Συμπληρώματα στα Γραμμικά Συστήματα

Ως συμπλήρωμα στην παράγραφο των γραμμικών συστημάτων δίνονται οι παρακάτω παρατηρήσεις:

1. Ένα σύστημα από εξισώσεις είναι ένα σύνολο από σχέσεις που θα πρέπει να ικανοποιούν οι λύσεις του. Από αυτό είναι εμφανές ότι όταν επαυξάνουμε ένα σύστημα με περισσότερες εξισώσεις τότε είναι δυνατό να αυξάνουμε το πλήθος των περιορισμών που πρέπει να ικανοποιούν οι λύσεις του. Επομένως με την επαύξηση είναι δυνατόν να "μειώνουμε" το πλήθος των λύσεων αλλά δεν είναι δυνατόν να το "αυξάνουμε", αναλόγως αν απομειώσουμε το σύστημα από κάποιες εξισώσεις τότε είναι δυνατόν να "αυξάνουμε" το πλήθος των λύσεων αλλά δεν είναι δυνατόν να το "μειώνουμε". Στα γραμμικά συστήματα όταν τα επαυξάνουμε με ή τα απομειώνουμε από εξισώσεις που είναι γραμμικά εξαρτημένες από άλλες του συστήματος δεν αλλάζουμε καθόλου το σύνολο λύσεων. Αυτό προκύπτει εξαιτίας του προηγούμενου συλλογισμού και από το ότι αν τα $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ ικανοποιούν το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο από εξισώσεις αναγκαστικά θα ικανοποιούν και τις γραμμικά εξαρτημένες. Σε αυτό βασίζεται ότι μπορούμε να απαλείψουμε τις $n-\text{rank}(A)$ γραμμικά εξαρτημένες εξισώσεις. Αυτό βέβαια προϋποθέτει κάποιον εντοπισμό αυτών. Επίσης αν από λάθος απαλοιφή καταλήξουμε σε σύστημα με μήτρα συντελεστών που έχει βαθμό μικρότερο του $\text{rank}(A)$ τότε σίγουρα το τελικό σύστημα θα έχει σύνολο λύσεων που είναι γνήσιο υπερσύνολο του συνόλου λύσεων του αρχικού (εννοείται εφόσον $b \in$ χώρο στηλών (A)).

2. Εφόσον το $Ax=b$ έχει λύσεις, οι αναγωγές της μήτρας των συντελεστών σε A^* και A^{**} διατηρούν τον βαθμό, έχουμε δηλ. ότι $\text{rank}(A)=\text{rank}(A^*)=\text{rank}(A^{**})$, αφού η A^* προκύπτει από την A με τη διαγραφή των $n-\text{rank}(A)$ γραμμικά εξαρτημένων γραμμών της A (αν δεν υπάρχουν οπότε $n=\text{rank}(A)$ τότε $A=A^*$) και η

A^{**} από την A^* με την απαλοιφή στη δεξιά πλευρά του αντίστοιχου συστήματος των $m-\text{rank}(A)$ γραμμικά εξαρτημένων γραμμών της A^* (και άρα της A), μαζί με τους ανάλογους αγνώστους (αν δεν υπάρχουν οπότε $m=\text{rank}(A)$ και $A^{**}=A^*$).

3. Οι παραπάνω συλλογισμοί, μαζί με τα όσα ξέραμε για τους διανυσματικούς χώρους, μας επιτρέπουν σε ορισμένες περιπτώσεις να αποφανθούμε για ιδιότητες του συνόλου λύσεων χωρίς μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Π.χ. αν το $Ax=b$ είναι τετραγωνικό οπότε $n=m$ και γνωρίζουμε ότι $\text{rank}(A)<n$ τότε το σύστημα δεν μπορεί να έχει μοναδική λύση. Αν $b\notin$ χώρο στηλών (A) τότε είναι αδύνατο, ενώ αν $b\in$ χώρο στηλών(A) τότε έχει $n-\text{rank}(A)$ γραμμικά εξαρτημένες μεταβλητές τις οποίες μπορούμε να απαλοίψουμε, αλλά και $n-\text{rank}(A)>0$ γραμμικά εξαρτημένες στήλες οπότε θα έχει άπειρες λύσεις.

4. Όταν στο $Ax=b$ έχουμε $\text{rank}(A)=0$, αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι $A=O_{n\times m}$ οπότε αν $b\neq O_{n\times 1}$ το σύστημα είναι αδύνατο ενώ αν $b=O_{n\times 1}$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (το σύνολο λύσεων σε αυτή την περίπτωση είναι το $\mathbb{R}^m$).

Τα παραπάνω βρίσκονται σε διαρκή διόρθωση και δεν υποκαθιστούν τις διαλέξεις. Παρακαλώ, εφόσον εντοπίσετε λάθη, επισημάνετέ τα στο eclass του μαθήματος ή στο stellios@aueb.gr.

Ενδεικτική Άσκηση της Παρατήρησης 3. Έστω το $Ax=b$ όπου $n=m$, $b=O_{n\times 1}$, και η A έχει μία γραμμή (ή στήλη) ίση με το ανάλογο μηδενικό διάνυσμα. Πόσες λύσεις έχει το σύστημα;

Εφόσον $b=O_{n\times 1}$ το σύστημα είναι ομογενές οπότε έχει λύσεις. Επειδή $n=m$ το σύστημα είναι τετραγωνικό. Επιπλέον αφού η A έχει μία μηδενική γραμμή (ή στήλη), έχουμε ότι $\text{rank}(A)<n$. Αυτό επειδή το σύνολο των γραμμών (στηλών) της A είναι γραμμικά εξαρτημένο αφού περιέχει το μηδενικό διάνυσμα, ενώ έχει πλήθος ίσο με n. Επομένως βάσει της παρατήρησης 3 το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. $\square$