5^{η} Ομάδα Ασκήσεων

[Διορθώσεις με κόκκινο - 25/05/2017]

1. Αν $A\in M_{n\times n}$ θα αναφέρεται άνω τριγωνική - upper triangular (αντίστοιχα κάτω τριγωνική - lower triangular) αν $a_{ij}=0$ $\forall i<j$ (αντίστοιχα $a_{ij}=0$ $\forall i>j$).
Π.χ. $n=3$, η $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ είναι άνω τριγωνική.

Να δειχθεί ότι αν $A,B\in M_{n\times n}$ άνω (κάτω) τριγωνικές και $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε

$A+B$ άνω (κάτω) τριγωνική, και

λA άνω (κάτω) τριγωνική.

2. Να δειχθεί ότι η $A\in M_{n\times n}$ είναι άνω (κάτω) τριγωνική αν η A' είναι κάτω (άνω) τριγωνική.

3. Να δειχθεί ότι η $A\in M_{n\times n}$ είναι διαγώνια αν η A είναι άνω και κάτω τριγωνική.

4. Η $A\in M_{n\times n}$ αναφέρεται αντισυμμετρική (skew-symmetric) αν $a_{ij}=-a_{ji}$, $\forall i,j=1,\dots,n$. Π.χ. $n=2$, $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ είναι αντισυμμετρική. Να δειχθεί ότι αν $A,B\in M_{n\times n}$ αντισυμμετρικές, και $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε

$A+B$ αντισυμμετρική, και

λA αντισυμμετρική.

5. Να δειχθεί ότι αν η $A\in M_{n\times n}$ αντισυμμετρική τότε κύρια διαγώνιος$(A)=\mathbb{0}_{n\times 1}$.

6. Να δειχθεί ότι η $A\in M_{n\times n}$ αντισυμμετρική αν $A'=-A$.

7. Η $A\in M_{n\times n}$ αναφέρεται ταυτοδύναμη (idempotent) αν $A^2=A$. Π.χ. $n=2$, η $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ είναι ταυτοδύναμη (δείξτε το). Να δειχθεί ότι αν η A ταυτοδύναμη τότε $A^k=A$, $\forall\, \mathbb{Z}\ni k\geq 1$.

8. ~~Να δειχθεί ότι η $A\in M_{n\times n}$ άνω (κάτω) τριγωνική, αν τα διαγώνια της στοιχεία είναι όλα διάφορα του 0.~~ (Λάθος! Δείτε παρακάτω (*))

9. Έστω $A\in M_{n\times n}$ ταυτοδύναμη και αντιστρέψιμη. Να δειχθεί ότι και η A^{-1} ταυτοδύναμη.

10. Έστω $A\in M_{n\times n}$ ταυτοδύναμη. Να δειχθεί ότι $\exp(A)=I-A+e\cdot A$.
(Θυμηθείτε ότι $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}=1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$, και ότι $A=A\cdot I^{0}$).

α) Το ζητούμενο της Άσκησης 8 είναι καταφανώς λάθος! Π.χ. θεωρήστε την $A = \Theta_{n \times n}$ που είναι άνω και κάτω τριγωνική. Αντικαταστήστε την με την:

8'. Να δείξετε ότι αν $A, B \in M_{n \times n}$, άνω (κάτω) τριγωνικές και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε οι $A+B$, λA και AB είναι επίσης άνω (κάτω τριγωνικές).