



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 1

Άσκηση 1.1

Να αποδείξετε ότι τα σύνολα των ρητών (\mathcal{Q}) και των πραγματικών (\mathcal{R}) αριθμών αποτελούν διανυσματικούς χώρους του εαυτού τους.

Άσκηση 1.2

Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του \mathcal{R}^3 είναι υποχώροι του \mathcal{R}^3 .

(α) $A = \{(x, y, z) | x + 2y - z = 0\}$

(β) $B = \{(x, y, z) | 2x + 4y + z = 1\}$

(γ) $\Gamma = \{(x, y, z) | 2x + 4y + z = 0\}$

(δ) $\Delta = \{(x, y, z) | y \geq 0\}$

(ε) $E = \{(x, y, z) | y - x = 1\}$

Σε όλα τα υποσύνολα ισχύει: $x, y, z \in \mathcal{R}$

Άσκηση 1.3

Θεωρήστε τα ακόλουθα διανύσματα:

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, z_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(α) Να υπολογίσετε το **εσωτερικό γινόμενο** (*inner product*) μεταξύ των διανυσμάτων: uv , z_1z_2 , z_1z_3 και z_2z_3 .

(β) Να υπολογίσετε το **μήκος** (*length*) ή **νόρμα** (*norm*) του κάθε διανύσματος. Είναι κάποιο αυτά **μοναδιαίο** (*unit vector*); Να δοθούν τα **ομαλοποιημένα** (*normalized*) διανύσματα των υπολοίπων.

(γ) Να βρεθούν οι **αποστάσεις** μεταξύ των σημείων των διανυσμάτων uv , z_1z_2 , z_2z_3 .

(δ) Να υπολογιστεί η **γωνία** θ μεταξύ των διανυσμάτων: uv , z_1z_2 , z_1z_3 και z_2z_3 .

(ε) Να ελεγχθεί η γραμμική εξάρτηση/ανεξαρτησία των διανυσμάτων.

Άσκηση 1.4

Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ αποτελούν μια βάση του R^3 .

Έπειτα να εκφράσετε το διάνυσμα $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ ως γραμμικό συνδυασμό αυτών.

Άσκηση 1.5

Έστω A και B οι ακόλουθοι διανυσματικοί υποχώροι του R^4 :

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$$

$$B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = x_4, x_2 = 2x_3\}$$

(α) Να βρείτε τα διανύσματα που παράγουν (γεννήτορες-*span*) τους υποχώρους A , B , $A+B$.

(β) Να βρείτε τη διάσταση (*dim*) για τους υποχώρους A , B , $A+B$.