# $2^{\eta}$ Ομάδα Ασκήσεων

[12/4/2017 - Διορθώσεις με κόκκινο]

1. Να δείξετε ότι κάθε πραγματικός αριθμός αποτελεί γραμμικό συνδυασμό οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού διάφορου του μηδέν.

2. Έστω ότι $V=\mathbb{R}^3$ και $v_n=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$. Να δείξετε ότι τα $\begin{pmatrix}7\\4\\2\end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ αποτελούν γραμμικούς συνδυασμούς του $v_n$.

3. Για $V$ και $v_n$ όπως στην 2., να δείξετε ότι το $\begin{pmatrix}0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}$, για $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, αποτελεί γραμμικό συνδυασμό του $v_n$ αν $x_1=2x_2$.

4. Έστω ότι $V=M_{2\times2}$ και $v_n=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$. Να δείξετε ότι η $A=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}$ αποτελεί γραμμικό συνδυασμό του $v_n$ ανν $\begin{cases}x_{11}=x_{22}\\x_{12}=x_{21}\end{cases}$, για $x_{11},x_{12},x_{21},x_{22}\in\mathbb{R}$.

5. Να δείξετε ότι το $V=\{f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f \text{ πολυώνυμο}\}$ αποτελεί διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{R}$ (ως προς τις σχετικές κατά σημείο πράξεις που έχουν ορισθεί).

6. Για το $V$ όπως στην 5, και $v_n=\{1,x+x^2\}$, να δείξετε ότι το $a+bx+bx^2$ αποτελεί γραμμικό συνδυασμό του $v_n$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι το $3+2x+x^2$ δεν αποτελεί γραμμικό συνδυασμό του $v_n$.

7. Για $V=\mathbb{R}$, $v_n=\{c\}$, $c\in\mathbb{R}$ να δείξετε ότι $S_{v_n}=\begin{cases}\mathbb{R}, & c\neq0\\ \{0\}, & c=0\end{cases}$.

8. Για $V=\mathbb{R}^2$, $v_n=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ να δείξετε ότι $S_{v_n}=\mathbb{R}^2$.

9. Για $V=M_{2\times2}$, $v_n=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$ να δείξετε ότι

$$S_{v_n}=\left\{\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&0\end{pmatrix},\ x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\right\}.$$

10. Για γενικό $V$ και $v_n$ μη κενό και πεπερασμένο υποσύνολο του $V$, να δείξετε ότι αν το $v_n$ παράγει το $V$ τότε το $V$ είναι πεπερασμένης διάστασης.

11. Για τα δεδομένα της άσκησης 6 να δείξετε ότι το $v_n=\{3,x,2x^2\}$ δεν παράγει το $V$. Να δείξετε ότι $S_{v_n}=\{f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f \text{ πολυώνυμο βαθμού} \leq 2\}$.

12. Να δείξετε ότι ο χώρος γραμμών της $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&2\end{pmatrix}$ είναι ο $\mathbb{R}^2$, αλλά ο χώρος στηλών της δεν είναι ο $\mathbb{R}^3$.

13. Να δείξετε ότι ο χώρος στηλών της $A\in M_{n\times m}$ είναι ο ίδιος με τον χώρο στηλών της $2A$.

14. Για τα δεδομένα της άσκησης 1 να δείξετε ότι το $v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο ανν $c\neq0$.

15. Για τα δεδομένα της άσκησης 2 να δείξετε ότι το $v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

16. Για τα δεδομένα της άσκησης 4 να δείξετε ότι το $v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

17. Για τα δεδομένα της άσκησης 6 να δείξετε ότι το $v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

18. Για γενικό $V$ και $v_n, v_n^*$ μη κενά και πεπερασμένα υποσύνολα του $V$, να δείξετε ότι αν τα $v_n$ και $v_n^*$ γραμμικά ανεξάρτητα τότε και $v_n \cap v_n^*$ (αν είναι διάφορη του κενού) είναι γραμμικά ανεξάρτητη. Ισχύει αυτό για την $v_n \cup v_n^*$;

19. Για τις σχετικές προηγούμενες ασκήσεις να βρεθεί σε ποιές περιπτώσεις το $v_n$ αποτελεί βάση του $S_{v_n}$.

20. Για τις σχετικές προηγούμενες ασκήσεις να βρεθεί η διάσταση του $S_{v_n}$.

21. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε κάποιο γραμμικό σύστημα να δείξετε ότι ο χώρος στηλών της $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ δεν μπορεί να είναι ο $\mathbb{R}^3$.

22. Είναι δυνατόν η διάσταση υποχώρου του $V$ να είναι μεγαλύτερη της διάστασης του $V$;

23. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρεθεί μονοδιάστατος υποχώρος του $V$:

   i. $V = \mathbb{R}$
   ii. $V = \mathbb{R}^4$
   iii. $V = M_{3\times2}$
   iv. $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

24. Να βρεθεί μια βάση του $\mathbb{R}^{100}$.

25. Να βρεθεί μια βάση του $M_{10\times10}$.