Στο προηγούμενο παράδειγμα (Παράδειγμα 3) είδαμε ότι ο MLE είναι αμερόληπτος. Στο επόμενο θα δούμε ότι η συγκεκριμένη ιδιότητα εξαρτάται και από τον τρόπο με τον οποίο "εκφράζουμε" το στατιστικό υπόδειγμα.

Λήμμα Επαναπαραμέτρησης. Έστω ο $MLE(\theta_0)$, και $f:\Theta\to\Phi$, όπου $\Phi\subseteq\mathbb{R}^{d^*}$, 1-1 και επί (προφανώς $f(\theta_0)\in\Phi$ (γιατί;)). Τότε

$$MLE(f(\theta_0)) = f(MLE(\theta_0)).\ \square$$

Προσπαθήστε να το αποδείξετε ως Άσκηση!

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα 3, (όπου $\Theta=(0,+\infty)$, $d=1$), έστω $\Phi=\Theta=(0,+\infty)$, $d^*=d=1$, $\phi=f(\lambda)=\frac{1}{\lambda}$ που είναι 1-1 και επί (γιατί;). Αν $\varphi_0:=f(\lambda_0)=\frac{1}{\lambda_0}$, τότε $\varphi_n:=MLE(\varphi_0)=f(MLE(\theta_0))=\frac{1}{MLE(\lambda_0)}=\frac{1}{n/\sum_{i=1}^n X_i}$ $=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Έχουμε ότι $\underbrace{E}_{\text{ως προς την } Exp(\lambda_0)}(\varphi_n)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)\underset{(\text{γιατί;})}{=}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i)=$

$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\lambda_0}=\frac{1}{\lambda_0}=\varphi_0$, επομένως είναι αμερόληπτος εκτιμητής του φ_0.

Αντιστοίχως στο παράδειγμα 2, $\nu_n=MLE(\nu_0)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ ο οποίος είδαμε ότι είναι αμερόληπτος. Αν $\Phi=\mathbb{R}$, $d^*=1$, $f:\Theta=(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=\ln x$ που είναι 1-1 και επί (γιατί;) και $\varphi_0:=f(\nu_0)=\ln\nu_0$, $\varphi_n:=MLE(\varphi_0)=\ln MLE(\nu_0)=\ln\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right]=-\ln(n)+\ln\left[\sum_{i=1}^n X_i^2\right]$. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι $E(\varphi_n)\neq\ln\nu_0$ οπότε ο εκτιμητής είναι μεροληπτικός.

Συνεπώς, η ιδιότητα της αμεροληψίας είναι δυνατόν να εξαρτάται και από τον τρόπο έκφρασης της παραμέτρου του στατιστικού υποδείγματος. □

[Είναι δυνατόν να δειχθεί ότι η ιδιότητα της συνέπειας δεν είναι τόσο "ευαίσθητη" σε μετασχηματισμούς. Έτσι αν η f 1-1, επί και συνεχής, τότε αν ο $MLE(\theta_0)$ συνεπής, και ο $MLE(f(\theta_0))$ συνεπής].

Πιθανοφάνεια και Διακριτές Κατανομές

Στα προηγούμενα, δεδομένου του υποδείγματος μας, η $L_n(\theta)$, ορίστηκε μέσω των ανάλογων συναρτήσεων πυκνότητας. Αν $\exists\theta\in\Theta$: η P_θ δεν έχει συνάρτηση πυκνότητας, τότε η προαναφερθείσα κατασκευή καταρρέει. Παρόλα αυτά, αν $\forall\theta\in\Theta$ η P_θ είναι διακριτή, και $\mathrm{supp}(P_\theta)$ είναι ανεξάρτητο του θ, τότε είναι δυνατόν να οριστεί η L_n μέσω των συναρτήσεων μάζας πιθανότητας $P_\theta(\{i\})$, $i\in\mathrm{supp}$ ως:

$$L_n(\theta) := \prod_{i=1}^{n} P_\theta(\{X_i\}),$$

$$\ell_n(\theta) := \ln L_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln P_\theta(\{X_i\}),$$

$$\bar{\ell}_n(\theta) := \frac{1}{n}\ell_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln P_\theta(\{X_i\}),$$ ενώ ο συνακόλουθος ορισμός του $MLE(\theta_0)$ παραμένει ως έχει.

Παράδειγμα 4. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ iid με $X_1 \sim Pois(\lambda_0)$, όπου $\lambda_0>0$ άγνωστο. Να βρεθεί ο $MLE(\lambda_0)$.

Κατ' αναλογία με τα προηγούμενα (εξηγήστε!) έχουμε ότι $\mathcal{Y}_\Theta = \{Poiss(\lambda), \lambda\in\Theta=(0,+\infty)\}$ $(d=1)$. Θυμηθείτε ότι $\forall\lambda\in\Theta$,

$supp(Poiss(\lambda)) = \mathbb{N}$ και $P_\lambda(\{i\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$, $i \in \mathbb{N}$. Οπότε και βάσει του παραπάνω ορισμού $L_n(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} P_\lambda(\{X_i\}) =$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{X_i}}{X_i!} =$$

$$= (e^{-\lambda})^n \prod_{i=1}^{n} \lambda^{X_i}/X_i! =$$

$$= e^{-n\lambda} \prod_{i=1}^{n} \lambda^{X_i}/X_i! .$$

(Σημειώστε ότι γενικά η $L_n(\theta)$ θα είναι καλώς ορισμένη αφού $P(X_i \in supp(P_{\theta_0}), \forall i=1,\dots,n) \underset{\text{ανεξ}}{=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in supp(P_{\theta_0})) \underset{\text{ορισμ.}}{=}$ $= \prod_{i=1}^{n} 1 = 1.$)

Συνεπώς, $\ell_n(\lambda) = \ln L_n(\lambda) = \ln\left[e^{-n\lambda}\prod_{i=1}^{n} \lambda^{X_i}/X_i!\right] =$

$$= -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} \ln \lambda^{X_i} - \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i!)$$

$$= -n\lambda + \ln\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i!),$$ και,

$$\bar{\ell}_n(\theta) = -\lambda + \ln\lambda \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i!)$$

$$= -\lambda + \ln\lambda\, \mu_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln[X_i!].$$

Για την εξαγωγή του MLE(λ_0) χρησιμοποιούμε συνθήκες $1^{ης}$ και $2^{ης}$ τάξης χωρίς την ενσωμάτωση του περιορισμού $\lambda > 0$, οπότε:

- $1^{ης}$ τάξης: $\frac{d\bar{\ell}_n(\lambda)}{d\lambda} = 0 \Rightarrow d\left(-\lambda + \ln\lambda\, \mu_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln[X_i!]\right)/d\lambda = 0$

$\Leftrightarrow -1 + \frac{1}{\lambda} y_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_n = y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$

κρίσιμο σημείο

$-2^{ης}$ τάξης: $\left.\frac{d^2 \bar{\ell}_n(\lambda)}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=\lambda_n} = \left.\frac{d\left(-1+\frac{1}{\lambda}y_n\right)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_n=y_n} = \left.-\frac{1}{\lambda^2}y_n\right|_{\lambda=\lambda_n=y_n}$

$= -\frac{1}{y_n}$ για το οποίο έχουμε ότι αφού $P(y_n=0) = P(X_i=0, \forall i=1,\dots,n) \underset{\text{ανεξ.}}{=} \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_0}\frac{\lambda_0^0}{0!} = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_0} = e^{-n\lambda_0} \to 0$ καθώς $n\to\infty$, οπότε

$\left.\frac{d^2 \bar{\ell}_n(\lambda)}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=\lambda_n} < 0$ καθώς $n \to +\infty$ με πιθ. $\to 1$, και συνεπώς ο

$MLE(\lambda_0) = \lambda_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ με πιθανότητα που συγκλίνει στο 1 καθώς $n \to \infty$. (Σημειώστε ότι όταν n πεπερασμένο το $P(\lambda_n=0)=e^{-n\lambda_0} > 0$ οπότε ο λ_n είναι εκτός του Θ με θετική πιθανότητα). Τέτοιου είδους περιπτώσεις μπορούν εύκολα να αντιμετωπισθούν επεκτείνοντας το $\Theta=[0,+\infty)$ (οπότε γνωρίζοντας ότι αναγκαστικά $\lambda_0 \in (0,+\infty)$ δηλ. στο εσωτερικό του Θ), οπότε $MLE(\lambda_0)=\lambda_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ αυτόματα και για πεπερασμένο n. Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε ότι $E(\lambda_n) =$

ως προς την $Poiss(\lambda_0)$

$= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{(\text{γιατί;})}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_0 = \lambda_0$ οπότε ο $MLE(\lambda_0)$ είναι αμερόληπτος. Σε κάθε περίπτωση είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι είναι συνεπής. □

Παράδειγμα Πολυμεταβλητής Βελτιστοποίησης

Στο παράδειγμα έχουμε ότι $d=2$, επομένως η βελτιστοποίηση θα είναι πολυμεταβλητή, ενώ ο $MLE(\theta_0)$ τυχαίο διάνυσμα διάστασης

2×1.

Παράδειγμα 5. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ iid τυχαίες μεταβλητές με $X_1 \sim N(\mu_0, v_0)$, όπου $\mu_0 \in \mathbb{R}, v_0 > 0$ άγνωστα. Να εξαχθεί ο $MLE(\theta_0)$, όπου $\theta_0 = \binom{\mu_0}{v_0}$.

Κατ' αναλογία με τα προηγούμενα (εξηγήστε!), έχουμε ότι

$$\mathcal{Y}_\Theta = \left\{ N(\mu, v),\ \theta = \binom{\mu}{v} \in \Theta = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \right\}$$ (δηλαδή $\Theta = \left\{ \binom{x_1}{x_2} : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0 \right\}$ οπότε $d = 2$). Έχουμε επίσης ότι

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{1}{2v}(x-\mu)^2\right)$$ οπότε:

$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^n f(X_i, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{1}{2v}(X_i - \mu)^2\right)$$

$$= (2\pi v)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2v}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2\right).$$ Οπότε,

$$l_n(\theta) = \ln L_n(\theta) = \ln\left[(2\pi v)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2v}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2\right)\right]$$

$$= -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln v - \frac{1}{2v}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2,$$ και

$$\bar{l}_n(\theta) = \frac{1}{n} l_n(\theta) = -\frac{1}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln v - \frac{1}{2v}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$

Για την εξαγωγή του $MLE(\theta_0)$ ισχύει το (*) των προηγούμενων σημειώσεων. Στην συγκεκριμένη περίπτωση οι σχετικές συνθήκες έχουν την εξής μορφή:

- Συνθήκες 1ης τάξης: $$\frac{\partial \bar{l}_n(\theta)}{\partial \theta} = 0_{2\times 1} \iff \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{l}_n(\theta)}{\partial \mu} \\ \frac{\partial \bar{l}_n(\theta)}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\Leftrightarrow)\ (*)\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{l}_n(\theta)}{\partial \mu}=0 \\ \dfrac{\partial \bar{l}_n(\theta)}{\partial v}=0 \end{cases}$$

Που είναι ένα σύστημα (όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω μη γραμμικό- αλλά εύκολα επιλύσιμο) δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Κάνοντας τις σχετικές παραγωγίσεις υπολογίζουμε ότι:

$$(*) = \begin{cases} -2\frac{1}{2v}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)(-1)=0 \\ -\frac{1}{2v}+\frac{1}{2v^2}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(X_i-\mu)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{v}\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu\right]=0 \\ -\frac{1}{2v}+\frac{1}{2v^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \\ -\frac{1}{2v}+\frac{1}{2v^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_n)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \\ v_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_n)^2 \end{cases}$$

και επομένως το κρίσιμο σημείο είναι το $\theta_n=\begin{pmatrix}\mu_n\\ v_n\end{pmatrix}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}X_i\\ (X_i-\mu_n)^2\end{pmatrix}$.

- Συνθήκες $2^{ης}$ τάξης: (Θυμηθείτε ότι επαρκείς συνθήκες για τον χαρακτηρισμό του παραπάνω ως (τοπικού) μεγίστου είναι το αρνητικά ορισμένο της Εσσιανής μήτρας υπολογισμένης στο θ_n (με πιθ. 1 στο συμμετρισμένο υπόβαθρο)).

Έχουμε ότι

$$\mathcal{H}_n(\theta):=\frac{\partial^2\bar{l}_n(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\bar{l}_n(\theta)}{\partial\mu^2} & \frac{\partial^2\bar{l}_n(\theta)}{\partial\mu\partial v} \\ \frac{\partial^2\bar{l}_n(\theta)}{\partial v\partial\mu} & \frac{\partial^2\bar{l}_n(\theta)}{\partial v^2} \end{pmatrix},$$ ενώ

Εξαιτίας του θεωρήματος του Young έχουμε ισότητα των σταυροειδών παραγώγων, δηλ. $\frac{\partial^2\bar{l}_n(\theta)}{\partial\mu\partial v}=\frac{\partial^2\bar{l}_n(\theta)}{\partial v\partial\mu}$ (ελέγξτε το αναλυτικά!).

Οπότε υπολογίζοντας έχουμε:

$$\frac{\partial^2\bar{l}_n(\theta)}{\partial\mu^2}=\partial\left[\frac{1}{v}\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu\right]\right]\Big/\partial\mu=-\frac{1}{v},$$

$$\frac{\partial^2\bar{l}_n(\theta)}{\partial v^2}=\partial\left[-\frac{1}{2v}+\frac{1}{2v^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]\Big/\partial v=\frac{1}{2v^2}-\frac{1}{v^3}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,$$ και

$$\frac{\partial^2 \bar{l}_n(\theta)}{\partial\mu\partial v} = \partial\left[-\frac{1}{2v} + \frac{1}{2v^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]\Big/\partial\mu = -\frac{1}{2v^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2(X_i-\mu)(-1)$$

$$= -\frac{1}{v^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right).$$ Επομένως, $\frac{\partial^2 \bar{l}_n(\theta_n)}{\partial\mu^2} = -\frac{1}{v_n}$, $\frac{\partial^2 \bar{l}_n(\theta_n)}{\partial v^2} =$

$$= \frac{1}{2v_n^2} - \frac{1}{v_n^3}v_n = -\frac{1}{2v_n^2},\quad \frac{\partial^2 \bar{l}_n(\theta_n)}{\partial\mu\partial v} = -\frac{1}{v_n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu_n\right)=0.$$

Συνεπώς $\mathcal{H}_n(\theta_n) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{v_n} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2v_n^2}\end{pmatrix}$. Τώρα είναι δυνατόν να

δειχθεί ότι $P(v_n>0)=1$ ενώ για διαγώνιος μήτρα είναι αρνητικά ορισμένη ανν τα διαγώνια της στοιχεία είναι αρνητικά. Εδώ η $\mathcal{H}_n(\theta_n)$ είναι συνεπώς αρνητικά ορισμένη με πιθανότητα 1. Επομένως:

$$MLE(\theta_0) = \theta_n = \begin{pmatrix}\mu_n \\ v_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_n)^2\end{pmatrix}$$

δηλαδή όπως αναμέναμε ο εκτιμητής είναι δισδιάστατο τυχαίο διάνυσμα.

Προχωρώντας να ελέγξουμε το αν είναι αμερόληπτος, σημειώνουμε ότι αυτό θα ισχύει ανν,

$$E(\theta_n) = \theta_0$$ δηλαδή εξ' ορισμού

ως προς την $P_{\theta_0} = N(\mu_0, v_0)$

$$E(\theta_n) = E\left(\begin{pmatrix}\mu_n \\ v_n\end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix}E(\mu_n) \\ E(v_n)\end{pmatrix}$$ και $\theta_0 = \begin{pmatrix}\mu_0 \\ v_0\end{pmatrix}$,

οπότε η αμεροληψία θα ισχύει αν $\begin{pmatrix} E(y_n) \\ E(v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} E(y_n) = y_0 \\ E(v_n) = v_0 \end{cases} \quad (**).$$

Έχουμε ότι $E(y_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{(\gamma\iota\alpha\tau\iota;)}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_0 = y_0$

επομένως η πρώτη συνθήκη στο (**) ισχύει.

Για την δεύτερη έχουμε, $v_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - y_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - 2y_nX_i + y_n^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2y_n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + y_n^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2y_n^2 + y_n^2$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - y_n^2$ (το δειγματικό ανάλογο του $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$).

Επίσης, $Var(y_n) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{(\gamma\iota\alpha\tau\iota;)}{=} \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$\underset{\text{ανεξ.}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \underset{\text{ομοιογ.}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} v_0 = \frac{n}{n^2}v_0 = \frac{1}{n}v_0.$

Επίσης, $Var(y_n) = E(y_n^2) - (E(y_n))^2 \Leftrightarrow \frac{v_0}{n} = E(y_n^2) - y_0^2 \Leftrightarrow$

$E(y_n^2) = \frac{v_0}{n} + y_0^2.$

Επομένως, $E(v_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - y_n^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - E(y_n^2)$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Var(X_i) + [E(X_i)]^2\right) - \frac{v_0}{n} - y_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(v_0 + y_0^2) - \frac{v_0}{n} - y_0^2$

$= v_0 + y_0^2 - \frac{v_0}{n} - y_0^2 = \frac{n-1}{n}v_0 \neq v_0$ επομένως η δεύτερη συνθήκη της (**) δεν ισχύει και συνεπώς $E(\theta_n) = \begin{pmatrix} y_0 \\ \frac{n-1}{n}v_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ άρα ο $MLE(\theta_0)$ είναι μεροληπτικός.

Σχόλια. 1. Καθώς το $n \to +\infty$, $E(v_n) = \frac{n-1}{n} v_0 \to v_0$, άρα $E(\theta_n) = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \frac{n-1}{n} v_0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \psi_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ οπότε ο $MLE(\theta_0)$ είναι **ασυμπτωτικά** αμερόληπτος.

2. Έστω $n>1$, $$\tilde{\theta}_n := \begin{pmatrix} \psi_n \\ \frac{n}{n-1} v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ \frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\psi_n)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\psi_n)^2 \end{pmatrix}$$

έχει $$E(\tilde{\theta}_n) = \begin{pmatrix} E(\psi_n) \\ E(\frac{n}{n-1} v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(\psi_n) \\ \frac{n}{n-1} E(v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n} v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

και συνεπώς είναι αμερόληπτος εκτιμητής του θ_0. Αυτό μας δείχνει ότι είναι δυνατόν να διορθώνουμε την μεροληψία κάποιου εκτιμητή σε κάποιες περιπτώσεις μετασχηματίζοντάς τον.*

3. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι ο $MLE(\theta_0)$ είναι συνεπής. □

Οι σημειώσεις βρίσκονται σε στάδιο διαρκούς διόρθωσης και δεν υποκαθιστούν τις διαλέξεις. Παρακαλώ αναφέρτε όποιο λάθος στο stelios@aueb.gr ή στο e-class του μαθήματος.

* Μια τέτοια διαδικασία όταν είναι εφικτή ονομάζεται διόρθωση μεροληψίας (bias correction). Παρατηρήστε όμως ότι $Var(\frac{n}{n-1} v_n) = \frac{n^2}{(n-1)^2} Var(v_n) > Var(v_n)$ αφού $n > n-1$ $\forall n>1$.

Επομένως η διόρθωση μεροληψίας είναι δυνατόν να επιβαρύνει άλλες ιδιότητες του εκτιμητή. □