1η Ομάδα Ασκήσεων

Διορθώσεις με κόκκινο - 23/4/2017

1. Έστω ότι $V = \mathbb{N}$ και $+$ η συνήθης πρόσθεση. Δείξτε ότι το V είναι κλειστό ως προς την $+$.
2. $V = \mathbb{N}$ και $\cdot$ ο πολλαπλασιασμός με πραγματικό. Δείξτε ότι το V δεν είναι κλειστό ως προς τον $\cdot$.
3. $V = \mathbb{Q}$ και $+, \cdot$ όπως παραπάνω. Δείξτε ότι έχουμε κλειστότητα ως προς την $+$ αλλά όχι ως προς τον $\cdot$.
4. $V = \mathbb{R}^3$ και $\oplus$ που ορίζεται ως $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_3 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_1 \end{pmatrix}$.

Δείξτε ότι το V είναι κλειστό ως προς την $\oplus$ αλλά η $\oplus$ δεν είναι αντιμεταθετική.

5. Έστω ότι $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η f έχει τουλάχιστον ένα σημείο ασυνέχειας$\}$, και $+, \cdot$ οι σχετικές κατά σημείο πράξεις όπως έχουν ορισθεί στις διαλέξεις. Δείξτε ότι το V δεν είναι κλειστό ούτε ως προς την $+$ ούτε ως προς την $\cdot$.
6. Όπως και στην 5 για $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη τουλάχιστον σε ένα σημείο$\}$.
7. Έστω ότι $V = M_{2\times 2}$, και $\otimes$ που ορίζεται ως $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_{11}y_{11} & x_{12}y_{12} \\ x_{21}y_{21} & x_{22}y_{22} \end{pmatrix}$. Δείξτε ότι το V είναι κλειστό ως προς την $\otimes$, η $\otimes$ είναι αντιμεταθετική, αλλά και ότι είναι δυνατόν να έχουμε

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{2\times 2}, \quad \text{με } A \neq O_{2\times 2} \text{ και } B \neq O_{2\times 2}.$$

8. Δείξτε ότι σε διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{R}$, αν $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ τότε
$$\lambda \mathbf{x} = \mathbf{x} \iff \lambda = 1.$$
9. Έστω ότι $V = \mathbb{R}^n$ με τις πράξεις που έχουν ορισθεί στις διαλέξεις, και $V^* = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_i = 0$ όταν το i είναι πρώτος και $\leq n \}$. Δείξτε ότι το

V^* είναι υπόχωρος του V.

10. Έστω ότι $V = M_{n\times n}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις που έχουν μελετηθεί στις διαλέξεις, και $V^* = \{A \in M_{n\times n} : x_{ij} = 0 \text{ όταν } i+j = n\}$. Δείξτε ότι ο V^* είναι υπόχωρος του V.

11. Έστω ότι $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις που έχουν μελετηθεί στις διαλέξεις. Έστω $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, με $\alpha_n \neq 0$ και

$V^* = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ ικανοποιεί την } \alpha_n y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0\}$

($y^{(k)}$ είναι η σχετική κ-τάξης παράγωγος). Δείξτε ότι το V^* είναι υπόχωρος του V.

12. Έστω ότι V όπως στην 11 και $V^* = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(0) = 1\}$. Δείξτε ότι το V^* δεν είναι υπόχωρος του V.