ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ 7

Έχουμε δει πως μια τ.μ. μεταφέρει το μέτρο πιθανότητας ως εξής: Δεδομένου $(\Omega, \Sigma_\Omega, P_\Omega)$ και $X : \Omega \to \mathbb{R}$, όπου $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, $X^{-1}(A) \in \Sigma_\Omega$ έχουμε:

αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ $\quad P_X(A) := P(X^{-1}(A))$

όπου P_X : κατανομή (ή μέτρο) πιθανότητας από μεταφορά μέσω της X στο $\mathbb{R}$ (ή απλώς η κατανομή που ακολουθεί η X.)

Εξαιτίας της δυσκολίας περιγραφής του $\Sigma_{\mathbb{R}}$ αναζητήσαμε αναπαραστάσεις της κατανομής (αθροιστική, πυκνότητα).

Τα παραπάνω μπορούν να κατασκευασθούν και στον $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$. Έτσι ξεκινώντας πάλι από τον αρχικό χώρο πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, P)$, η συνάρτηση $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, θα ονομάζεται τυχαίο διάνυσμα (random vector) (ή γενικότερα τυχαίο στοιχείο-random element) αν είναι μετρήσιμη, δηλαδή και πάλι αν $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}^n}$ $\mathbf{X}^{-1}(A) \in \Sigma_\Omega$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $\Omega = \{K, \Gamma\}$, $\Sigma_\Omega = \{\varnothing, \Omega, \{K\}, \{\Gamma\}\}$,
$P(\{K\}) = q$, $P(\{\Gamma\}) = 1-q$, $q \in [0,1]$ και
$\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ $(n=2)$ με $\mathbf{X}(K) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = e_1$
$\mathbf{X}(\Gamma) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = e_2$

Έχουμε ότι αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}^2}$, τότε

$$\mathbf{X}^{-1}(A) = \begin{cases} \varnothing & , e_1, e_2 \notin A \\ \Omega & , e_1, e_2 \in A \\ \{K\} & , e_1 \in A, e_2 \notin A \\ \{\Gamma\} & , e_1 \notin A, e_2 \in A \end{cases} \Rightarrow$$ Επομένως το $\mathbf{X}$ είναι τυχαίο διάνυσμα

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ενα τυχαίο (n-διάστατο) διάνυσμα είναι ενα διάνυσμα απο n τυχαίες μεταβλητές

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στο προηγούμενο παράδειγμα $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ με

$X_1 : \Omega \to \mathbb{R}$, με $X_1(K) = 1$, $X_1(\Gamma) = 0$

$X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$, με $X_2(K) = 0$, $X_2(\Gamma) = 1$

ΣΧΟΛΙΟ

Ένα τυχαίο διάνυσμα (διάστασης n) είναι μια συλλογή απο n διατεταγμένες τυχαίες μεταβλητές, δηλαδή $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ όπου $X_1, X_2, \ldots, X_n$ κατάλληλες τυχαίες μεταβλητές

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X}$ μεταφέρει το P στον $\mathbb{R}^n$ ως

$$\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}^n} \quad P_{\mathbf{X}}(A) := P(\mathbf{X}^{-1}(A))$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$P_{\mathbf{X}}(A) = \begin{cases} P(\emptyset), & \text{αν } e_1, e_2 \notin A \\ P(\Omega), & \text{αν } e_1, e_2 \in A \\ P(K), & \text{αν } e_1 \in A, e_2 \notin A \\ P(T), & \text{αν } e_1 \notin A, e_2 \in A \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{αν } e_1, e_2 \notin A \\ 1, & \text{αν } e_1, e_2 \in A \\ q, & \text{αν } e_1 \in A, e_2 \notin A \\ 1-q, & \text{αν } e_1 \notin A, e_2 \in A \end{cases}$$

!ΠΡΟΣΟΧΗ! Εδώ έχει σημασία η διάταξη άρα

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \neq \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

Σχόλιο

Όπως και στο πρώτο μέρος του μαθήματος, έτσι και τώρα θα μπορούσαμε να μελετήσουμε ιδιότητες κατανομών πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Όμως συναντούμε και εδώ δυσκολία περιγραφής του $\Sigma_{\mathbb{R}^n}$ και συνεπώς προκύπτει και πάλι ζήτημα αναπαράστασής τους. Έχουμε λοιπόν και εδώ τις έννοιες της διακριτής, συνεχούς, μεικτής κατανομής, των συναρτήσεων πιθανότητας αθροιστικής, πυκνότητας κ.λ.π.

Για $n=1$ οι ορισμοί θα είναι παρόμοιοι, αλλά θα υπάρχουν διαφορές σε περίπτωση που το πεδίο ορισμού τους είναι το $\mathbb{R}^n$ (ή κάποιο υποσύνολο αυτού), όπως θα συζητήσουμε αμέσως παρακάτω

ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

$F_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ με

$$F_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = P(X_1 \leq z_1, X_2 \leq z_2, \dots, X_n \leq z_n)$$

όπου $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗΣ

1) • $\lim\limits_{z_i \to -\infty, i=1,\dots,n} F_{\mathbf{x}}(z_i) = 0$

• $\lim\limits_{z_i \to +\infty, i=1,\dots,n} F_{\mathbf{x}}(z_i) = 1$

2) Δεξιά συνεχής

3) Αύξουσα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Έστω τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

και $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ θετικά ορισμένη μήτρα.

[ΘΑ ΔΙΝΕΤΑΙ]

Αν $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ η αθροιστική θα είναι, $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{z}) : \mathbb{R}^n \to [0,1]$

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2\pi} |\Sigma|^{-1/2} \int_{-\infty}^{z_2} \int_{-\infty}^{z_1} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} \, dx_1 dx_2$$

για οποιοδήποτε $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, όπου $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Τότε η $\mathbf{X}$ ακολουθεί τη διμεταβλητή κανονική κατανομή με μέσο $\boldsymbol{\mu}$ και μήτρα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων Σ.

Τα στοιχεία της μήτρας δίνουν τις συνδιακυμάνσεις μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών οι οποίες αποτελούν το τυχαίο διάνυσμα. Συγκεκριμένα:

$$\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j) = E\{(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))\}$$

Βάσει αυτής της σχέσης, βλέπουμε ότι ισχύει πάντα $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, άρα η Σ είναι συμμετρική!

(Θυμηθείτε, η μονομεταβλητή κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, supp $= \mathbb{R}$

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx \quad)$$

ΣΤΗΡΙΓΜΑ

Αφού πλέον το $P: \mathbb{R}^n \to [0,1]$, το στήριγμα της κατανομής ενός τυχαίου διανύσματος, θα ορίζεται ως το μικρότερο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ στο οποίο η κατανομή αποδίδει πιθανότητα 1. Επιπλέον θα ισχύει ότι το στήριγμα του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X}$, (δηλ της κατανομής που μεταφέρεται μέσω αυτού), θα είναι το καρτεσιανό γινόμενο των στηριγμάτων των τυχαίων μεταβλητών που το αποτελούν.
Π.χ. στη διμεταβλητή κατανομή $supp = \mathbb{R}^2$, αφού αποτελείται από τυχαίες μεταβλητές που η κάθε μία ακολουθεί τη μονομεταβλητή κανονική με $supp = \mathbb{R}$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Αν $F_{\mathbf{X}}$ παντού συνεχής και σχεδόν παντού παραγωγίσιμη στα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ τότε η συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής, ορίζεται ως η συνάρτηση $f_{\mathbf{X}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$f_{\mathbf{X}} = \frac{\partial^n F_{\mathbf{X}}}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$$

όπου η $F_{\mathbf{X}}$ παραγωγίσιμη (ενώ παίρνει αυθαίρετες τιμές αλλού)
Επίσης ισχύει:

α) $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{z}) \geq 0$, σχεδόν παντού

β) $\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}}_{n \text{ φορές}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{z})\, \partial z_1 \partial z_2 \ldots \partial z_n = 1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Για $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ και $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ και $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ Θετικά ορισμένη συμμετρική μήτρα.

Έχουμε $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{x}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}$ ↑αντίστροφος

όπου $|\Sigma| = \det(\Sigma)$, ορίζουσα. Έχουμε $|\Sigma| = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21}$

Η $f_{\mathbf{x}}$ ονομάζεται από κοινού πυκνότητα των x_1, x_2.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ

Αν $A = \begin{pmatrix} (l_1, u_1) \\ (l_2, u_2) \\ \vdots \\ (l_n, u_n) \end{pmatrix}$ όπου $l_i < u_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $\forall i = 1, \dots, n$.

και $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ τότε

$$P(\mathbf{X} \in A) = P(X_1 \in (l_1, u_1), \dots, X_n \in (l_n, u_n))$$
$$= P(l_1 < X_1 < u_1, \dots, l_n < X_n < u_n)$$
$$= \int_{l_n}^{u_n} \cdots \int_{l_2}^{u_2} \int_{l_1}^{u_1} f_{\mathbf{x}}(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$$

ΟΡΙΑΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Γνωρίζοντας τη συνάρτηση πυκνότητας ενός n-διάστατου διανύσματος $\mathbf{X}$ (ή από κοινού των $X_1, \dots, X_n$) είναι δυνατόν να υπολογίσουμε τη συνάρτηση πυκνότητας οποιασδήποτε τυχαίας μεταβλητής το αποτελεί, η οποία θα ονομάζεται οριακή συνάρτηση πυκνότητος. Για $i = 1, 2, \dots, n$ έχουμε:

$$f_{X_i}(x_i) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-1 \text{ φορές}} f_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \underbrace{dx_1\, dx_2 \dots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \dots dx_n}_{\text{Ολοκληρώνω ως προς όλα τα υπόλοιπα εκτός από το } x_i}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ

Δίνεται $\sigma_{12}=0 \Rightarrow \sigma_{21}=0$ και άρα $\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & 0\\ 0 & \sigma_{22}\end{pmatrix}$

$|\Sigma|=\sigma_{11}\sigma_{22} \Rightarrow |\Sigma|^{1/2}=\sigma_{11}^{1/2}\sigma_{22}^{1/2}$ $\quad \Sigma^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_{11}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sigma_{22}}\end{pmatrix}$ και

$$f_{\mathbf{x}}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

Θυμηθείτε ότι όταν υψώνω διαγώνιο πίνακα υψώνω απλώς τα διαγώνια στοιχεία.

$$\Rightarrow f_{\mathbf{x}}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_{11}^{1/2}\sigma_{22}^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

Έχουμε: $\underbrace{\underbrace{\underset{(1\times 2)}{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'}\underset{(2\times 2)}{\Sigma^{-1}}}_{1\times 2}\underset{(2\times 1)}{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}}_{1\times 1}=\begin{bmatrix}x_1-\mu_1 & x_2-\mu_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma_{11}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sigma_{22}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-\mu_1\\ x_2-\mu_2\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}(x_1-\mu_1)\cdot\frac{1}{\sigma_{11}}+\cancel{(x_2-\mu_2)\cdot 0} & \cancel{(x_1-\mu_1)\cdot 0}+(x_2-\mu_2)\frac{1}{\sigma_{22}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-\mu_1\\ x_2-\mu_2\end{bmatrix}$$

$$=(x_1-\mu_1)^2\cdot\frac{1}{\sigma_{11}}+(x_2-\mu_2)^2\cdot\frac{1}{\sigma_{22}}$$

$$\Rightarrow f_{\mathbf{x}}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_{11}^{1/2}\sigma_{22}^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_{11}}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_{22}}\right]}$$

$$\Rightarrow f_{\mathbf{x}}(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{11}}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_{11}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{22}}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_{22}}}=f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(x_2)$$

αφού:

Οριακή

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{\mathbf{x}}(x_1,x_2)\,dx_2$$ (ολοκληρώνω ως προς το άλλο!)

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{11}}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_{11}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{22}}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_{22}}}dx_2$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{11}}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_{11}}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{22}}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_{22}}}dx_2$$ (Το έβγαλα αφού δεν εξαρτάται από το x_2.)

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{11}}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_{11}}}\Rightarrow X_1\sim N(\mu_1,\sigma_{11})$$ (Αναλόγως δείχνω $X_2\sim N(\mu_2,\sigma_{22})$)

ΡΟΠΕΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.

Γενικεύοντας την έννοια της ροπής στις τυχαίες μεταβλητές, μπορούμε να υπολογίσουμε ροπές τυχαίων διανυσμάτων, π.χ.

- Ροπή $1^{ης}$ τάξης:

$$E(\mathbf{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x} \, dF_X = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_3) \end{pmatrix}$$

- Διακύμανση:

$$Var(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) & \cdots & Cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & \cdots & Var(X_n) \end{bmatrix}$$

η οποία είναι θετικά ορισμένη και συμμετρική.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

$n = 2 \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N(0, I)$

$$E(\mathbf{X}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{x}} \, dx_1 \, dx_2$$

$$= \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x_1 e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} \, dx_1 \, dx_2 \\ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x_2 e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} \, dx_1 \, dx_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \int_{R} \int_{R} x_1 e^{-\frac{1}{2}x_1^2} e^{-\frac{1}{2}x_2^2} \, dx_1 \, dx_2 \\ \int_{R} \int_{R} x_2 e^{-\frac{1}{2}x_1^2} e^{-\frac{1}{2}x_2^2} \, dx_1 \, dx_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{R} x_1 e^{-\frac{1}{2}x_1^2} dx_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x_2^2} dx_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x_2 e^{-\frac{1}{2}x_2^2} dx_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} dx_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ο μέσος είναι μηδέν. Οι πυκνότητες ολοκληρώνουν στη μονάδα

Σχολιο

Η κατανομή από μεταφορά P_X, δεν εξαρτάται μόνο απο την αρχική κατανομή P και τις τυχαίες μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ που συναπαρτίζουν το τυχαίο διάνυσμα X αλλά και απο τη διάταξη των $x_1, x_2, \ldots, x_n$ στο X.
Υπάρχουν συνθήκες, κάτω απο τις οποίες δεν υπάρχει εξάρτηση του P_X απο τη διάταξη. Αυτό θα συμβαίνει αν οι $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι: (I) Ανεξάρτητες ΚΑΙ (II) Ομοιογενείς

(I) ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Εστω χώρος πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, P_\Omega)$. Αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ τότε τα A, B λέγονται ανεξάρτητα ενδεχόμενα ανν $P_\Omega(A \cap B) = P_\Omega(A) \cdot P_\Omega(B)$
Επεκτείνοντας το παραπάνω σε τυχαίες μεταβλητές, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ θα ονομάζονται ανεξάρτητες ανν

$$P_\Omega(X_1^{-1}(A) \cap X_2^{-1}(A)) = P_\Omega(X_1^{-1}(A)) \cdot P_\Omega(X_2^{-1}(A))$$

για $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το παρακάτω επεκτείνεται και για $n \geq 2$ τυχαίες μεταβλητές. Θα είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αν είναι ανα 2 ανεξάρτητες

Ακόμα, οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ θα ονομάζονται ανεξάρτητες μεταξύ τους <u>ανν</u> η P_X προκύπτει ως κάποιου είδους «γινόμενο» ως προς τις κατανομές $P_{X_1}, P_{X_2}, \dots, P_{X_n}$. Το «γινόμενο αυτό μεταπίπτει στο γνωστό μας γινόμενο αν αντί για την P_X ασχολούμαστε με τις αναπαραστάσεις αυτής. Το παραπάνω επί της ουσίας σημαίνει ότι οι πιθανότητες που αποδίδονται από την P_X στα μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ είναι δυνατόν να αποδοθούν ως γινόμενο των πιθανοτήτων που αποδίδουν σε κατάλληλα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ οι $P_{X_1}, P_{X_2}, \dots, P_{X_n}$.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

Έστω $\Omega = \{K, T\}$, $P(\{K\}) = q$, $P(\{\Gamma\}) = 1-q$, $q \in [0,1]$

$\mathbf{X}: \Omega \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{X}(K) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$, $\mathbf{X}(\Gamma) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2$

Τότε $\mathbf{X}^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset &, e_1, e_2 \notin A \\ \Omega &, e_1, e_2 \in A \\ \{K\} &, e_1 \in A, e_2 \notin A \\ \{\Gamma\} &, e_1 \notin A, e_2 \in A \end{cases}$

για $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}^2}$

Έχουμε $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ όπου $X_1 : \Omega \to \mathbb{R}$, $X_1(K) = 1$, $X_1(\Gamma) = 0$

$X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$, $X_2(K) = 0$, $X_2(\Gamma) = 1$

Ακόμα $P_{\mathbf{X}}(A) := P(\mathbf{X}^{-1}(A))$

$P_{\mathbf{X}}(A) = \begin{cases} P(\emptyset) = 0 &, e_1, e_2 \notin A \\ P(\Omega) = 1 &, e_1, e_2 \in A \\ P(K) = q &, e_1 \in A, e_2 \notin A \\ P(\Gamma) = 1-q &, e_1 \notin A, e_2 \in A \end{cases}$

Οι x_1, x_2 θα είναι ανεξάρτητες αν $q=0$ ή $q=1$ αφού για τις $P_{\mathbf{X}}: \Sigma_{\mathbb{R}^2} \to [0,1]$, $P_{X_1}, P_{X_2}: \Sigma_{\mathbb{R}} \to [0,1]$ έχουμε:

$$P_{\mathbf{X}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = P_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{X} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = P_x(X_1 = 1, x_2 = 0) = P_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}(K)) = q$$
$$\neq P_{X_1}(X_1 = 1) \cdot P_{X_2}(X_2 = 0) = q^2 \quad \text{αν} \quad q \neq 0 \text{ και } q \neq 1$$

Και αντίστοιχα

$$P_{\mathbf{X}}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = P_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{X} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = P_{\mathbf{X}}(X_1 = 0, x_2 = 1) = P_{\mathbf{X}}(X(\Gamma)) = 1-q$$
$$\neq P_{X_1}(X_1 = 0) \cdot P_{X_2}(X_2 = 1) = (1-q)^2 \quad \text{αν} \quad q \neq 0 \text{ ή } 1$$

αφού

$$P_{X_1}(A) = \begin{cases} P_\Omega(\emptyset) = 0 & \text{αν} \quad 1,0 \notin A \\ P_\Omega(\Omega) = 1 & \text{αν} \quad 1,0 \in A \\ P_\Omega(K) = q & \text{αν} \quad 1 \in A, 0 \notin A \\ P_\Omega(\Gamma) = 1-q & \text{αν} \quad 1 \notin A, 0 \in A \end{cases}$$

$$P_{X_2}(A) = \begin{cases} P_\Omega(\emptyset) = 0 & \text{αν} \quad 1,0 \notin A \\ P_\Omega(\Omega) = 1 & \text{αν} \quad 1,0 \in A \\ P_\Omega(\Gamma) = q & \text{αν} \quad 1 \in A, 0 \notin A \\ P_\Omega(K) = 1-q & \text{αν} \quad 1 \notin A, 0 \in A \end{cases}, \quad \forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Έχουμε μεταφέρει το μέτρο P_Ω με 3 διαφορετικές συναρτήσεις: μέσω του $\mathbf{X}$, ($P_{\mathbf{X}}$), μέσω της X_1, P_{X_1}, και μέσω της X_2, (P_{X_2}).

Στα παρακάτω θα συμβολίζουμε με F_X, f_X την αθροιστική και την πυκνότητα του P_X (όταν η τελευταία υπάρχει). Θυμηθείτε ότι αυτές ορίζονται στον $\mathbb{R}^n$. Αντίστοιχα, συμβολίζουμε με F_{X_i}, f_{X_i} $(i = 1, \dots, n)$ τις ανάλογες του P_{X_i}, δηλαδή του μέτρου πιθανότητας που ακολουθεί η X_i.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Έστω $\mathbf{X} = \left(\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}\right)$ τυχαίο διάνυσμα που ακολουθεί την P_X

Αν και μόνο αν οι $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τότε $F_X(z_1, z_2, \dots, z_n) = F_{X_1}(z_1) \cdot F_{X_2}(z_2) \cdots F_{X_n}(z_n)$

ενώ αν και μόνο αν οι $P_{X_1}, P_{X_2}, \dots, P_{X_n}$ έχουν πυκνότητες, τότε έχει και η P_X και ισχύει ότι

$$f_X(z_1, z_2, \dots, z_n) = f_{X_1}(z_1) \cdot f_{X_2}(z_2) \cdots f_{X_n}(z_n)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έχουμε καταφέρει επομένως να εκφράσουμε την έννοια της ανεξαρτησίας ως δυνατότητα παραγοντοποίησης της από κοινού κατανομής πιθανότητας κ συνεπώς κ της από κοινού αθροιστικής κ της συνάρτησης κ επιπροσθέτως, εφ' όσον υπάρχει κ της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας από κοινού συνάρτησης

ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι X_1, X_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές αν $\forall f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $E(f(X_1) g(X_2)) = E(f(X_1)) E(g(X_2))$

(Επεκτείνεται και σε n τυχαίες μεταβλητές)

Στα παρακάτω εξυπακούεται η ανεξαρτησία

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ότι $P_{X_i} = e^{\lambda_i}$, $\lambda_i > 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$

Αφού έχουμε ανεξαρτησία, τότε

$$F_X(z_1, z_2, \ldots, z_n) = F_{X_1}(z_1) \cdot F_{X_2}(z_2) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(z_n)$$

Θυμηθείτε όμως ότι:

$$F_{X_i}(z_i) = \begin{cases} 0 & , z_i \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda_i z_i} & , z_i > 0 \end{cases}$$

οπότε

$$F_X(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \begin{cases} 0 & , \text{αν } z_i \leq 0 \text{ για κάποιο } i = 1, \ldots, n \\ \prod_{i=1}^{n} (1 - e^{-\lambda_i z_i}) & , \text{αν } z_i > 0 \ \forall i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Αναλόγως, αφού

$$f_{X_i}(z_i) = \begin{cases} 0 & , z_i \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda_i z_i} & , z_i > 0 \end{cases}$$

έχουμε ότι

$$f_X(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \begin{cases} 0 & , \text{αν } z_i \leq 0 \text{ για κάποιο } i = 1, \ldots, n \\ \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda_i z_i} & , \text{αν } z_i > 0 \ \forall i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι οποιαδήποτε από τις παραπάνω αποτελεί αναπαράσταση της P_X.

(II) ΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑ

Η μη εξάρτηση του P_x από τη διάταξη εξασφαλίζεται αν εκτός της ανεξαρτησίας ισχύει και η ομοιογένεια, η οποία σημαίνει ότι οι $P_{x_1}=P_{x_2}=\dots=P_{x_n}$ οπότε οι τυχαίες μεταβλητές που συναπαρτίζουν το x θα ακολουθούν την ίδια κατανομή. Σε αυτή την περίπτωση, αυτές θα ονομάζονται ομοιογενείς και ανεξάρτητες ή i.i.d. (independent and identically distributed)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στο προηγούμενο παράδειγμα, οι $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι i.i.d. αν και μόνο αν $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=\lambda$, οπότε

$$F_X(z_1, z_2, \dots, z_n)=\begin{cases} 0 & , \text{αν } z_i \leq 0 \text{ για κάποιο } i=1,\dots,n \\ \prod_{i=1}^{n}(1-e^{\lambda z_i}) & , \text{αν } z_i>0,\ \forall i=1,\dots,n \end{cases}$$

$$f_X(z_1, z_2, \dots, z_n)=\begin{cases} 0 & , \text{αν } z_i \leq 0 \text{ για κάποιο } i=1,\dots,n \\ \lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} z_i} & , \text{αν } z_i>0,\ \forall i=1,\dots,n \end{cases}$$

Άσκηση 1.

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $\mu_i \in \mathbb{R}$, $\sigma_i^2 > 0$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας του τυχαίου διανύσματος $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$

Δίνεται η pdf της κατανομής:

$$f_{X_i}(x_i; \mu, \sigma_i^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}}$$

Λύση

Λόγω ανεξαρτησίας θα ισχύει:

$$f_{\mathbf{X}}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = f_{X_1}(z_1) f_{X_2}(z_2) \ldots f_{X_n}(z_n)$$

$\forall\ z_1, z_2, \ldots z_n \in \mathbb{R}$

Άρα:

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(z_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(z_n-\mu_n)^2}{\sigma_n^2}}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(z_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu})}$$

όπου $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$

Θυμηθείτε πως:

$$\underset{(1\times n)}{\begin{bmatrix}(x_1-\mu_1) & (x_2-\mu_2) & \cdots & (x_n-\mu_n)\end{bmatrix}}\ \underset{(n\times n)}{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_n^2}\end{bmatrix}}\ \underset{(n\times 1)}{\begin{bmatrix}(x_1-\mu_1)\\(x_2-\mu_2)\\ \vdots\\(x_n-\mu_n)\end{bmatrix}}$$

$$=\underset{(1\times n)}{\begin{bmatrix}\frac{(x_1-\mu_1)}{\sigma_1^2} & \frac{(x_2-\mu_2)}{\sigma_2^2} & \cdots & \frac{(x_n-\mu_n)}{\sigma_n^2}\end{bmatrix}}\ \underset{(n\times 1)}{\begin{bmatrix}(x_1-\mu_1)\\(x_2-\mu_2)\\ \vdots\\(x_n-\mu_n)\end{bmatrix}}=\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}+$$

$$+\dots+\frac{(x_n-\mu_n)^2}{\sigma_n^2}=\underset{(1\times 1)}{\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}}$$

Ακόμα η ορίζουσα διαγώνιου πίνακα, ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του.

$$\rightarrow\quad |\Sigma| = \sigma_1^2\cdot\sigma_2^2\cdot\ldots\cdot\sigma_n^2=\prod_{i=1}^{n}\sigma_i^2$$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>

Στο παραπάνω παράδειγμα οι τυχαίες μεταβλητές θα είναι iid <u>ανν</u> $\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_n=\mu$ ΚΑΙ $\sigma_1=\sigma_2=\ldots=\sigma_n=\sigma$.

Στη συνέχεια θα δούμε παραδείγματα συναρτήσεων (πυκνότητας) πιθανότητας τυχαίων διανυσμάτων που ακολουθούν πολυμεταβλητές κατανομές, τις οποίες έχουμε δει στην απλή μονομεταβλητή τους μορφή. Σε κάθε περίπτωση θα υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές, που αποτελούν το τυχαίο διάνυσμα, είναι iid. Αυτό θα μας επιτρέπει να γράφουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ως γινόμενο οριακών συναρτήσεων πυκνότητας οι οποίες προέρχονται από την ίδια (μονομεταβλητή) κατανομή.

Άσκηση 2.

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ iid τυχαίες μεταβλητές με $X_1 \sim \text{Binomial}(n,p)$. Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$. Δίνεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διωνυμικής:

$$f(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Λύση

Δεδομένου ότι οι τυχαίες μεταβλητές είναι iid θα ακολουθούν όλες την ίδια κατανομή, άρα $X_i \sim \text{Binomial}(n,p)$, $\forall\, i = 1, 2, \dots, n$. Ακόμα, λόγω ανεξαρτησίας, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα είναι ίση με το γινόμενο των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας καθεμίας από τις τυχαίες μεταβλητές. Επομένως έχουμε:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x};n,p) \equiv f_{\mathbf{X}}(x_1,x_2,\dots,x_n;n,p)$$
$$= f_{X_1}(x_1;n,p)\cdot f_{X_2}(x_2;n,p)\cdots f_{X_n}(x_n;n,p)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;n,p) = \prod_{i=1}^{n}\binom{n}{x_i}p^{x_i}(1-p)^{n-x_i}$$

Άσκηση 3.

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ iid τυχαίες μεταβλητές και $X_1 \sim Poisson(\lambda)$. Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$. Δίνεται η συνάρτηση πιθανότητας της (μονομεταβλητής) Poisson: $p(x;\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$

Λύση

Δεδομένου ότι οι τυχαίες μεταβλητές είναι iid θα ακολουθούν όλες την ίδια κατανομή, άρα $X_i \sim Poisson(\lambda)$, $\forall i = 1,2,\dots,n$. Επίσης, η συνάρτηση πιθανότητας του $\mathbf{X}$ θα είναι ίση με το γινόμενο των συναρτήσεων πιθανότητας καθεμίας από τις τυχαίες μεταβλητές.

Άρα η συνάρτηση πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X}$ θα είναι:

$$P_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_1;\lambda)\,p(x_2;\lambda)\cdots p(x_n;\lambda)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda n} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

Άσκηση 4.

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ iid τυχαίες μεταβλητές με $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$. Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$

(Παρατήρηση: Η λύση μπορεί να προκύψει αν στο αποτέλεσμα της άσκησης 1 θέσουμε $\mu_i = \mu$ και $\sigma_i^2 = \sigma^2$)

Δίνεται η pdf της μονομεταβλητής κανονικής κατανομής $f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$

Λύση

Λόγω ανεξαρτησίας θα ισχύει:

$$f_{\mathbf{X}}(z_1, z_2, \dots, z_n) = f_{X_1}(z_1)\, f_{X_2}(z_2) \cdots f_{X_n}(z_n)$$

$\forall\, z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{R}$

Επίσης, από iid οι τυχαίες μεταβλητές θα έχουν ταυτόσημη κατανομή, άρα:

$$f_{\mathbf{X}}(z_1, z_2, \dots, z_n) = f(z_1; \mu, \sigma^2) f(z_2; \mu, \sigma^2) \dots f(z_n; \mu, \sigma^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(z_1-\mu)^2}{\sigma^2}} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(z_n-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(z_i-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Άσκηση 5

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ iid τυχαίες μεταβλητές με $X_1 \sim \exp(\lambda)$, $\lambda > 0$. Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$. Δίνεται η pdf της εκθετικής συνάρτησης: $f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$

Λύση

Όπως πριν, λόγω iid έχουμε:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots x_n) = f(x_1; \lambda) f(x_2; \lambda) \dots f(x_n; \lambda)$$

$$= \lambda e^{-\lambda x_1} \lambda e^{-\lambda x_2} \dots \lambda e^{-\lambda x_n}$$

$$= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Ισχύουν οι παραπάνω υπολογισμοί των συναρτήσεων αν $x_i > 0, \forall i$. Αν κάποιο $x_i < 0$ τότε η pdf θα είναι 0.