Φροντιστήριο ΣΒ6

Άσκηση 1 (Poisson από μεταφορά)

Έστω η κατανομή $\mathbb{P}$ με $supp\mathbb{P} = \{0,1,2,3,\dots\}$ και

$$\mathbb{P}(\{x\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad , \forall x \in supp\mathbb{P}, \lambda > 0$$

Έστω η τυχαία μεταβλητή $X_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου $X_1(x) = -x$.

1. Να βρεθεί το στήριγμα της $\mathbb{P}^*$ από μεταφορά.

Υπολογίζοντας ότι το στήριγμα της $\mathbb{P}^*$ θα είναι το σύνολο $\{-x\}$.
Υποθέτουμε ότι $supp\mathbb{P}^* = \{\dots,-3,-2,-1,0\}$.
Υποθέτοντας το σύνολο $\{-x\}$ σαν στήριγμα της $\mathbb{P}^*$, πρέπει να δείξουμε ότι η $\mathbb{P}^*$ από μεταφορά είναι καλώς ορισμένη διακριτή κατανομή και να αποδείξουμε ότι το συγκεκριμένο σύνολο $\{-x\}$ είναι όντως στήριγμα της $\mathbb{P}^*$.
Για να είναι η $\mathbb{P}^*$ καλώς ορισμένη διακριτή κατανομή πρέπει:

α. Το στήριγμά της να είναι διακριτό

β. Για $\forall x \in supp\mathbb{P}^*$, $\mathbb{P}^*(\{x\}) > 0$

γ. $\mathbb{P}^*(supp\mathbb{P}^*) = 1$

α) Το στήριγμα της $\mathbb{P}^*$ που έχουμε υποθέσει είναι το σύνολο των αρνητικών ακεραίων $\{\dots,-3,-2,-1,0\}$ το οποίο είναι διακριτό σύνολο.

β) Από ορισμό της κατανομής από μεταφορά, γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}(X_1^{-1}(A)) \quad , \forall A \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}$$

Επομένως, στην περίπτωσή μας έχουμε:

$$\mathbb{P}^*(\{-x\}) = \mathbb{P}(X_1^{-1}(\{-x\}))$$

από ορισμό κατανομής από μεταφορά

Επιπλέον, σύμφωνα με τον ορισμό της αντίστροφης εικόνας έχουμε:

$$X_1^{-1}(\{-x\}) = \{x \in \mathbb{R} : X_1(x) = -x\}$$

Για παράδειγμα, υπολογίζουμε την αντίστροφη εικόνα του συνόλου $\{-x\}$ μέσω της τυχαίας μεταβλητής X_1 ως εξής:

$$X_1(0)=0 \Rightarrow X_1^{-1}(0)=0 \rightsquigarrow \{x\in\mathbb{R}: -x=0\}$$
$$X_1(1)=-1 \Rightarrow X_1^{-1}(-1)=1 \rightsquigarrow \{x\in\mathbb{R}: -x=-1\}$$
$$X_1(2)=-2 \Rightarrow X_1^{-1}(-2)=2 \rightsquigarrow \{x\in\mathbb{R}: -x=-2\}$$
$$X_1(3)=-3 \Rightarrow X_1^{-1}(-3)=3 \rightsquigarrow \{x\in\mathbb{R}: -x=-3\}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

δηλαδή

άρα $\{-x\}$ $\quad X_1^{-1}(\{-x\})=\{x\}$

Παρατηρούμε ότι οι αντίστροφες εικόνες του συνόλου $\{-x\}$ είναι το σύνολο $\{x\}=\{0,1,2,3,\dots\}$. Συνεπώς, από ορισμό αντίστροφης εικόνας έχουμε ότι:

$$\mathbb{P}(X_1^{-1}(\{-x\}))=\mathbb{P}(\{x\})$$

Άρα,

$$\underbrace{\mathbb{P}^*(\{-x\})=\mathbb{P}(X_1^{-1}(\{-x\}))}_{\substack{\text{από ορισμό κατανομής}\\ \text{από μεταφορά}}}\underbrace{=\mathbb{P}(\{x\})}_{\substack{\text{από ορισμό}\\ \text{αντίστροφης εικόνας}}}=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^x}{x!}>0$$

Επομένως, δείξαμε ότι η $\mathbb{P}^*$ αποδίδει αυστηρά θετική πιθανότητα σε κάθε στοιχείο του supp της.

γ) Θέλουμε να δείξουμε ότι η κατανομή από μεταφορά $\mathbb{P}^*$ αποδίδει στο σύνολο $\{-x\}=\{\dots,-3,-2,-1,0\}$ μοναδιαία πιθανότητα. Αν ισχύει, τότε το σύνολο που έχουμε υποθέσει ως στήριγμα της $\mathbb{P}^*$ θα είναι όντως το supp $\mathbb{P}^*$ και η $\mathbb{P}^*$ θα είναι καλώς ορισμένη διακριτή κατανομή.

$$\mathbb{P}^*(\{-x\})=\mathbb{P}^*(\{\dots,-3,-2,-1,0\})=\mathbb{P}(X_1^{-1}(\{\dots,-3,-2,-1,0\}))=\mathbb{P}(\{x\})=$$
$$=\mathbb{P}(\underbrace{\{0,1,2,3,\dots\}}_{\text{supp}\mathbb{P}})=\mathbb{P}(\text{supp}\mathbb{P})=1$$

Συνεπώς, αφού η κατανομή $\mathbb{P}^*$ αποδίδει αυστηρά θετική πιθανότητα σε $\forall\, x \in \{\dots,-3,-2,-1,0\}$ και αποδίδει μοναδιαία πιθανότητα στο σύνολο αυτό, δηλ. $\mathbb{P}^*(\{\dots,-3,-2,-1,0\})=1$, τότε το στήριγμα της κατανομής από μεταφορά $\mathbb{P}^*$ θα είναι:

$$\operatorname{supp}\mathbb{P}^* = \{\dots,-3,-2,-1,0\}.$$

2. Να βρεθεί η $\mathbb{P}^*$.

Εφόσον $\operatorname{supp}\mathbb{P}^* = \{\dots,-3,-2,-1,0\}$ τότε:

$$\mathbb{P}^*(\{x\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{|x|}}{|x|!}\quad,\ \forall\, x \in \operatorname{supp}\mathbb{P}^*$$

3. Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση (cdf) της $\mathbb{P}^*$.

Η αθροιστική συνάρτηση της $\mathbb{P}^*$ ορίζεται ως:

$$F_{X_1}(x) := \mathbb{P}^*((-\infty,x])\quad,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$$

<u>Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:</u>

- $x \geq 0$, $\quad F_{X_1}(x) = \mathbb{P}^*((-\infty,x]) = \mathbb{P}^*((-\infty,x]\cap \operatorname{supp}\mathbb{P}^*) =$
$= \mathbb{P}^*((-\infty,x]\cap\{\dots,-3,-2,-1,0\}) = \mathbb{P}^*(\operatorname{supp}\mathbb{P}^*) = 1$
- $-1 \leq x < 0$, $\quad F_{X_1}(x) = \mathbb{P}^*((-\infty,x]\cap \operatorname{supp}\mathbb{P}^*) = \mathbb{P}^*((-\infty,x]\cap\{\dots,-3,-2,-1,0\}) =$
$= \mathbb{P}^*(\operatorname{supp}\mathbb{P}^* - \{0\}) = \mathbb{P}^*(\operatorname{supp}\mathbb{P}^*) - \mathbb{P}^*(\{0\}) =$
$= 1 - \mathbb{P}^*(\{0\})$

  Note! Αν $A \supset B$ τότε $\mathbb{P}(A-B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$
- $-2 \leq x < -1$, $\quad F_{X_1}(x) = \mathbb{P}^*((-\infty,x]\cap \operatorname{supp}\mathbb{P}^*) =$
$= \mathbb{P}^*(\operatorname{supp}\mathbb{P}^* - \{0\} - \{-1\}) = 1 - \mathbb{P}^*(\{0\}) - \mathbb{P}^*(\{-1\})$

  ⋮ ⋮

Επομένως, η cdf της $\mathbb{P}^*$ είναι:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ 1 - \sum\limits_{i=0}^{\lfloor x\rfloor} \mathbb{P}^*(\{i\}) & , x<0,\ i\in\operatorname{supp}\mathbb{P}^* \end{cases}$$

όπου $\lfloor x \rfloor$: ο μεγαλύτερος ακέραιος μικρότερος ή ίσος του x

<u>π.χ.</u> $x = -2.75$ τότε $\lfloor x \rfloor = -3$

<u>Άσκηση 2</u> (Poisson από μεταφορά με τη χρήση άλλης τυχαίας μεταβλητής)
Έστω η κατανομή $\mathbb{P}$ με $supp\,\mathbb{P} = \{0,1,2,3 \dots\}$ και
$$\mathbb{P}(\{x\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad \forall\, x \in supp,\ \lambda > 0.$$
Έστω η τυχαία μεταβλητή:
$$X_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{όπου} \quad X_2(x) = x^2.$$

1. Να βρεθεί το στήριγμα της $\mathbb{P}^*$ από μεταφορά.

Υπογιάζόμαστε ότι το στήριγμα της $\mathbb{P}^*$ θα είναι το σύνολο $\{x^2\}$ για $\forall\, x \in supp\,\mathbb{P}$. Επομένως, υποθέτουμε ότι $supp\,\mathbb{P}^* = \{0, 1^2, 2^2, 3^2 \dots\}$ δηλαδή $supp\,\mathbb{P}^* = \{0,1,4,9,\dots\}$.
Υποθέτοντας το σύνολο $\{x^2\}$ σαν στήριγμα της $\mathbb{P}^*$, πρέπει να δείξουμε ότι η $\mathbb{P}^*$ από μεταφορά είναι καλώς ορισμένη διακριτή κατανομή και να αποδείξουμε ότι το συγκεκριμένο σύνολο $\{x^2\}$ είναι όντως στήριγμα της $\mathbb{P}^*$.
Για να είναι η $\mathbb{P}^*$ καλώς ορισμένη διακριτή κατανομή πρέπει:

α. Το στήριγμά της να είναι διακριτό.

β. $\forall\, x_i \in supp\,\mathbb{P}^*,\ \mathbb{P}^*(\{x_i\}) > 0$.

γ. $\mathbb{P}^*(supp) = 1$

α) Το στήριγμα της $\mathbb{P}^*$ που έχουμε υποθέσει είναι το σύνολο $\{0,1,4,9,\dots\}$ το οποίο είναι διακριτό σύνολο.

β) Από ορισμό κατανομής από μεταφορά γνωρίζουμε ότι:
$$\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)), \quad \forall\, A \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}$$

Επομένως, στην περίπτωση μας έχουμε:
$$\mathbb{P}^*(\{x^2\}) = \mathbb{P}(X_2^{-1}(\{x^2\}))$$

Επιπλέον, σύμφωνα με τον ορισμό της αντίστροφης εικόνας έχουμε:

$$X_2^{-1}(\{x^2\}) = \{x \in \mathbb{R} : X_2(x) = x^2\}$$

Για παράδειγμα υπολογίζουμε για $\forall\, x \in supp\,\mathbb{P}$:

$X_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad X_2^{-1}(0) = 0 \quad \rightsquigarrow$ δηλ. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 0\}$
$X_2(1) = 1^2 \quad \Rightarrow \quad X_2^{-1}(1^2) = \pm 1 \quad \rightsquigarrow \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}$
$X_2(2) = 2^2 \quad \Rightarrow \quad X_2^{-1}(2^2) = \pm 2 \quad \rightsquigarrow \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 4\}$
$X_2(3) = 3^2 \quad \Rightarrow \quad X_2^{-1}(3^2) = \pm 3 \quad \rightsquigarrow \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 9\}$
$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Παρατηρούμε ότι οι αντίστροφες εικόνες του συνόλου $\{0, 1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$ σχηματίζουν τα σύνολα $\{0, 1, 2, \dots\}$ και $\{\dots, -3, -2, -1, 0\}$.
Συνεπώς, από ορισμό αντίστροφης εικόνας παρατηρούμε ότι:

$$\mathbb{P}(X_2^{-1}(\{x^2\})) = \mathbb{P}(\{x\} \cup \{-x\})$$

άρα έχουμε:

$\{x\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $x \in supp\,\mathbb{P}$
$\{-x\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$

άρα αφού τα δύο σύνολα δεν είναι ξένα μεταξύ τους $(\{x\} \cap \{-x\} \neq \emptyset)$
τότε: $\mathbb{P}(\{x\} \cup \{-x\}) = \mathbb{P}(\{x\}) + \mathbb{P}(\{-x\}) - \mathbb{P}(\{x\} \cap \{-x\}) =$

$$= \mathbb{P}(\{0,1,2,3,\dots\}) + \mathbb{P}(\{\dots,-3,-2,-1,0\}) - \mathbb{P}(\{0,1,2,3,\dots\} \cap \{\dots,-3,-2,-1,0\}) =$$
$$= \mathbb{P}(\{0,1,2,3,\dots\}) + \mathbb{P}(\{\dots,-3,-2,-1,0\}) - \mathbb{P}(\{0\}) =$$
$$= \mathbb{P}(\{0,1,2,3,\dots\}) + \mathbb{P}(\{\dots,-3,-2,-1\} \cup \{0\}) - \mathbb{P}(\{0\}) \stackrel{*}{=}$$

*(αφού $\{\dots,-3,-2,-1\} \cap \{0\} = \emptyset$, λόγω προσθετικότητας της $\mathbb{P}$ ισχύει ότι
$\mathbb{P}(\{\dots,-3,-2,-1\} \cup \{0\}) = \mathbb{P}(\{\dots,-3,-2,-1\}) + \mathbb{P}(\{0\})$)

$$\stackrel{*}{=} \mathbb{P}(\{0,1,2,3,\dots\}) + \mathbb{P}(\{\dots,-3,-2,-1\}) + \mathbb{P}(\{0\}) - \mathbb{P}(\{0\})$$

άρα καταλήξαμε ότι:

$$\mathbb{P}(\{x\} \cup \{-x\}) = \mathbb{P}(\{0,1,2,3,\dots\}) + \mathbb{P}(\{\dots,-3,-2,-1\})$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι το στήριγμα της $\mathbb{P}$ είναι $\text{supp}\mathbb{P} = \{0,1,2,3,\dots\}$ και ως εκ τούτου, η $\mathbb{P}$ αποδίδει μοναδιαία πιθανότητα στο σύνολο $\{0,1,2,3,\dots\}$ άρα $\mathbb{P}(\{0,1,2,3,\dots\}) = \mathbb{P}(\text{supp}\mathbb{P}) = 1$

Επίσης, παρατηρούμε ότι τα στοιχεία του συνόλου $\{\dots,-3,-2,-1\}$ δεν ανήκουν στο στήριγμα της $\mathbb{P}$. Άρα,

$$x \notin \text{supp}\mathbb{P} \Rightarrow x \in \text{supp}' \Rightarrow \{x\} \subseteq \text{supp}' \overset{\mathbb{P}\text{ μονότονη}}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\{x\}) \leq \mathbb{P}(\text{supp}') \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\text{supp}') = 1 - \mathbb{P}(\text{supp}) \\ \Rightarrow \mathbb{P}(\text{supp}') = 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\{x\}) \leq 0$$

άρα αποδείξαμε ότι η $\mathbb{P}$ αποδίδει μηδενική πιθανότητα σε κάθε στοιχείο εκτός του στηρίγματός της.

άρα $\mathbb{P}(\{\dots,-3,-2,-1\}) = 0$.

Επομένως, απ' την παραπάνω διαδικασία καταλήγουμε ότι:

$$\mathbb{P}(X_2^{-1}(\{x^2\})) = \mathbb{P}(\{x\}) \quad \begin{pmatrix} \text{δηλαδή κρατάμε τις αντίστροφες} \\ \text{εικόνες με το θετικό πρόσημο} \end{pmatrix}$$

Άρα,

$$\underbrace{\mathbb{P}^*(\{x^2\}) = \mathbb{P}(X_2^{-1}(\{x^2\}))}_{\text{από ορισμό κατανομής από μεταφορά}} \underbrace{= \mathbb{P}(\{x\})}_{\text{από ορισμό αντίστροφης εικόνας}} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} > 0$$

Δείξαμε ότι η $\mathbb{P}^*$ αποδίδει αυστηρά θετική πιθανότητα σε κάθε σημείο του supp.

γ) Θέλουμε να δείξουμε ότι η κατανομή από μεταφορά $\mathbb{P}^*$ αποδίδει στο σύνολο $\{x^2\} = \{0,1,4,9,\dots\}$ μοναδιαία πιθανότητα. Αν ισχύει, τότε το σύνολο που έχουμε υποθέσει ως στήριγμα της $\mathbb{P}^*$ θα είναι όντως το $\text{supp}\mathbb{P}^*$ και η $\mathbb{P}^*$ θα είναι καλώς ορισμένη διακριτή κατανομή.

άρα

$$\underbrace{\mathbb{P}^*(\{0,1,4,9,\dots\}) = \mathbb{P}(X_2^{-1}(\{0,1^2,2^2,3^2,\dots\}))}_{\text{από ορισμό κατανομής από μεταφορά}} =$$

$$= \mathbb{P}(\underbrace{\{0,1,2,3,\dots\}}_{\text{supp}\mathbb{P}}) = \mathbb{P}(\text{supp}\mathbb{P}) = 1$$

Συνεπώς, αφού η κατανομή από μεταφορά $\mathbb{P}^*$ αποδίδει αυστηρά θετική πιθανότητα σε $\forall x \in \{0, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots\}$ και αποδίδει μοναδιαία πιθανότητα στο σύνολο αυτό, τότε το στήριγμα της κατανομής από μεταφορά $\mathbb{P}^*$ θα είναι:

$$\operatorname{supp}\mathbb{P}^* = \{0, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots\} = \{0, 1, 4, 9, \ldots\}$$

2. Να βρεθεί η $\mathbb{P}^*$.

$$\mathbb{P}^*(\{x\}) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}!}, \quad \forall x \in \operatorname{supp}\mathbb{P}^*$$

Επομένως, οι πιθανότητες που αποδίδει η κατανομή από μεταφορά $\mathbb{P}^*$ για $x \in \{0, 1, 4, 9, \ldots\}$ είναι:

για $x=0$, $\quad \mathbb{P}^*(\{0\}) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^{\sqrt{0}}}{\sqrt{0}!} = e^{-\lambda}$

για $x=1$, $\quad \mathbb{P}^*(\{1\}) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^{\sqrt{1}}}{\sqrt{1}!} = \lambda e^{-\lambda}$

για $x=4$, $\quad \mathbb{P}^*(\{4\}) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^{\sqrt{4}}}{\sqrt{4}!} = e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^2}{2!} = \dfrac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

3. Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση (cdf) της $\mathbb{P}^*$.

$$F_{X_2}(x) := \mathbb{P}^*((-\infty, x]), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

όπου

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*((-\infty, x]) &= \mathbb{P}^*((-\infty, x] \cap \operatorname{supp}\mathbb{P}^*) = \\ &= \mathbb{P}^*((-\infty, x] \cap \{0, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots\}) = \\ &= \mathbb{P}^*((-\infty, x] \cap \{0, 1, 4, 9, \ldots\})\end{aligned}$$

<u>παίρνουμε περιπτώσεις</u>

- $x<0$, τότε $(-\infty,x] \cap \{0,1,4,9,\dots\} = \emptyset$

  <u>άρα</u> $F_{X_2}(x) = \mathbb{P}^*((-\infty,x] \cap \{0,1,4,9\dots\}) = \mathbb{P}^*(\emptyset) = 0$

- $0 \le x < 1$, τότε $(-\infty,x] \cap \{0,1,4,9,\dots\} = \{0\}$

  <u>άρα</u> $F_{X_2}(x) = \mathbb{P}^*((-\infty,x] \cap \{0,1,4,9,\dots\}) = \mathbb{P}^*(\{0\})$

- $1 \le x < 4$, τότε $(-\infty,x] \cap \{0,1,4,9,\dots\} = \{0,1\}$

  <u>άρα</u> $F_{X_2}(x) = \mathbb{P}^*((-\infty,x] \cap \{0,1,4,9\dots\}) = \mathbb{P}^*(\{0,1\}) =$

  $= \mathbb{P}^*(\{0\} \cup \{1\}) \overset{\text{προσθ}}{=} \mathbb{P}^*(\{0\}) + \mathbb{P}^*(\{1\})$

- $4 \le x < 9$, τότε $(-\infty,x] \cap \{0,1,4,9,\dots\} = \{0,1,4\}$

  <u>άρα</u> $F_{X_2}(x) = \mathbb{P}^*((-\infty,x] \cap \{0,1,4,9\dots\}) = \mathbb{P}^*(\{0,1,4\}) =$

  $= \mathbb{P}^*(\{0\}) + \mathbb{P}^*(\{1\}) + \mathbb{P}^*(\{4\})$

- $9 \le x < 16$ . . . .

  ⋮ ⋮

<u>άρα</u> η αθροιστική συνάρτηση (cdf) της $\mathbb{P}^*$ είναι:

$$F_{X_2}(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}^*(\{i\}) & , x \ge 0 \ , i \in supp\,\mathbb{P}^* \end{cases}$$

όπου $\lfloor x \rfloor$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος μικρότερος ή ίσος του x.

<u>π.χ.</u> αν $x = 5.9$ τότε $\lfloor x \rfloor = 5$

Υπολογισμός Πιθανοτήτων με την αθροιστική συνάρτηση (cdf)

Μεθοδολογία

1. Δίνεται η αθροιστική συνάρτηση F (ακόμα κι χωρίς το supp).
2. Εξετάζεται το αν η F είναι καλώς ορισμένη δηλαδή αν ικανοποιεί τις τρεις ιδιότητες (α, β, γ) του θεωρήματος χαρακτηρισμού: α) η F αύξουσα

   β) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

   $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

   γ) F από δεξιά συνεχής

3. Εφόσον η F είναι καλώς ορισμένη, το θεώρημα χαρακτηρισμού συνεπάγεται ότι η F αναπαριστά μοναδική κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}$.
4. Εφόσον η F αναπαριστά την $\mathbb{P}$, μπορούμε, μέσω της F, να βρούμε ιδιότητες της $\mathbb{P}$ και επίσης, μέσω της F, μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες που αποδίδει η $\mathbb{P}$.

Υπενθύμιση!!

Θεώρημα Χαρακτηρισμού

Αν η $\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η αθροιστική συνάρτηση της $\mathbb{P}$, τότε η F ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

α) Αύξουσα

β) $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1\end{array}\right\}$ (ασυμπτωτικές ιδιότητες)

γ) Από δεξιά συνεχής.

- Αντίστροφα, αν η $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις α, β, γ, τότε υπάρχει μοναδική κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}$ στο $\mathbb{R}$ της οποίας η F είναι αθροιστική.

Όπως αναφέραμε παραπάνω, μέσω της F, μπορούμε να υπολογίσουμε πιθανότητες που αποδίδει η $\mathbb{P}$.

Εξ' ορισμού γνωρίζουμε ότι:

$$F(x) = \mathbb{P}((-\infty, x]) \quad , \quad \mathbb{P}((-\infty, x)) = \lim_{y \to x^-} F(y)$$

Συνεπώς, η πιθανότητα σημείου x διακριτής κατανομής ορίζεται ως:

$$\mathbb{P}(\{x\}) = F(x) - \lim_{y \to x^-} F(y)$$

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, υπολογίζουμε τις πιθανότητες που αποδίδονται στα παρακάτω διαστήματα, μέσω της αθροιστικής συνάρτησης F.

- Έστω $A = (\alpha, \beta]$ $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((\alpha, \beta]) = F(\beta) - F(a)$

<u>πως σκέφτομαι:</u>

$$(\alpha, \beta] = (-\infty, \beta] - (-\infty, a]$$

$\alpha < x \leq \beta$ $\quad$ $x \leq \beta$ $\;-\;$ $x \leq a$

<u>άρα</u> $\mathbb{P}((\alpha, \beta]) = \mathbb{P}((-\infty, \beta] - (-\infty, a])$

όμως αφού $\alpha < \beta$, έχουμε ότι $(-\infty, \beta] \supset (-\infty, a]$ και ξέρουμε ότι η $\mathbb{P}$ μετατρέπει την συνολοθεωρητική διαφορά $(-\infty, \beta] - (-\infty, a]$ σε πραγματική αφαίρεση <u>άρα</u> αφού $(-\infty, \beta] \supset (-\infty, a]$ τότε $\mathbb{P}((-\infty, \beta] - (-\infty, a]) = \mathbb{P}((-\infty, \beta]) - \mathbb{P}((-\infty, a])$

<u>άρα</u> συνοπτικά: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((\alpha, \beta]) = \mathbb{P}((-\infty, \beta] - (-\infty, a]) =$

$$= \mathbb{P}((-\infty, \beta]) - \mathbb{P}((-\infty, a]) = F(\beta) - F(a)$$

- Έστω $A=[\alpha,\beta)$, $a<\beta$, $a,\beta\in\mathbb{R}$ τότε
$$\rightsquigarrow \mathbb{P}(A)=\mathbb{P}([\alpha,\beta))=\lim_{x\to\beta^-}F(x)-\lim_{x\to a^-}F(x)$$

πως σκέφτομαι: $[\alpha,\beta)=(-\infty,\beta)-(-\infty,a)$ και
$(-\infty,\beta)\supset(-\infty,a)$ αφού $\beta>a$

άρα $\mathbb{P}([\alpha,\beta))=\mathbb{P}((-\infty,\beta)-(-\infty,a))=\mathbb{P}((-\infty,\beta))-\mathbb{P}((-\infty,a))=$
$$=\lim_{x\to\beta^-}F(x)-\lim_{x\to a^-}F(x)$$

- Έστω $A=[\alpha,\beta]$, $a<\beta$, $a,\beta\in\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow \mathbb{P}(A)=\mathbb{P}([\alpha,\beta])=F(\beta)-\lim_{x\to a^-}F(x)$

πώς σκέφτομαι:
$[\alpha,\beta]=(-\infty,\beta]-(-\infty,a)$ όπου $(-\infty,\beta]\supset(-\infty,a)$ αφού $\alpha<\beta$

άρα
$$\mathbb{P}([\alpha,\beta])=\mathbb{P}((-\infty,\beta]-(-\infty,a))=\mathbb{P}((-\infty,\beta])-\mathbb{P}((-\infty,a))=$$
$$=F(\beta)-\lim_{x\to a^-}F(x)$$

- Έστω $A=(\alpha,+\infty)$ όπου $A'=(-\infty,a]$ άρα
$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}((a,+\infty))=1-\mathbb{P}((-\infty,a])=1-F(a)$$

- Έστω $A=[\alpha,+\infty)$ όπου $A'=(-\infty,a)$ άρα
$$\mathbb{P}([\alpha,+\infty))=1-\mathbb{P}((-\infty,a))=1-\lim_{x\to a^-}F(x)$$

- Έστω $A=\{a,\beta\}$ $\rightsquigarrow \mathbb{P}(\{a,\beta\})=\mathbb{P}(\{a\})+\mathbb{P}(\{\beta\})=$
$$=F(\alpha)-\lim_{x\to a^-}F(x)+F(\beta)-\lim_{x\to\beta^-}F(x)$$

Άσκηση

Έστω μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R},\Sigma_{\mathbb{R}})$. Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση (cdf) για την κατανομή Poisson (λ).

Δίνονται: $supp\,\mathbb{P}=\{0,1,2,3,\dots\}$

$$\mathbb{P}(\{x\})=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\ ,\ \forall x\in supp\,\mathbb{P}\ ,\ \lambda>0$$

Λύση

Η αθροιστική συνάρτηση της κατανομής Poisson είναι:

$$F(x) := \mathbb{P}((-\infty, x]) = \mathbb{P}((-\infty, x] \cap \operatorname{supp}\mathbb{P}) = \mathbb{P}((-\infty, x] \cap \{0,1,2,3,\dots\})$$

Περιπτώσεις:

- αν $x<0$: $F(x) = \mathbb{P}((-\infty,x]) = \mathbb{P}((-\infty,x] \cap \operatorname{supp}\mathbb{P}) =$
$$= \mathbb{P}((-\infty,x] \cap \{0,1,2,3,\dots\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

- αν $0 \le x < 1$: $F(x) = \mathbb{P}((-\infty,x]) = \mathbb{P}((-\infty,x] \cap \operatorname{supp}\mathbb{P}) =$
$$= \mathbb{P}((-\infty,x] \cap \{0,1,2,3,\dots\}) = \mathbb{P}(\{0\}) = e^{-\lambda}$$

- αν $1 \le x < 2$: $F(x) = \mathbb{P}((-\infty,x]) = \mathbb{P}((-\infty,x] \cap \operatorname{supp}\mathbb{P}) =$
$$= \mathbb{P}((-\infty,x] \cap \{0,1,2,3,\dots\}) =$$
$$= \mathbb{P}(\{0,1\}) = \mathbb{P}(\{0\}) + \mathbb{P}(\{1\}) =$$
$$= e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = e^{-\lambda}(1+\lambda)$$

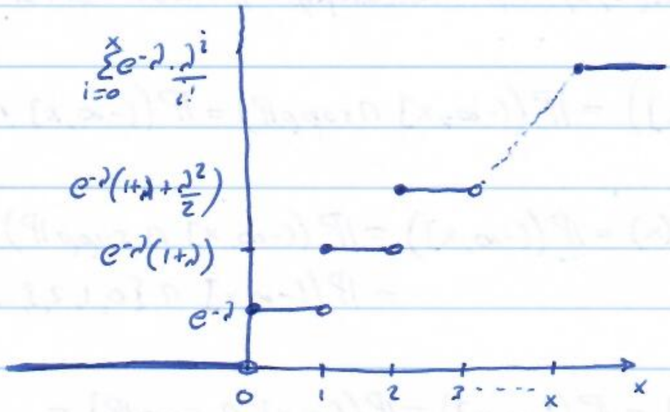
- αν $2 \le x < 3$: $F(x) = \mathbb{P}((-\infty,x]) = \mathbb{P}((-\infty,x] \cap \operatorname{supp}\mathbb{P}) =$
$$= \mathbb{P}((-\infty,x] \cap \{0,1,2,3,\dots\}) =$$
$$= \mathbb{P}(\{0,1,2\}) = \mathbb{P}(\{0\}) + \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) =$$
$$= e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} =$$
$$= e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right)$$

⋮

άρα γενικεύοντας, παίρνουμε ότι η cdf της Poisson είναι:

$$F(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset) & , x<0 \\ \sum_{i=0}^{x} \mathbb{P}(\{i\}) & , x \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda^i}{i!} & , x \ge 0,\ i \in \operatorname{supp}\mathbb{P} \end{cases}$$

Γράφημα Αθροιστικής συνάρτησης της Poisson(λ)



Η cdf της Poisson είναι σταθερή κατά τμήματα κ' έχει βηματικές ασυνέχειες

<u>Υπολογισμός πιθανοτήτων μέσω της F</u>

<u>π.χ.</u> $$\mathbb{P}(\{0\}) = F(0) - \lim_{x\to 0^-} F(x) = e^{-\lambda} - 0 = e^{-\lambda}$$

$$\mathbb{P}(\{2\}) = F(2) - \lim_{x\to 2^-} F(x) = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} - \lim_{x\to 2^-} e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{x}\frac{\lambda^i}{i!} =$$

$$= e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^2}{2}$$

<u>Επιβεβαίωση ιδιοτήτων της F</u>

Η αθροιστική συνάρτηση F για να είναι καλώς ορισμένη αθροιστική συνάρτηση μοναδικής κατανομής πιθανότητας πρέπει να ικανοποιεί τις ιδιότητες του θεωρήματος χαρακτηρισμού. Επομένως, αποδεικνύουμε ότι η F ικανοποιεί τα α, β, γ του θεωρήματος χαρακτηρισμού και συνεπώς, είναι καλώς ορισμένη αθροιστική συνάρτηση της Poisson(λ).

(α) Για να είναι η F αύξουσα πρέπει να ισχύει:

αν $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

Έστω $x_1 < x_2$, παίρνουμε περιπτώσεις:

- αν $x_1 < x_2 < 0$, τότε $F(x_1) = F(x_2) = 0$
- αν $x_1 < 0 \leq x_2$, τότε $F(x_1) = 0 < F(x_2) = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{x_2}\frac{\lambda^i}{i!} > 0$ αφού $\lambda > 0$
  <u>άρα</u> $F(x_1) < F(x_2)$
- αν $0 < x_1 < x_2$, τότε $F(x_1) < F(x_2) \Rightarrow e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{x_1}\frac{\lambda^i}{i!} < e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{x_2}\frac{\lambda^i}{i!}$, αφού $\lambda > 0$ και $x_2 > x_1$

<u>άρα</u> η $F(x)$ είναι αύξουσα (μη-φθίνουσα).

Β) $\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0$, $\forall x<0$

$\lim_{x\to +\infty} F(x) = 1$ γιατί $\lim_{x\to +\infty} F(x) = \lim_{x\to +\infty} \left\{ e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda^i}{i!} \right\} =$

$= e^{-\lambda} \lim_{x\to +\infty} \sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^0 = 1$

(Α) Ανάπτυγμα Mclaurin της e^x:
$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

και θέτω $\boxed{x=\lambda}$ άρα $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{\lambda}$

Γ) Για να είναι η F από δεξιά συνεχής πρέπει να ισχύει
$F(0) = \lim_{x\to 0^+} F(x)$

άρα $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} \left\{ e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda^i}{i!} \right\} = e^{-\lambda} \lim_{x\to 0^+} \sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$

$F(0) = e^{-\lambda}$

άρα $F(0) = \lim_{x\to 0^+} F(x)$

άρα η F από δεξιά συνεχής.