3η Ομάδα Ασκήσεων

1. Έστω ότι $V=\mathbb{R}$, και το $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ορίζεται ως $\langle x,y\rangle := c\,xy$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ όπου c πραγματικός αριθμός. Να δειχθεί ότι το $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο ανν $c>0$.

2. Έστω ότι το V είναι γενικό και το $\langle\cdot,\cdot\rangle$ εσωτερικό γινόμενο στο V. Έστω το $\langle\cdot,\cdot\rangle^*$ συνάρτηση που ορίζεται ως $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle^* = c\,\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$, $\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in V$ όπου $c>0$. Να δειχθεί ότι και το $\langle\cdot,\cdot\rangle^*$ είναι καλώς ορισμένο εσωτερικό γινόμενο στο V.

3. Έστω ότι $V=\mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. Να βρεθεί εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ στον $\mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = 0$ (για το υποψήφιο εσωτερικό γινόμενο που θα υποδείξετε θα πρέπει να δείξετε ότι αυτό ικανοποιεί τις ιδιότητες του ορισμού).

4. Έστω ότι το V είναι γενικό, $v_n=\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$ όπου $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, και $\langle\cdot,\cdot\rangle$ εσωτερικό γινόμενο στο V. Να δειχθεί ότι αν το v_n είναι γραμμικά εξαρτημένο τότε $|\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle| = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$ όπου $\|\cdot\|$ η νόρμα που προκύπτει από το $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

5. Έστω ότι $V=\mathbb{R}^2$ και το $\|\cdot\|$ ορίζεται ως $\|\mathbf{x}\| = \max(|x_1|,|x_2|)$, όπου $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$. Να δειχθεί ότι το συγκεκριμένο $\|\cdot\|$ ικανοποιεί τις ιδιότητες του ορισμού της νόρμας και συνεπώς αποτελεί καλώς ορισμένη νόρμα με την οποία είναι εφοδιασμένο το $\mathbb{R}^2$. (Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η συγκεκριμένη νόρμα δεν προκύπτει από κάποιο εσωτερικό γινόμενο).

6. Έστω ότι $V=\mathbb{R}^4$ και $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^4$. Για τα παρακάτω $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^4$ να βρεθούν τα $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$, $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$:

α. $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{y}=\mathbf{0}_{4\times 1}$

β. $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix}$

γ. $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

7. Να επαναληφθούν τα ζητούμενα της 6., όταν $V=M_{2\times 2}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι το γινόμενο Frobenius, και $A,B\in M_{2\times 2}$ όπου:

α. $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

β. $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

γ. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

8. Να επαναληφθούν τα ζητούμενα της 6., όταν $V=\{f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f \text{ πολυώνυμο}\}$, $\forall f,g\in V$, $\langle f,g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ και:

α. $f(x)=1$, $g(x)=3x^{150}$

β. $f(x)=x+x^2+x^{15}$, $g(x)=x^{200}$

γ. $f(x)=3x+5x^7$, $g(x)=1+x$.

9. Έστω ότι $V=\{f:[0,1]\to\mathbb{R}\}$ και το $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ορίζεται από $\langle f,g\rangle := f(0)g(0)+f(1)g(1)$. Να δειχθεί ότι το συγκεκριμένο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ δεν είναι καλώς ορισμένο εσωτερικό γινόμενο.

10. Έστω ότι το V γενικό και το $\langle\cdot,\cdot\rangle$ καλώς ορισμένο εσωτερικό γινόμενο. Να δειχθεί ότι $\forall \mathbf{x}\in V$, $\langle \mathbf{x},\mathbf{0}\rangle = 0$.