplace μπορεί να εφαρμοσθεί και ως προς οποιαδήποτε στήλη της A).

ii. Αν $\lambda\in\mathbb{R}$, $A\in M_{n\times n}$, $\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$.

iii. Αν $A\in M_{n\times n}$, $\det(A)=0 \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)<n \Leftrightarrow A$ ιδιάζουσα. (θυμηθείτε την γεωμετρία)
(οπότε $\det(A)\neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)=n \Leftrightarrow$ χώρος γρ. $A=$ χώρος στηλών $A=\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ $\exists$ η A^{-1}),

iv. $\det(AB)=\det(A)\det(B)$ (οπότε AB αντιστρέψιμη ανν A και B αντιστρέψιμες - γιατί;),

v. $\det(I)=1$ (οπότε όταν A αντιστρέψιμη, $AA^{-1}=I \Rightarrow \det(AA^{-1})=\det(I) \Rightarrow$
$\det(A)\det(A^{-1})=1 \overset{iii}{\Rightarrow} \det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}$).

ΑΣΚΗΣΗ. Έστω το σύστημα $\left.\begin{matrix} x_1+x_2=1 \\ x_1-x_2=2 \end{matrix}\right\}$. Χρησιμοποιώντας αποκλειστικά και μόνο την ορίζουσα των συντελεστών να αποφανθείτε ότι αυτό έχει μοναδική

Λύση.

Απάντηση. Έχουμε ότι το σύστημα γράφεται ως $A\mathbf{x}=b$ όπου $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

$b=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. $\det(A)=1\cdot(-1)-1\cdot1=-2\neq0$. Εξαιτίας του iii έχουμε ότι χώρος στηλών$(A)=$ $\mathbb{R}^2$ και αφού $b\in\mathbb{R}^2$ το σύστημα έχει λύση. Εξαιτίας του iii, $\text{rank}(A)=\dim(\mathbb{R}^2)=2$ επομένως το $V_n=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^2$ (γιατί;). Επομένως εξαιτίας της αποτελεσματικότητας της βάσης έχουμε $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ για μοναδικό (λ_1,λ_2) οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση. □

Άσκηση. Κάντε το ίδιο για το
$$\left.\begin{array}{r} x_1+2x_2 \quad = 1\\ x_2+2x_3=1\\ x_1+x_2+x_3=-1\end{array}\right\}.$$ □

Γ. Προσαρτημένη Τετραγωνικής Μήτρας

Ορισμός. Αν $A\in \mathcal{M}_{n\times n}, n>1$, η προσαρτημένη της A (adjoint matrix) είναι η $n\times n$ μήτρα $\text{adj}(A)$ της οποίας το στοιχείο i,j είναι το
$$(-1)^{i+j}\det(E_{j,i}) \text{ της } A.$$

Παρατήρηση. Επομένως η προσαρτημένη είναι η ανάστροφη της μήτρας που έχει ως στοιχείο (i,j) την (i,j) συμπαράγουσα της A.

Παραδείγματα:

1. $n=2$, $A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}$, $\text{adj}(A)=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}\alpha_{22} & (-1)^{1+2}\alpha_{21}\\ (-1)^{2+1}\alpha_{12} & (-1)^{2+2}\alpha_{11}\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}\alpha_{22} & -\alpha_{21}\\ -\alpha_{12} & \alpha_{11}\end{pmatrix}'$
$$=\begin{pmatrix}\alpha_{22} & -\alpha_{12}\\ -\alpha_{21} & \alpha_{11}\end{pmatrix}.$$

π.χ. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $\text{adj}(A)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

2. Βρείτε την $\text{adj}(A)$ για $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Γ. Αναστροφή Μήτρας

Ένας τρόπος αναστροφής της A (όταν είναι αναστρέψιμη) εμπλέκει τους υπολογισμούς της $\det(A)$ και της $\mathrm{adj}(A)$. Βασίζεται στο παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα. Αν $A \in M_{n\times n}, n>1$, και A αναστρέψιμη ($\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$) τότε
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A). \quad \square \text{[6]}$$

Παραδείγματα:

1. $n=2$ $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ με $\alpha_{11}\alpha_{22} \neq \alpha_{12}\alpha_{21}$. Επομένως $\det(A) \neq 0$ και
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}} & \frac{-\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}} \\ \frac{-\alpha_{21}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}} & \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}} \end{pmatrix}.$$

Π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = -2$,
$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$ (επιβεβαιώστε το!).

Έτσι η μοναδική λύση του συστήματος στην ΑΣΚΗΣΗ παραπάνω είναι η $y = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 + 2/2 \\ 1/2 - 2/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ (επιβεβαιώστε το!).

2. Να βρείτε την μοναδική λύση στην Άσκηση παραπάνω.

Τα παραπάνω είναι σε κατάσταση διαρκούς διόρθωσης και δεν υποκαθιστούν τις διαλέξεις. Παρακαλώ αναφέρετε όποιο λάθος εντοπίσετε στο eclass του μαθήματος ή στο stelios@aueb.gr.

[6] Θα μπορούσε να γενικευθεί και στην περίπτωση που $n=1$ αν θέταμε ότι $\mathrm{adj}(A) = 1$, οπότε και θα είχαμε (όταν $n=1$, $A \in \mathbb{R}$) $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{A}$.