Στοιχεία Θεωρίας Μητρών – Γραμμικά Συστήματα

[Διορθώσεις και συμπληρώσεις με πράσινο – 14/05/2017]

1. Πολλαπλασιασμός διανύσματος με μήτρα από αριστερά

Έστω $A \in M_{n\times m}$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \ (= M_{m\times 1})$. Εξαιτίας της συμφωνίας έχουμε ότι το γινόμενο $A\mathbf{x}$ είναι καλώς ορισμένο και αποτελεί μήτρα διαστάσεως $n\times 1$ ($\in M_{n\times 1}$) δηλαδή διάνυσμα (στήλη) του $\mathbb{R}^n \ (= M_{n\times 1})$. Πιο συγκεκριμένα, αν

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \text{τότε}$$

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1m}x_m \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2m}x_m \\ \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nm}x_m \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}x_1 \\ \alpha_{21}x_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{12}x_2 \\ \alpha_{22}x_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n2}x_2 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \alpha_{1m}x_m \\ \alpha_{2m}x_m \\ \vdots \\ \alpha_{nm}x_m \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_m \begin{pmatrix} \alpha_{1m} \\ \alpha_{2m} \\ \vdots \\ \alpha_{nm} \end{pmatrix},$$

επομένως το $n\times 1$ διάνυσμα $A\mathbf{x}$ αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των στηλών της A με συντελεστές τα στοιχεία του $\mathbf{x}$. Συνεπώς το $A\mathbf{x}$ ανήκει στον χώρο στηλών της A.

Επομένως ο πολλαπλασιασμός από αριστερά διανύσματος στήλης του $\mathbb{R}^m$ με μήτρα διαστάσεων $n\times m$ ισοδυναμεί με τον μετασχηματισμό του διανύσματος σε διάνυσμα του χώρου στηλών της μήτρας. [Ανάλογα, ο πολλαπλασιασμός του $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ με μήτρα $A \in M_{n\times m}$ από δεξιά, δηλαδή το $\mathbf{x}A$ ισοδυναμεί με μετασχηματισμό του $\mathbf{x}$ σε διάνυσμα του χώρου γραμμών της A – Δείξτε το!]

Π.χ. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\mathbf{x} = 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Γραμμικά συστήματα

Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \in M_{n\times m}$ και $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Ορισμός. Γραμμικό σύστημα με συντελεστές τα στοιχεία της A, σταθερές τα στοιχεία του b και αγνώστους τα $x_1, x_2, \dots, x_m$ θα ονομάζεται το παρακάτω σύνολο n-εξισώσεων με m-αγνώστους:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Βάσει της παραγράφου 1, θα έχουμε ότι

$$(*) \iff x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\iff A\mathbf{x} = b, \text{ όπου } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Συνεπώς, κάθε γραμμικό σύστημα από n εξισώσεις με m αγνώστους μπορεί να τεθεί στην μορφή

$$A\mathbf{x} = b \quad (**)$$

όπου $A \in M_{n\times m}$ η μήτρα των συντελεστών του συστήματος, $b \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα με τις σταθερές των δεξιών μελών των εξισώσεων και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ το διάνυσμα των αγνώστων.

Ορολογία:

1. Το $(*)$ θα ονομάζεται ομογενές (homogeneous) αν $b = 0_{n\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Σε κάθε άλλη περίπτωση ονομάζεται μη ομογενές (non-homogeneous).
2. Λύση του $(*)$ θα ονομάζεται όποιο $y \in \mathbb{R}^m$ με στοιχεία που ικανοποιούν το σύστημα, δηλαδή για το οποίο ισχύει $Ay = b$. Χρησιμοποιώντας το λεξιλόγιο που έχουμε κατασκευάσει για διανυσματικούς χώρους θα διερευνήσουμε το ζήτημα της ύπαρξης και του πλήθους των λύσεων συστημάτων της παραπάνω μορφής.

2Α - Ύπαρξη λύσεων

Βάσει της παραγράφου 1 παραπάνω, το (*) θα έχει λύση εάν το b μπορεί να αναπαρασταθεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών της A. Επομένως:

Θεώρημα. Το (*) έχει λύση αν το b ανήκει στον χώρο στηλών της A. □
(Όταν το (*) δεν έχει λύση τότε αναφέρεται αδύνατο).

Παράδειγμα:

α. $n=m=2$, έστω το γραμμικό σύστημα $\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 0x_1 + 0x_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$.

Έχουμε ότι $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Το b δεν ανήκει στον χώρο στηλών της A επειδή δεν είναι δυνατόν να υπάρχει γραμμικός συνδυασμός των $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ με μη μηδενική δεύτερη συνιστώσα. Επομένως το σύστημα είναι αδύνατο.

Πόρισμα. Τα ομογενή συστήματα έχουν πάντοτε λύση.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = O_{n\times 1}$ και $O_{n\times 1}$ ανήκει σε κάθε υποχώρο του $\mathbb{R}^n$ (γιατί;). Ο χώρος στηλών της A είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^n$ (γιατί;) επομένως το b ανήκει σε αυτόν. □

Στα παρακάτω θα θεωρούμε ότι το b ανήκει στον χώρο στηλών της A. Προκειμένου να διερευνήσουμε τα υπόλοιπα ενδεχόμενα θα μας χρησιμεύσει η έννοια του *βαθμού* ή *τάξης* μήτρας την οποία ορίζουμε αμέσως.

Ορισμός. Ο βαθμός (ή τάξη) της $A \in M_{n\times m}$ (θα τον συμβολίζουμε με $\mathrm{rank}(A)$) είναι το μέγιστο πλήθος των στηλών της που συνιστούν γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

Παράδειγμα. Αν $n=m$ και $A=I$ τότε $\mathrm{rank}(I)=n$ (γιατί;). Αναλόγως για γενικά n,m $\mathrm{rank}(O_{n\times m}) = 0$, και $\mathrm{rank}(A)=0 \iff A=O_{n\times m}$. (γιατί;)

Είναι δυνατόν να αποδειχθούν οι παρακάτω ιδιότητες του βαθμού:

1. rank(A) = rank(A'), οπότε ο βαθμός ταυτίζεται με το μέγιστο πλήθος των γραμμών της που είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Επομένως ο rank(A) είναι εξ' ορισμού της αξίας η κοινή διάσταση του χώρου γραμμών και του χώρου στηλών της A.

2. Αν $A \in M_{n\times m}$ τότε $\operatorname{rank}(A) \leq \min(n,m)$ (προφανώς είναι άμεσο από το 1.).

3. Αν $A \in M_{n\times n}$ και $\operatorname{rank}(A) = n$, τότε χώρος γραμμών της A = χώρος στηλών της $A = \mathbb{R}^n$.

4. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $\operatorname{rank}(\lambda A) = \begin{cases} \operatorname{rank}(A), & \lambda \neq 0 \\ 0, & \lambda = 0 \end{cases}$ (γιατί;).

5. Αν $A \in M_{n\times n}$ τότε η A αντιστρέψιμη ανν $\operatorname{rank}(A) = n$, οπότε και $\operatorname{rank}(A^{-1}) = \operatorname{rank}(A)$ (γιατί;).

6. Αν $A \in M_{n\times n}$ διαγώνια, τότε rank(A) = πλήθος των μη μηδενικών διαγώνιων στοιχείων της A. (γιατί;)

7. Αν $A, B \in M_{n\times m}$ τότε γενικά $\operatorname{rank}(A+B)$ δεν είναι ίσο με $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$. (π.χ. $A, B \neq O_{n\times m}$ και $B = -A$ τότε $\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}(O_{n\times m}) = 0$. Βρείτε παράδειγμα που $\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$ με A ή/και $B \neq O_{n\times m}$.

8. Αν $A \in M_{n\times m}$, $B \in M_{m\times n}$, $\operatorname{rank}(A) = n = \operatorname{rank}(B)$ (συνεπώς ποιά η σχέση μεταξύ των m και n;), τότε $AB \in M_{n\times n}$ και $\operatorname{rank}(AB) = n$.

9. Αν A, b όπως στα γραμμικά συστήματα, σχηματίζουμε τον πίνακα $A \vdots b$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$ επαυξάνοντας τις στήλες της A με το b.

Το Θεώρημα παρακάτω μας λέει ότι το (*) έχει λύση ανν $\operatorname{rank}(A \vdots b) = \operatorname{rank}(A)$, ενώ είναι αδύνατο ανν $\operatorname{rank}(A \vdots b) > \operatorname{rank}(A)$. □

2B – Πλήθος λύσεων

Έστω λοιπόν ότι στο (*) έχουμε ότι $\operatorname{rank}(A \vdots b) = \operatorname{rank}(A)$ οπότε το σύστημα έχει τουλάχιστον μία λύση. Το ερώτημα που μπορεί πλέον να απαντηθεί είναι το: ποιό είναι το πλήθος των λύσεων του (*);

Διακρίναμε τις εξής περιπτώσεις:

i. $n > m$. (πλήθος εξισώσεων > πλήθους αγνώστων)

Αφού $\text{rank}(A \vdots b) = \text{rank}(A) \leq m < n$ (γιατί;) και $\text{rank}(A)$ είναι ίσο με την διάσταση του χώρου γραμμών της A, αυτό σημαίνει (γιατί;) ότι υπάρχουν $n - \text{rank}(A)$ γραμμικά εξαρτημένες εξισώσεις στο (*). Αυτές μπορούν να διαγραφούν επειδή δεν φέρουν κάποια πληροφορία για τις λύσεις του (*). Μέσω αυτής της διαδικασίας διαγραφής των γραμμικά εξαρτημένων εξισώσεων καταλήγουμε σε ανηγμένο σύστημα (reduced system) της μορφής

$$A^* \mathbf{x} = b^* \quad (***)$$

όπου A^* και b^* οι συντελεστές και σταθερές που προκύπτουν μετά την διαγραφή. Προφανώς $A^* \in M_{\text{rank}(A) \times m}$ και $b \in \mathbb{R}^{\text{rank}(A)}$. Αν $n = \text{rank}(A)$ τότε $A^* = A$ και $b^* = b$. Σε κάθε περίπτωση οδηγούμαστε αναγκαστικά στο ii παρακάτω.

Παράδειγμα. $n=3$, $m=2$,
$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{array}\right\}, \quad \text{οπότε } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = 0_{3\times 1}.$$

(Δείξτε ότι $\text{rank}(A) = 2$), και $5 \cdot$ πρώτη εξίσωση $- 2 \cdot$ δεύτερη εξίσωση $=$ τρίτη εξίσωση, οπότε η τελευταία μπορεί να διαγραφεί. Το ανηγμένο σύστημα είναι το

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{οπότε } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρήστε ότι η επιλογή του υποσυστήματος των εξισώσεων που θα διαγράψουμε μπορεί να μην είναι μοναδική. Π.χ. στο προηγούμενο παράδειγμα θα μπορούσαμε να διαγράψουμε όποια από τις τρεις εξισώσεις αφού οι εναπομείνασες θα σχημάτιζαν μήτρα συντελεστών A^*, με $\text{rank}(A^*) = \text{rank}(A) = 2$. Εφόσον γενικότερα η επιλογή μας είναι τέτοια ώστε $\text{rank}(A^*) = \text{rank}(A)$ θα μας οδηγήσει στη(ις) λύση(εις) του (*) εξαιτίας αυτής της ισότητας.

ii. Πλήθος εξισώσεων του (***) = rank(A*) = rank(A) ≤ m

Αυτή η περίπτωση ισχύει είτε εξαρχής στο (*), είτε μέσω της παραπάνω αναγωγής, οπότε και καταλήγουμε στο (***).

Διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:

ii$_1$. rank$(A^*) < m$.

Επομένως το σύνολο των στηλών της A δεν είναι βάση του χώρου στηλών της επειδή υπάρχουν m-rank(A) γραμμικά εξαρτημένες στήλες. Σε αυτή την περίπτωση το (***) μπορεί να γραφεί ως:

$$[*] \quad \begin{aligned} A^{**}\mathbf{x}^{**} + A_*\mathbf{x}_* &= b^* \iff \\ A^{**}\mathbf{x}^{**} &= b^* - A_*\mathbf{x}_* \end{aligned} \quad \text{όπου}$$

A^{**} η μήτρα που έχει ως στήλες το σύνολο των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών της A^* και διάσταση rank$(A)\times$rank(A), $\mathbf{x}^{**}$ το διάνυσμα των αγνώστων που αντιστοιχούν ως προηγούμενες και προφανώς διάσταση rank$(A)\times 1$, A_* η μήτρα με στήλες τις υπόλοιπες στήλες της A^* και διάσταση rank$(A)\times m$-rank(A) και $\mathbf{x}_*$ το διάνυσμα που αποτελείται από τους αγνώστους που αντιστοιχούν σε αυτές τις m-rank(A) στήλες της A. Παρατηρούμε ότι μέσω και αυτής της διαδικασίας ανάγουμε τελικά το (*) στο [*] που είναι τετραγωνικό, είναι δυνατόν όμως να έχει m-rank(A) πλήθος αγνώστων στην δεξιά πλευρά.

Παράδειγμα. $n=4$, $m=3$,

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 0 \\ x_1+2x_2+x_3 &= 0 \\ 3x_1+3x_2+3x_3 &= 0 \\ 2x_1+4x_2+2x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad b=0_{4\times 3}.$$

Έχουμε ότι rank$(A)=2$, τρίτη εξίσωση $=3\cdot$ πρώτη εξίσωση, τέταρτη εξίσωση $=2\cdot$ δεύτερη εξίσωση οπότε μπορούμε να αναχθούμε στο

$$(***)\ \left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 0 \\ x_1+2x_2+x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b^*=0_{2\times 1}$$

Έχουμε επίσης ότι $3 = n > 2 = \text{rank}(A)$ και ότι τρίτη στήλη A = πρώτη στήλη A επομένως εφαρμόζοντας το παραπάνω μπορούμε να καταλήξουμε στο

$$[*] \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 - x_3 \end{aligned} \quad , \quad A^{**} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} , \ \text{rank}(A^{**}) = 2$$

$$x^{**} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} , \quad A_* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad x_* = x_3 .$$

Παρατηρήσεις:

1. Η επιλογή των στηλών που "κρατάμε" στην δεξιά πλευρά δεν είναι γενικά μοναδική. Επομένως το [*] το οποίο καταλήγουμε μπορεί να εξαρτάται από αυτή την επιλογή. Εφόσον όμως το [*] στο οποίο καταλήγουμε ικανοποιεί $\text{rank}(A^{**}) = \text{rank}(A^*) = \text{rank}(A)$ θα καταλήξουμε στις λύσεις του (*) ανεξαρτήτως την αυτέ- A^{**}.

2. Όταν $\text{rank}(A^*) < n$ τότε οι στήλες της A^* και άρα της A δεν αποτελούν βάση του χώρου γραμμών της. Το b από υπόθεση βρίσκεται σε αυτό τον χώρο, ισχύουν όμως όσα έχουμε πει περί αποτελεσματικότητας της περιγραφής από την βάση. Επομένως αναμένουμε ότι το (*) δεν θα έχει μοναδική λύση.

3. Όταν $\text{rank}(A) = n$ τότε (γιατί;) $A^{**} = A^*$.

iiβ. $\text{rank}(A^{**}) = n$.

Σε αυτή την περίπτωση βρισκόμαστε είτε αμέσως στο (*), οπότε $A = A_{**}$ και (*) = [*], είτε μετά από διαγραφή των γραμμικά εξαρτημένων εξισώσεων χωρίς μετακίνηση στηλών, οπότε $A^{**} = A^*$ και $(**)$ = [*], είτε/και μέσω μετακίνησης των γραμμικά εξαρτημένων στηλών στα δεξιά. Σε κάθε περίπτωση έχουμε τετραγωνικό σύστημα της μορφής:

$$[*] \quad A^{**} x^{**} = b^{**} = b^* - A_* x_*$$

Επειδή $A^{**} \in M_{\text{rank}(A) \times \text{rank}(A)}$ οι στήλες της αποτελούν βάση του χώρου στηλών της A^{**}. Επομένως εξαιτίας της αποτελεσματικότητας της περιγραφής από βάση θα υπάρχει μοναδικός γραμμικός συνδυασμός των στηλών της A^{**} που σχηματίζει το b^{**} και άρα το [*] θα έχει μοναδική λύση ως προς x^{**}. Επειδή όμως η A^{**} είναι τετραγωνική

θα είναι μη ιδιάζουσα αφού ο βαθμός της ταυτίζεται με την διάστασή της.
Επομένως

$$[*] \iff (A^{**})^{-1}(A^{**}x^{**}) = (A^{**})^{-1}b^{**}$$

$$\iff ((A^{**})^{-1}A^{**})x^{**} = (A^{**})^{-1}b^{*} - (A^{**})^{-1}A_* x_*$$

$$\iff I x^{**} = (A^{**})^{-1}b^{*} - (A^{**})^{-1}A_* x_*$$

$$\iff x^{**} = (A^{**})^{-1}b^{*} - (A^{**})^{-1}A_* x_*$$

που θα είναι και η προαναφερθείσα λύση ως προς x^{**}.

Συνεπώς συνδυάζοντας με τα παραπάνω έχουμε:

– Αν $rank(A^*) = n$, $A^* = A^{**}$ οπότε το (***) και άρα το (*) έχει μοναδική λύση την $(A^*)^{-1}b^*$.
– Αν $rank(A^*) < n$, το [*] έχει την λύση ως προς x^{**} την $(A^{**})^{-1}b^{*} - (A^{**})^{-1}A_* x_*$ επειδή όμως οι άγνωστοι που βρίσκονται στα δεξιά και συναρτίζονται μέσω του x_* μπορούν να πάρουν ελεύθερες τιμές, το (***) και άρα το (*) έχει άπειρες λύσεις τις $(A^{**})^{-1}b^* - A_* x_*$, x_* ελεύθερο.

Συνεπώς όταν το (*) δεν είναι αδύνατο είτε θα έχει μοναδική είτε άπειρες λύσεις. Οπότε τα ομογενή συστήματα έχουν είτε μοναδική λύση είτε άπειρες λύσεις. Μοναδική θα είναι η λύση ανν $rank(A^*) = n$, οπότε είναι η $(A^*)^{-1}b^*$ (για τα ομογενή σε αυτή την περίπτωση και επειδή $b^* = 0_{rank(A)\times 1}$ η μοναδική λύση θα είναι η μηδενική), άπειρες θα είναι οι λύσεις ανν $rank(A^*) < n$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε:

Α. Το (*) θα έχει λύση ανν $rank(A \vdots b) = rank(A)$.
Β. Όταν έχει οι λύσεις μπορούν να προσδιοριστούν

αφού διαγράφουν οι γραμμικά εξαρτημένες εξισώσεις οπότε έχουμε αναγωγή του (*) στο (***).

Γ. Αν $\text{rank}(A^*) = m$ το (*) έχει μοναδική λύση την $(A^*)^{-1}b^*$.

Σε όποια άλλη περίπτωση το (*) έχει άπειρες λύσεις που δίνονται από την $(A^{**})^{-1}b^* - (A^{**})^{-1}A_* x_*$ με x_* ελεύθερο.

Δ. Αν $b = O_{n\times 1}$, οπότε $b^* = O_{\text{rank}(A)\times 1}$ το Α ισχύει πάντοτε.

Παράδειγμα. $n=m=2$, (*) $\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=1 \\ x_1+2x_2=1 \end{array}\right\}$, $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Έχουμε ότι $\text{rank}(A)=2$ (γιατί;) οπότε χώρος στηλών της $A=\mathbb{R}^2$. $b\in\mathbb{R}^2$ επομένως το (*) έχει λύση. χώρος γραμμών $A=\mathbb{R}^2$ οπότε δεν υπάρχουν γραμμικά εξαρτημένες εξισώσεις. Άρα $A^*=A$, $b^*=b$. $\text{rank}(A^*)=\text{rank}(A)$, οπότε $A^{**}=A^*=A$ και επομένως το (*) έχει μοναδική λύση την $A^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Το παράδειγμα γενικεύεται στο: Αν το (*) τετραγωνικό $n\times n$ και $\text{rank}(A)=n$ τότε το (*) έχει μοναδική λύση την $A^{-1}b$.

Παρατήρηση: Τα παραπάνω μας πληροφορούν ότι η υπολογιστική πολυπλοκότητα της εύρεσης των λύσεων του (*) ανάγεται στην εύρεση των βαθμών των $r(A)$ και $r(A\vdots b)$, στην εύρεση των γραμμικά εξαρτημένων γραμμών ή/και στηλών αν υπάρχουν, στην αναστροφή κατάλληλης μήτρας και τον πολλαπλασιασμό αυτής με κατάλληλο διάνυσμα.

Τα παραπάνω είναι σε κατάσταση διαρκούς διόρθωσης και δεν υποκαθιστούν τις διαλέξεις. Παρακαλώ εφόσον εντοπίσετε κάποιο λάθος αναφέρετε το στο e-class του μαθήματος ή στο stelios@aueb.gr.