Φροντιστήριο 3

- Έστω δύο σύνολα X, Y και ένας κανόνας f ο οποίος σε κάθε στοιχείο $x \in X$ αντιστοιχεί ένα μοναδικό στοιχείο $y = f(x) \in Y$. Ο κανόνας f ονομάζεται συνάρτηση (ή απεικόνιση ή μετασχηματισμός) από το X στο Y. Συμβολίζεται ως $f: X \to Y$, όπου X: πεδίο ορισμού
  Y: πεδίο τιμών

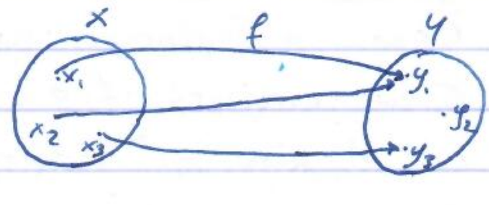
- Το σύνολο $R(f) = \{ y \in Y : y = f(x), x \in X \}$ ονομάζεται σύνολο τιμών της f. Ισχύει ότι $R(f) \subseteq Y$.

- Για $x \in X$, το στοιχείο $y = f(x) \in Y$ ονομάζεται εικόνα (image) του x μέσω της συνάρτησης f ή αλλιώς, τιμή της f στο x. Επίσης, το $x \in X$ ονομάζεται προ-εικόνα ή αντίστροφη εικόνα του y.

παράδειγμα

Έστω $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ και $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$.
Έστω συνάρτηση $f: X \to Y$ που ορίζεται ως εξής:

$f(x_1) = f(x_2) = y_1$
$f(x_3) = y_3$



Το σύνολο τιμών $R(f) = \{y_1, y_3\} \subset Y$
Οι προ-εικόνες του y_1 είναι τα στοιχεία $x_1, x_2 \in X$ (πεδίο ορισμού).
Το σύνολο των προ-εικόνων (αντίστροφων εικόνων) του y_1 ορίζεται ως:

$f^{-1}(y_1) = \{x_1, x_2\} \subset X$

Αντίστοιχα,

$f^{-1}(y_2) = \emptyset$
$f^{-1}(y_3) = \{x_3\}$

<u>Ορισμός εικόνας & προ-εικόνας</u>

Έστω η συνάρτηση $f: X \to Y$ και $A \subseteq X$ και $B \subseteq Y$.

- Ορίζουμε ως εικόνα του συνόλου A, κάτω από την f, το υποσύνολο $f(A)$ του πεδίου τιμών Y, δηλαδή, $f(A) \subseteq Y$, που ορίζεται ως εξής:

$$f(A) = \{y \in Y : y = f(x),\ x \in X\}$$

Προφανώς, $f(A) \subseteq Y$ (πεδίο τιμών)

- Αντίστοιχα, ορίζουμε ως προ-εικόνα του συνόλου B, κάτω από την f, το υποσύνολο $f^{-1}(B)$ του πεδίου ορισμού X, δηλαδή, $f^{-1}(B) \subseteq X$, που ορίζεται ως εξής:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

Προφανώς, $f^{-1}(B) \subseteq X$ (πεδίο ορισμού)

- Σε όρους θεωρίας πιθανοτήτων, ο αντίστοιχος ορισμός της προ-εικόνας ή αντίστροφης εικόνας είναι ο ακόλουθος.

- $\boxed{\text{Ορισμός}}$: <u>Αντίστροφη εικόνα</u>

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega \neq \emptyset$ και ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}$. Έστω συνάρτηση $f: \Omega \to \mathbb{R}$. Τότε ορίζεται η αντίστροφη εικόνα του A, μέσω της συνάρτησης f, ως το σύνολο των στοιχείων του Ω τα οποία απεικονίζονται μέσω της f στο A. Δηλαδή,

$$f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A\}$$

Παραδείγματα

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(\omega) = \omega^2$.
Άρα, η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω ένα σύνολο $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$.

- Όταν $A = \{0\}$, η αντίστροφη εικόνα του A, μέσω της f, είναι:

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(\{0\}) = \{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) = 0\} = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega^2 = 0\} = \{0\}$$

- Όταν $A = \{1\}$: $f^{-1}(A) = f^{-1}(\{1\}) = \{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) = 1\} = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega^2 = 1\} = \{-1, 1\}$

- Όταν $A = [1, 4]$: $f^{-1}(A) = f^{-1}([1,4]) = \{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) \in [1,4]\} =$
$= \{\omega \in \mathbb{R} : \omega^2 \in [1,4]\} = \{\omega \in \mathbb{R} : 1 \leq \omega^2 \leq 4\} =$
$= [-2, -1] \cup [1, 2]$

- Όταν $A = (-\infty, 0)$: $f^{-1}(A) = f^{-1}((-\infty, 0)) = \{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) \in (-\infty, 0)\} =$
$= \{\omega \in \mathbb{R} : \omega^2 \in (-\infty, 0)\} = \emptyset$ διότι $\omega^2 \geq 0$ πάντα

- Όταν $A = \mathbb{R}$: $f^{-1}(A) = f^{-1}(\mathbb{R}) = \{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) \in \mathbb{R}\} =$
$= \{\omega \in \mathbb{R} : \omega^2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

- Όταν $A = \emptyset$: $f^{-1}(A) = f^{-1}(\emptyset) = \{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) \in \emptyset\} = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega^2 \in \emptyset\} = \emptyset$

Τυχαίες Μεταβλητές (Random Variables)

Η Θεωρία Πιθανοτήτων ασχολείται με τη μελέτη φαινομένων που υπόκεινται σε αβεβαιότητα και προσπαθεί να ποσοτικοποιήσει την αβεβαιότητα σχετικά με ένα τυχαίο πείραμα. Για παράδειγμα, το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού ή η μεταβολή της τιμής μιας μετοχής δεν μπορούν να προβλεφθούν με βεβαιότητα. Τέτοιες μεταβλητές ονομάζονται τυχαίες ή στοχαστικές.

· Μία τυχαία μεταβλητή X ορίζεται σε κάποιο δειγματικό χώρο Ω.

Για παράδειγμα, στην περίπτωση του ζαριού έχουμε $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ και στην περίπτωση της μετοχής μπορεί να έχουμε για παράδειγμα $\Omega=[-0.10, 0.10]$. Σε κάθε στοιχείο του δειγματικού χώρου Ω αντιστοιχούμε μία πιθανότητα p_i και συμβολίζουμε $p_i = \mathbb{P}(X=x_i)$, όπου p_i είναι η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να λάβει την τιμή x_i.

Επομένως, η τυχαία μεταβλητή είναι μία πραγματική συνάρτηση η οποία δημιουργεί αντιστοιχία μεταξύ των μετρήσιμων υποσυνόλων του Ω και των πραγματικών αριθμών.

Πρόκειται για μία έννοια ιδιαίτερα χρήσιμη γιατί μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή κατανομών πιθανότητας στους πραγματικούς.

▸ $\boxed{\text{Ορισμός}}$: Τυχαία Μεταβλητή

Έστω οι μετρήσιμοι χώροι (Ω, Σ_Ω) και $(\mathbb{R}, \Sigma_\mathbb{R})$.
Τυχαία μεταβλητή θα ονομάζεται όποια συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:
Αν $A \in \Sigma_\mathbb{R}$, τότε η αντίστροφη εικόνα του (ή προ-εικόνα), μέσω της $X(\cdot)$, η $X^{-1}(A)$ πρέπει να ανήκει στο Σ_Ω, δηλαδή $X^{-1}(A) \in \Sigma_\Omega$.

- Δηλαδή, οτιδήποτε μπορεί να μετρηθεί στο $\mathbb{R}$ έχει προϋπάρξει ως εικόνα, μέσω της τυχαίας μεταβλητής X από κάτι που μπορεί να μετρηθεί στο δειγματικό χώρο Ω.

- Ουσιαστικά, η τυχαία μεταβλητή μετασχηματίζει ένα μετρήσιμο χώρο σε έναν άλλο μετρήσιμο χώρο και μας επιτρέπει να ορίσουμε νέες πιθανότητες.

<u>Παραδείγματα</u>

1. Έστω $\Omega = \{\alpha, b\}$, $\Sigma_\Omega = 2^\Omega = \{\phi, \{\alpha\}, \{b\}, \Omega\}$
 και συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$, όπου $X(\alpha) = 0$ και
 $X(b) = 1$

Για να ελέγξουμε αν η παραπάνω συνάρτηση X που μας δίνεται είναι τυχαία μεταβλητή, πρέπει να εφαρμόσουμε τον ορισμό της τυχαίας μεταβλητής και να ελέγξουμε αν η συνάρτηση X ικανοποιεί την απαιτούμενη συνθήκη για να είναι τυχαία μεταβλητή.

$$\text{Αν } A \in \Sigma_{\mathbb{R}} \text{ τότε } X^{-1}(A) = \begin{cases} \phi & , \text{αν } 0, 1 \notin A \\ \{\alpha\} & , \text{αν } 0 \in A, 1 \notin A \\ \{b\} & , \text{αν } 0 \notin A, 1 \in A \\ \Omega & , \text{αν } 0, 1 \in A \end{cases}$$

όπου $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$

Συνεπώς, αφού $\phi, \{\alpha\}, \{b\}, \Omega \in \Sigma_\Omega$ τότε η X είναι τυχαία μεταβλητή.

<u>Γιατί;</u> Επειδή όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε για $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, η αντίστροφη εικόνα του, μέσω της συνάρτησης $X(\cdot)$ που ορίσαμε, ανήκει στη συλλογή μετρήσιμων υποσυνόλων του δειγματικού χώρου Ω, δηλαδή $X^{-1}(A) \in \Sigma_\Omega$. Επομένως, η πραγματική συνάρτηση που ορίσαμε ικανοποιεί τη συνθήκη που απαιτείται από τον ορισμό, ώστε η συνάρτηση X να είναι τυχαία μεταβλητή.

2. $\Omega = \{K\}$, $\Sigma_\Omega = \{\emptyset, \Omega\}$
και τυχαία μεταβλητή $X: \Omega \to \mathbb{R}$ όπου $X(K) = c$

Αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε $X^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & , c \notin A \\ \Omega & , c \in A \end{cases}$

Έστω $c=6$. Θα βρεθεί η $X^{-1}(A), X^{-1}(B), X^{-1}(\Gamma), X^{-1}(\Delta)$.

για $A = (-4,-2) \cup (0,3) \Rightarrow X^{-1}(A) = \emptyset$, $6 \notin A$

$B = (4,5) \cap \{6\} \Rightarrow X^{-1}(B) = \emptyset$, $6 \notin B$

$\Gamma = (0,6] \Rightarrow X^{-1}(\Gamma) = \Omega$, $6 \in \Gamma$

$\Delta = (4,5) \cup \{6\} \Rightarrow X^{-1}(\Delta) = \Omega$, $6 \in \Delta$

<u>Παρατηρήσεις.</u>

1. Ο παραπάνω ορισμός θέτει στη συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}$ την απαίτηση ότι η αντίστροφη εικόνα $X^{-1}(A)$, για $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, να ανήκει στο Σ_Ω (δηλαδή μία συλλογή μετρήσιμων υποσυνόλων του Ω), προκειμένου να ονομάσουμε την X τυχαία μεταβλητή. Αυτή η συνθήκη έχει πραγματική ισχύ μόνο στην περίπτωση κατά την οποία ο χώρος ενδεχομένων (Σ_Ω) δεν ταυτίζεται με το δυναμοσύνολο του δειγματικού χώρου 2^Ω. Όταν ο δειγματικός χώρος Ω είναι πεπερασμένος, οπότε το Σ_Ω μπορεί να επιλεγεί ώστε να εμπεριέχει όλα τα υποσύνολα του Ω, δηλαδή ο χώρος ενδεχομένων να είναι το δυναμοσύνολο του Ω, τότε κάθε συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή, γιατί για οποιαδήποτε συνάρτηση X, όλες οι προ-εικόνες $X^{-1}(A)$ θα είναι υποχρεωτικά μέλη του δυναμοσυνόλου του Ω, δηλαδή $X^{-1}(A)$ θα ανήκει στο $\Sigma_\Omega = 2^\Omega$.

2. Η προ-εικόνα $X^{-1}(A)$, όπου $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, απεικονίζει σύνολα του πεδίου τιμών ($\mathbb{R}$) σε υποσύνολα του δειγματικού χώρου (Σ_Ω).

3. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι κάθε συνεχής και παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή. Άρα, οι "οιωσίες" συναρτήσεις που έχουμε συναντήσει είναι τυχαίες μεταβλητές.

Κατανομές από μεταφορά

- Μέσω των τυχαίων μεταβλητών, είναι δυνατή η μεταφορά των κατανομών $\mathbb{P}$ από αυθαίρετους χώρους στην πραγματική ευθεία, η οποία έχει πλούσια μαθηματική δομή. Ουσιαστικά, οι τυχαίες μεταβλητές μεταφέρουν τις κατανομές πιθανότητας στους πραγματικούς.

- Αν θέλουμε να προσάγουμε πιθανότητα σένα μετρήσιμο υποσύνολο των πραγματικών ($A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$), βρίσκουμε την αντίστροφη εικόνα αυτού μέσω της τυχαίας μεταβλητής X (δηλαδή $X^{-1}(A)$) και αποδίδουμε σε αυτή πιθανότητα μέσω της κατανομής πιθανότητας $\mathbb{P}$ που υπάρχει ήδη στον δειγματικό χώρο.

- $\boxed{\text{Ορισμός}}$: Κατανομή από μεταφορά
Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$, ο μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}})$ και η τυχαία μεταβλητή X. Το ζεύγος $\mathbb{P}, X$ προσδιορίζει μονοσήμαντα κατανομή στο $\mathbb{R}$, έστω $\mathbb{P}^*$ που ορίζεται ως εξής:
Αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε $\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$.

Παρατηρήσεις

1. Η $\mathbb{P}^*$ είναι καλώς ορισμένη κατανομή στο $\mathbb{R}$ εξαιτίας του ότι η $\mathbb{P}$ είναι καλώς ορισμένη κατανομή στο Ω. Ονομάζεται κατανομή από μεταφορά της $\mathbb{P}$ στο $\mathbb{R}$, μέσω της τυχαίας μεταβλητής X.

2. Συνήθως, η $\mathbb{P}^*$ ονομάζεται ως η κατανομή που ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή X ($X \sim \mathbb{P}^*$), αγνοώντας την υφιστάμενη $\mathbb{P}$.

3. Εφόσον μπορούμε να μεταφέρουμε κατανομές στους πραγματικούς μέσω τυχαίων μεταβλητών, μπορούμε καταρχάς να μελετάμε κατανομές πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ όπου υπάρχει πλούσια μαθηματική δομή.

<u>Παράδειγμα</u>

Να βρεθεί η κατανομή από μεταφορά $\mathbb{P}^*$ όταν: $\Omega = \{K, \Gamma\}$, $\mathbb{P}(\{K\}) = \frac{1}{3}$ και συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}$ όπου $X(K) = 3$, $X(\Gamma) = 4$.

<u>Βήμα 1</u>: Βρίσκουμε Σ_Ω, $\mathbb{P}(\{\Gamma\})$

Επειδή ο δειγματικός μας χώρος Ω είναι πεπερασμένος, η συλλογή μετρήσιμων υποσυνόλων του Ω (Σ_Ω) είναι το δυναμοσύνολό του (2^Ω).

<u>άρα</u> $\Sigma_\Omega = \{\emptyset, \{K\}, \{\Gamma\}, \Omega\} = 2^\Omega$

Γνωρίζουμε ότι η $\mathbb{P}$ είναι καλώς ορισμένη κατανομή πιθανότητας επί του δειγματικού χώρου Ω, άρα η $\mathbb{P}$ ικανοποιεί και τις 3 ιδιότητες που απαιτούνται από τον ορισμό, για να είναι καλώς ορισμένη κατανομή πιθανότητας.

Συνεπώς, θα εκμεταλλευτούμε αυτές τις ιδιότητες για να υπολογίσουμε την πιθανότητα $\mathbb{P}(\{\Gamma\})$.

<u>Άρα</u>,

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\{K, \Gamma\}) = \mathbb{P}(\{K\} \cup \{\Gamma\}) \overset{\text{ιδιότητα προσθετικότητας}}{=} \mathbb{P}(\{K\}) + \mathbb{P}(\{\Gamma\}) \underset{\text{ιδιότητα τυποποίησης}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \mathbb{P}(\{K\}) + \mathbb{P}(\{\Gamma\}) \Rightarrow 1 = \frac{1}{3} + \mathbb{P}(\{\Gamma\}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\{\Gamma\}) = \frac{2}{3}$$

<u>Βήμα 2</u>: Υπολογίζουμε τις αντίστροφες εικόνες

Αν $A \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}$, τότε η αντίστροφη εικόνα του A δίνεται ως εξής:

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$$

<u>άρα</u>

$$X^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & , \text{αν } 3,4 \notin A \\ \{K\} & , \text{αν } 3 \in A,\ 4 \notin A \\ \{\Gamma\} & , \text{αν } 3 \notin A,\ 4 \in A \\ \Omega & , \text{αν } 3,4 \in A \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $X^{-1}(A) \in \mathcal{E}_{\Omega}$ αφού $\emptyset, \{K\}, \{\Gamma\}, \Omega \in \mathcal{E}_{\Omega}$ άρα η X είναι τυχαία μεταβλητή.

<u>Βήμα 3</u>: Υπολογίζουμε την $\mathbb{P}^*(A)$

όπου $\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$, για $\forall A \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}$

<u>άρα</u>

$$\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset) = 0 & , \text{αν } 3,4 \notin A \\ \mathbb{P}(\{K\}) = \frac{1}{3} & , \text{αν } 3 \in A,\ 4 \notin A \\ \mathbb{P}(\{\Gamma\}) = \frac{2}{3} & , \text{αν } 3 \notin A,\ 4 \in A \\ \mathbb{P}(\Omega) = 1 & , \text{αν } 3,4 \in A \end{cases}$$