Στατιστική II

Διδάσκων: Αρβανίτης Σ.
Βοηθός Διδασκαλίας: Ψαράκης Ν. ①

Φροντιστήρια 1 & 2

· Κύριο αντικείμενο της Θεωρίας Πιθανοτήτων είναι η μελέτη τυχαίων φαινομένων δηλαδή πειραμάτων τύχης → ονομάζονται έτσι γιατί σε μία εκτέλεση του πειράματος δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα που θα εμφανιστεί. Όμως, μπορούμε να καταγράψουμε τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος.

Κάποια παραδείγματα πειραμάτων τύχης είναι τα εξής:

1. ρίψη ενός ζαριού → δεν ξέρουμε ακριβώς ποιο από τα 6 δυνατά αποτελέσματα θα εμφανιστεί

2. όταν αγοράζουμε κάποια συσκευή → δεν γνωρίζουμε ποιος θα είναι ακριβώς ο χρόνος ζωής της

· Η Θεωρία Πιθανοτήτων χρησιμοποιεί έννοιες από τη Θεωρία Συνόλων

Θεωρία Συνόλων (Set theory)

▸ $\boxed{\text{Ορισμός}}$: Σύνολο (set) : Ως σύνολο ορίζεται μία συλλογή από στοιχεία.

Ο Κάθε σύνολο το αντιμετωπίζουμε ως μία ενιαία και αυτοδύναμη οντότητα διαφορετική από τις επιμέρους οντότητες (στοιχεία) που το συνθέτουν.

π.χ. ένα σύνολο $B = \{p, 6, z\}$ μπορεί να συμπεριληφθεί ως στοιχείο σε κάποιο άλλο σύνολο, για παράδειγμα $C = \{B, s\}$

▸ $\boxed{\text{Ορισμός}}$: Ένα σύνολο που δεν περιέχει στοιχεία ονομάζεται κενό σύνολο (empty set) και συμβολίζεται με ϕ ή $\{\}$.

Παραδείγματα Συνόλων

1) Το σύνολο $A = \{$Κυριακή, Δευτέρα, Τρίτη, ..., Σάββατο$\}$
ή εναλλακτικά (με τη χρήση διαφορετικού τρόπου περιγραφής των συνόλων)
$A = \{x \mid x$ είναι οι μέρες της εβδομάδας$\}$

2) Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ή
εναλλακτικά $\mathbb{N} = \{a \mid \alpha$, είναι φυσικός αριθμός$\}$

3) Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών,
$$\mathbb{Q} = \left\{ z = \frac{\alpha}{\beta} \;\middle|\; \alpha \text{, είναι ακέραιος και } \beta \text{ μη-μηδενικός ακέραιος} \right\}$$

4) Το σύνολο των πραγματικών αριθμών που βρίσκονται μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών a και b, το οποίο δεν περιλαμβάνει τους α και b, άρα $(\alpha, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ και $a < x < b,\ a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b\}$

παράδειγμα 1 → πεπερασμένο πλήθος στοιχείων
παράδειγμα 2, 3, 4 → άπειρο πλήθος στοιχείων

(*) Πάντα ισχύει: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

· Μπορεί να γίνει μία περαιτέρω διάκριση ως προς τα σύνολα με άπειρο πλήθος στοιχείων. Για παράδειγμα, το σύνολο $\mathbb{N}$ και το σύνολο $\mathbb{R}$ έχουν και τα δύο άπειρα στοιχεία. Ωστόσο, το $\mathbb{R}$ υπό κάποια έννοια έχει "περισσότερα" στοιχεία από το $\mathbb{N}$. (περισσότερα παρακάτω)

▶ Ορισμός : Ισότητα Συνόλων
Δύο σύνολα A, B θα λέγονται ίσα, $A=B$, εάν αποτελούνται ακριβώς από τα ίδια στοιχεία.

Παραδείγματα
1. $A=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ είναι ίσο με το σύνολο $B=\{\gamma,\beta,\delta,\alpha\}$
(η διάταξη των στοιχείων δεν παίζει ρόλο)

2. $A=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ είναι ίσο με $B=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\delta,\gamma\}$
(η καταγραφή ενός στοιχείου περισσότερες της μιας φοράς δεν αλλοιώνει το σύνολο)

▶ Ορισμός : Υποσύνολο Συνόλου (subset of a set)
Έστω σύνολο A, θα λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου B και θα συμβολίζεται $A\subseteq B$, όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B. Σε μια τέτοια περίπτωση, μπορούμε να λέμε ότι το B περιέχει το A.

- Ο παραπάνω ορισμός δεν αποκλείει την περίπτωση $B\subseteq A$. Μπορούν, δηλαδή, να ισχύουν ταυτόχρονα $A\subseteq B$ και $B\subseteq A$. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $A=B$.

- Αν $A\subseteq B$ και ταυτόχρονα $A\neq B$, τότε λέμε ότι το A είναι γνήσιο υποσύνολο (proper subset) του B και το συμβολίζουμε με $A\subset B$.
Με άλλα λόγια, για να είναι το σύνολο A γνήσιο υποσύνολο του B πρέπει όλα τα στοιχεία του A να είναι και στοιχεία του B, αλλά δεν πρέπει όλα τα στοιχεία του B να είναι και στοιχεία του A.

<u>Παραδείγματα</u>

1. Έστω σύνολο $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

Τα υποσύνολα $\{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\delta\}$, τα οποία είναι σύνολα που περιέχουν μόνο ένα στοιχείο, ονομάζονται <u>στοιχειώδη υποσύνολα</u> του A.

· Γενικά, ένα σύνολο με μόνο ένα στοιχείο ονομάζεται στοιχειώδες σύνολο ή μονοσύνολο (singleton).

· Το $\{\alpha\}$ είναι διαφορετική οντότητα από το α. Το πρώτο είναι (στοιχειώδες) υποσύνολο συνόλου, ενώ το δεύτερο είναι στοιχείο συνόλου.
Συνεπώς, ισχύει ότι $\{\alpha\} \subset A$ και $\alpha \in A$.

2. Έστω $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Ισχύουν, $\{\alpha\} \subset A$, $\{\alpha, \beta\} \subset A$, $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subseteq A$.

3. Έστω $A = \{\{1\}, 2\}$. Ισχύουν: $\{1\} \in A$, $1 \notin A$, $2 \in A$, $\{2\} \subset A$, $\{\{1\}\} \subset A$

► $\boxed{\text{Ορισμός}}$: <u>Δυναμοσύνολο Συνόλου</u> (Power set)
Έστω σύνολο $A \neq \emptyset$. Το σύνολο όλων των δυνατών υποσυνόλων του A, συμπεριλαμβανομένου και του $\emptyset$, ονομάζεται δυναμοσύνολο του A και συμβολίζεται με 2^A ή $P(A)$.

<u>Παραδείγματα</u>

1. Έστω $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Το δυναμοσύνολο του συνόλου A είναι το

$$2^A = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \underbrace{\{\alpha, \beta, \gamma\}}_{= A}\}$$

· Παρατηρούμε ότι το δυναμοσύνολο 2^A ή $P(A)$ περιέχει ως στοιχείο το ίδιο το σύνολο A και το κενό σύνολο ϕ.

· Γενικά, το δυναμοσύνολο ενός συνόλου περιέχει πάντα το ίδιο το σύνολο και το ϕ.

(*) Για ένα οποιοδήποτε σύνολο A, με πεπερασμένο αριθμό στοιχείων n, ο αριθμός των στοιχείων του δυναμοσυνόλου 2^A (ή $P(A)$) είναι ίσος με 2^n.

2. Έστω σύνολο $B = \mathbb{N}$. Το δυναμοσύνολο του συνόλου B, δηλαδή το δυναμοσύνολο του $\mathbb{N}$, είναι:

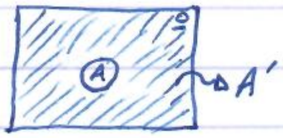
$$2^{\mathbb{N}} = \{ \phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \dots, \{1,2,3\}, \dots \}$$

· Από τον ορισμό του δυναμοσυνόλου παρατηρούμε ότι το δυναμοσύνολο ενός συνόλου είναι ένα "ιδιαίτερο" σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι επίσης σύνολα.

Συνολοθεωρητικές σχέσεις & πράξεις (περισσότερα στις Διαλέξεις)

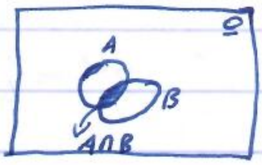
Βασικές πράξεις συνόλων:

1. Συμπλήρωμα συνόλου: $A' = \{x \mid x \in \Omega$ και $x \notin A\}$



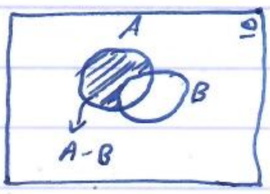
2. Ένωση συνόλων: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ ή $x \in B\}$

3. Τομή συνόλων: $A \cap B = \{x \mid x \in A$ και $x \in B\}$



⊙ Αν $A \cap B = \emptyset$ τότε τα σύνολα A και B ονομάζονται <u>αμοιβαίως αποκλειόμενα ή ξένα μεταξύ τους</u>. Δηλαδή, δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο τα σύνολα A και B.

4. Διαφορά συνόλων: $A - B = \{x \mid x \in A$ και $x \notin B\}$



<u>Παραδείγματα</u>

1) Έστω τα κλειστά διαστήματα πραγματικών αριθμών $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$ με $\alpha < \beta < \gamma$. Μπορούμε να ορίσουμε τις πράξεις: $[\alpha,\beta] \cup [\beta,\gamma] = [\alpha,\gamma]$ ή

$[\alpha,\beta] \cup \{\beta\} = [\alpha,\beta]$ ή $[\alpha,\beta] \cap [\beta,\gamma] = \{\beta\}$

Επίσης, αν θεωρήσουμε στη συγκεκριμένη περίπτωση ότι $\Omega = \mathbb{R}$, τότε μπορούμε να ορίσουμε το συμπλήρωμα του $(\alpha, \beta]$ ως προς το $\mathbb{R}$, το οποίο είναι το $[\alpha,\beta]' = (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$.

2) Έστω δύο σύνολα πραγματικών αριθμών (α,β) και (β,γ) τότε πάλι, μπορούμε να ορίσουμε τις πράξεις: $(\alpha,\beta) \cup (\beta,\gamma)$ και $(\alpha,\beta) \cap (\beta,\gamma) = \emptyset$, $(\alpha,\beta) \cup \{\beta\} = (\alpha,\beta]$ κτλ.

Ιδιότητες των πράξεων συνόλων

① Ταυτοτικές Ιδιότητες

i) $A \cup \Omega = \Omega$

ii) $A \cup \emptyset = A$

iii) $A \cap \Omega = A$

iv) $A \cap \emptyset = \emptyset$

② Ιδιότητες Συμπληρώματος

i) $(A')' = A$

ii) $\Omega' = \emptyset$

iii) $A \cup A' = \Omega$

iv) $A \cap A' = \emptyset$

v) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

vi) $A - B = A \cap B'$

③ Αντιμεταθετικές Ιδιότητες

i) $A \cup B = B \cup A$

ii) $A \cap B = B \cap A$

④ Επιμεριστικές Ιδιότητες

i) $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$

ii) $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

⑤ Προσεταιριστικές Ιδιότητες

i) $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$

ii) $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$

⑥ Ιδιότητες De Morgan

i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Γενικεύσεις Πράξεων Ένωσης & Τομής

Έστω σύνολο Ω και n: ο αριθμός των υποσυνόλων του Ω, τα οποία συμβολίζουμε με $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (πεπερασμένο πλήθος παραγόντων $A_i \subseteq \Omega$)

i) Ορίζουμε την ένωση των συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_n$ να είναι το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία εκείνα που ανήκουν σε τουλάχιστον ένα εκ των παραγόντων $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

άρα $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

ii) Ορίζουμε την τομή των συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_n$ να είναι το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία εκείνα που ανήκουν σε όλα τα σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (δηλαδή, κάθε στοιχείο που περιλαμβάνεται στη τομή πρέπει να'ναι στοιχείο σε κάθε ένα από τα σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_n$).

άρα $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

(!) Οι παραπάνω πράξεις ορίζονται και για την περίπτωση όπου το πλήθος των συνόλων είναι αριθμήσιμα άπειρο.

iii) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (αριθμήσιμα άπειρη ένωση)

iv) $A_1 \cap A_2 \cap \ldots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ (αριθμήσιμα άπειρη τομή)

(!) Πολλές από τις ιδιότητες των πράξεων συνόλων μπορούν να γενικευτούν για την περίπτωση που έχουμε πεπερασμένα ή ακόμα και αριθμήσιμα άπειρα υποσύνολα του Ω.

Πληθάριθμοι, Άπειρα Σύνολα

▶ $\boxed{\text{Ορισμός}}$: Πληθάριθμος συνόλου (ή πληθικός αριθμός)
Ο πληθάριθμος ενός συνόλου A είναι ένα "μέτρο" του αριθμού των στοιχείων που περιέχει. Συνήθως, συμβολίζεται με $|A|$.

· Αν το σύνολο A είναι πεπερασμένο τότε $|A| \in \mathbb{N}$.

· Αν το σύνολο A περιέχει άπειρα στοιχεία, τότε και το $|A|$ πρέπει να ορίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να εκφράζει αυτή την "απειρία".
· Οι αριθμοί που χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν το πλήθος των στοιχείων ενός άπειρου συνόλου ονομάζονται υπερπεπερασμένοι ή άπειροι πληθάριθμοι.

▶ $\boxed{\text{Ορισμός}}$: Πληθάριθμος του συνόλου $\mathbb{N}$ - Πρώτος Υπερπεπερασμένος Πληθάριθμος
Ο πληθάριθμος $|\mathbb{N}|$ του συνόλου των φυσικών αριθμών, $\mathbb{N}$, ορίζεται ως ο πρώτος υπερπεπερασμένος πληθάριθμος και συμβολίζεται με $\aleph_0$ (άλεφ-μηδέν). Δηλαδή, $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

▶ $\boxed{\text{Ορισμός}}$: Αριθμήσιμο, Υπεραριθμήσιμο Σύνολο
Ένα άπειρο σύνολο, δηλαδή ένα σύνολο με άπειρα στοιχεία, του οποίου ο πληθάριθμος ισούται με τον πρώτο υπερπεπερασμένο πληθάριθμο (δηλαδή με $\aleph_0$), ονομάζεται αριθμήσιμο (countable).

· Κάθε άπειρο μη-αριθμήσιμο σύνολο ονομάζεται υπεραριθμήσιμο (uncountable).

· Ένα σύνολο ονομάζεται μετρήσιμο (measurable) αν είναι είτε πεπερασμένο (finite) είτε αριθμήσιμο (countable).

(*) Γενικά, ισχύει ότι $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ (πρώτος υπερπεπερασμένος πληθάριθμος), παρότι προφανώς ισχύει ότι $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z} \neq \mathbb{Q}$

⊙ Ο $\aleph_0$ (άλεφ-μηδέν) είναι ο "πρώτος" άπειρος (υπερπεπερασμένος) πληθάριθμος. Αυτό σημαίνει ότι κάθε υπεραριθμήσιμο σύνολο έχει πληθάριθμο μεγαλύτερο του $\aleph_0$. Με άλλα λόγια, δεχόμαστε ότι δεν υπάρχει άπειρο σύνολο με πληθάριθμο "μικρότερο" του $\aleph_0$.

⊙ Ο πληθάριθμος του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ συμβολίζεται με c, δηλαδή $|\mathbb{R}| = c$. Ισχύει ότι $\aleph_0 < c$.

⊙ Η υπόθεση του συνεχούς υποστηρίζει ότι δεν υπάρχει άλλος υπερπεπερασμένος πληθάριθμος ανάμεσα στο $\aleph_0$ και το c. Επομένως, ορίζουμε το c ως τον <u>δεύτερο υπερπεπερασμένο πληθάριθμο</u>, $\aleph_1 > \aleph_0$ και γράφουμε $\aleph_1 = c$.
Ισχύει, επίσης, ότι $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

<u>Σχέση πληθαρίθμου ενός συνόλου & του πληθαρίθμου του δυναμοσυνόλου του</u>

Ο πληθάριθμος του δυναμοσυνόλου, 2^{Ω}, ενός οποιουδήποτε συνόλου Ω (πεπερασμένου ή απείρου) είναι μεγαλύτερος από τον πληθάριθμο του αρχικού συνόλου, δηλαδή, $|2^{\Omega}| > |\Omega|$. Συγκεκριμένα:

α) Αν Ω πεπερασμένο, τότε $|2^{\Omega}| = 2^{|\Omega|}$

β) Αν $\Omega = \mathbb{N}$, τότε $|2^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0} = \aleph_1 = c$

Δηλαδή, ο πληθάριθμος του δυναμοσυνόλου του $\mathbb{N}$ ισούται με τον πληθάριθμο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, $c = \aleph_1$ (κάτω από την υπόθεση του συνεχούς).

<u>Ενδεικτική ταξινόμηση απείρων συνόλων σύμφωνα με το πληθάριθμό τους</u>

(I) Άπειρα Σύνολα με πληθάριθμο $\aleph_0$:

α) Το σύνολο των φυσικών αριθμών, $\mathbb{N}$

β) Το σύνολο των ακεραίων, $\mathbb{Z}$

γ) Το σύνολο των ρητών, $\mathbb{Q}$

} <u>αριθμήσιμα σύνολα</u>

(II) Άπειρα Σύνολα με πληθάριθμο $\aleph_1$:

α) Το σύνολο των πραγματικών, $\mathbb{R}$

β) Το σύνολο των σημείων στο n-διάστατο χώρο των πραγματικών, $\mathbb{R}^n$

γ) Το δυναμοσύνολο των φυσικών, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

} <u>υπεραριθμήσιμα σύνολα</u>

• $\boxed{\text{Ορισμός}}$: Πραγματική Συνολοσυνάρτηση (real set function)
Έστω ένα σύνολο αναφοράς $\Omega \neq \emptyset$. Πραγματική συνολοσυνάρτηση επί του Ω καλείται οποια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το δυναμοσύνολό του 2^{Ω} (ή κάποια κατάλληλη υποσυλλογή του, δηλαδή κάποια κατάλληλη συλλογή μετρήσιμων υποσυνόλων του Ω, Σ_{Ω}) και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$.

(*) Μια τέτοια πραγματική συνολοσυνάρτηση υπολογίζεται σε υποσύνολα του Ω, <u>όχι</u> σε στοιχεία του και αποδίδει πραγματικούς αριθμούς.

<u>παραδείγματα</u>

1. $\Omega = \{\alpha\}$, $2^{\Omega} = \{\Omega, \emptyset\}$
πραγματική συνολοσυνάρτηση: $\sigma : 2^{\Omega} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως:
$$\sigma(\emptyset) = 0$$
$$\sigma(\Omega) = 1$$

2. $\Omega = \{\alpha, \beta\}$, $2^{\Omega} = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \Omega\}$

πραγματική συνολοσυνάρτηση: $Q : 2^{\Omega} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως:
$$Q(\emptyset) = 0$$
$$Q(\{\alpha\}) = \frac{1}{2}$$
$$Q(\{\beta\}) = \frac{1}{2}$$
$$Q(\Omega) = 1$$

⊙ Οι βασικές έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων αντιστοιχούν πλήρως σε κάποιες έννοιες της θεωρίας συνόλων

Θεωρία Πιθανοτήτων

Έστω ότι έχουμε ένα πείραμα τύχης στο οποίο δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων τα αποτελέσματα του και βάζουμε ένα στοίχημα σχετικά με κάποιο ενδεχόμενο → μας ενδιαφέρει να οργανώσουμε την αβεβαιότητα που μας διακατέχει σχετικά με την πραγματοποίηση ή μη του ενδεχομένου πάνω στο οποίο έχουμε στοιχηματίσει.
Αυτό σημαίνει ότι χρειαζόμαστε ένα "μοντέλο πιθανότητας" που να περιγράφει το πόσο αβέβαιοι είμαστε σχετικά με την εμφάνιση του ενδεχομένου που μας ενδιαφέρει.

Η προσπάθεια "μοντελοποίησης" της αβεβαιότητας ενός πειράματος τύχης πρέπει να γίνει σε "μαθηματική" γλώσσα.

Για την μοντελοποίηση ακολουθούμε κάποια βήματα:

1. Συλλέγουμε όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης και δημιουργούμε τον λεγόμενο δειγματικό χώρο Ω.

▸ Ορισμός: Δειγματικός Χώρος (sample space)
Δειγματικός χώρος Ω (ενός πειράματος τύχης) καλείται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων τα οποία μπορεί να εμφανιστούν σε μία εκτέλεσή του.

- Υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω ονομάζονται ενδεχόμενα (ή γεγονότα).

- Τα ενδεχόμενα (δηλαδή, υποσύνολα του Ω) που περιλαμβάνουν ένα στοιχείο λέγονται στοιχειώδη ενδεχόμενα.

- Τα ενδεχόμενα που περιέχουν περισσότερα από ένα στοιχεία λέγονται σύνθετα ενδεχόμενα.

- Ολόκληρος ο δειγματικός χώρος Ω ονομάζεται **βέβαιο** (ή σίγουρο) **ενδεχόμενο**.

- Ένα ενδεχόμενο το οποίο δεν πραγματοποιείται ποτέ, λέγεται **αδύνατο ενδεχόμενο** και συμβολίζεται με $\emptyset$.

- Για $\forall$ ενδεχόμενο A, ισχύει ότι $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$.

- Αν δύο ενδεχόμενα A, B δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως λέγονται **ξένα μεταξύ τους ή ασυμβίβαστα ή αμοιβαίως αποκλειόμενα ενδεχόμενα**, δηλαδή ισχύει $A \cap B = \emptyset$.

Επομένως, το πρώτο πράγμα που κάνουμε για να μοντελοποιήσουμε την αβεβαιότητα ενός πειράματος τύχης, είναι να δημιουργήσουμε ένα δειγματικό χώρο. Το επόμενο βήμα είναι το ακόλουθο:

(2.) Ορίζουμε όλα τα ενδεχόμενα (υποσύνολα του Ω), την πιθανότητα των οποίων μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε. Αυτό το βήμα γίνεται σε δύο στάδια:

α) Συλλέγουμε όλα τα ενδεχόμενα που μας ενδιαφέρουν σε ένα σύνολο ενδεχομένων.

β) Σε κάθε ένα από αυτά θα προσάγουμε μία πιθανότητα ή πιο σωστά, ένα μέτρο πιθανότητας.

⊙ Όσον αφορά το (α), το σύνολο ενδεχομένων θα πρέπει να έχει μία συγκεκριμένη μαθηματική δομή, ώστε να μας εξασφαλίζει ότι κάποιες πράξεις μεταξύ ενδεχομένων καταλήγουν πάντα σε κάποιο άλλο ενδεχόμενο. Με άλλα λόγια, αυτό σημαίνει ότι απαιτούμε από τον χώρο ενδεχομένων να είναι "κλειστός" ως προς κάποιες πράξεις μεταξύ ενδεχομένων (π.χ. ως προς την πράξη της ένωσης και του συμπληρώματος) → η πιο χρήσιμη δομή "κλειστότητας" αποδεικνύεται να 'ναι η **σ-άλγεβρα**.

Άρα, εξασφαλίζοντας αυτήν την ιδιότητα για το χώρο ενδεχομένων, στη συνέχεια μπορούμε να προσάγουμε πιθανότητες σε καθένα από τα στοιχεία αυτού του χώρου. Επομένως, θα ορίσουμε μία πραγματική συνολοσυνάρτηση με πεδίο ορισμού, το χώρο ενδεχομένων και πεδίο τιμών, τους μη-αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς. Αυτή η συνολο-συνάρτηση θα πρέπει να ικανοποιεί κάποιες ιδιότητες για να είναι κατανομή (ή μέτρο) πιθανότητας.

▸ $\boxed{\text{Ορισμός}}$: <u>Κατανομή (ή μέτρο) πιθανότητας</u> (probability distribution/measure)
Έστω ο δειγματικός χώρος Ω και το δυναμοσύνολό του 2^{Ω} (ή μια συλλογή μετρήσιμων υποσυνόλων του Ω, Σ_{Ω}), τον οποία ονομάζουμε χώρο ενδεχομένων. Πάνω στον χώρο ενδεχομένων ορίζουμε την συνολοσυνάρτηση πιθανότητας $\mathbb{P}$, η οποία πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:

i) $\mathbb{P}(A) \geq 0$, για $\forall$ ενδεχόμενα $A \in 2^{\Omega}$ (ή Σ_{Ω}) (μη-αρνητική πιθανότητα)

ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (κανονικοποίηση)

iii) Αν τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \dots, A_n \in 2^{\Omega}$ (ή Σ_{Ω}) είναι ξένα μεταξύ τους (ή αμοιβαίως αποκλειόμενα) κατά ζεύγη, δηλαδή $A_i \cap A_j = \emptyset$, όταν $i \neq j$, ισχύει ότι:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_n) \quad \text{(προσθετικότητα)}$$

· Η ιδιότητα (iii) της προσθετικότητας αφορά πεπερασμένο πλήθος ενδεχομένων $A_1, A_2, \dots, A_n$. Η ιδιότητα αυτή μπορεί να γενικευτεί και για αριθμήσιμα άπειρο πλήθος ενδεχομένων. Σε αυτή την περίπτωση, για $\forall$ ακολουθία (με αριθμήσιμα άπειρο πλήθος ενδεχομένων) A_i, $i=1,2,3\dots$ (μελών του 2^{Ω} ή Σ_{Ω}), τα οποία είναι κατά ζεύγη ξένα μεταξύ τους, ισχύει ότι:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \quad \text{(αριθμήσιμη προσθετικότητα)}$$

Παρατηρήσεις

1. Από τον ορισμό προκύπτει $\mathbb{P}(\emptyset)=0$.

Επειδή $\Omega \cup \Omega' = \Omega \cup \emptyset = \Omega$ και $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$, τα Ω και $\emptyset$ είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα. Συνεπώς, από την ιδιότητα της προσθετικότητας:

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) &= \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset) \\ \text{όμως} \quad \mathbb{P}(\Omega) &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Επομένως, $\mathbb{P}(\Omega)=1$ και $\mathbb{P}(\emptyset)=0$.

2. Για κάθε ενδεχόμενο $A \in 2^{\Omega}$ (ή Σ_{Ω}), ισχύει $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
Εφόσον η $\mathbb{P}$ είναι μέτρο θα πληροί και την ιδιότητα της μονοτονικότητας. Συνεπώς, αφού κάθε ενδεχόμενο $A \in 2^{\Omega}$ είναι υποσύνολο του Ω, θα ισχύει ότι $A \subseteq \Omega \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\Omega)$ και κατά συνέπεια, αφού $\mathbb{P}(A) \geq 0$ και $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ προκύπτει ότι $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

3. Τον όρο "ενδεχόμενο" τον αποδίδουμε μόνο στα υποσύνολα του Ω που περιέχονται στον χώρο ενδεχομένων 2^{Ω} (ή κάποια υποσυλλογή του, Σ_{Ω}) και όχι σε κάθε υποσύνολο του Ω. Φυσικά, όταν ο χώρος ενδεχομένων είναι το δυναμοσύνολο του Ω, 2^{Ω}, τότε κάθε υποσύνολο του Ω είναι ενδεχόμενο. Αν, όμως, ο χώρος ενδεχομένων δεν συμπίπτει με το δυναμοσύνολο του Ω, τότε μόνο τα μετρήσιμα υποσύνολα του Ω θα φέρουν τον τίτλο ενδεχόμενο.

Δειγματικοί Χώροι

QS: "Γιατί να μην θεωρούμε πάντα το δυναμοσύνολο του δειγματικού χώρου Ω ως το σχετικό χώρο ενδεχομένων??"

- Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα εξαρτάται από τη φύση του δειγματικού χώρου.

Υπάρχουν τρία είδη δειγματικών χώρων:

i) Πεπερασμένος δειγματικός χώρος: ο δειγματικός χώρος Ω περιέχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων.

ii) Διακριτός δειγματικός χώρος: ο δειγματικός χώρος Ω περιέχει αριθμήσιμα άπειρα στοιχεία.

iii) Υπεραριθμήσιμος δειγματικός χώρος: ο δειγματικός χώρος Ω περιέχει υπεραριθμήσιμο αριθμό στοιχείων.

⊙ Στην περίπτωση που έχουμε πεπερασμένο δειγματικό χώρο, μπορούμε πάντα να θεωρούμε το δυναμοσύνολο του Ω, 2^{Ω} ως τον κατάλληλο χώρο ενδεχομένων πάνω στον οποίο θα ορίσουμε ένα μέτρο (ή κατανομή) πιθανότητας. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι όλα τα υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω είναι μετρήσιμα και μπορούν να θεωρηθούν ενδεχόμενα δηλαδή μπορούμε να προσάγουμε πιθανότητα σε κάθε ένα από αυτά.

⊙ Αν όμως ο δειγματικός χώρος Ω είναι διακριτός ή υπεραριθμήσιμος, τότε το δυναμοσύνολο του Ω δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως χώρος ενδεχομένων γιατί υπάρχουν υποσύνολα του Ω τα οποία δεν μπορούν να "μετρηθούν" και συνεπώς δεν μπορεί να ορίσει συνάρτηση πιθανότητας. Σε αυτή την περίπτωση, επιλέγουμε τα μετρήσιμα υποσύνολα του Ω και τα συλλέγουμε στο σύνολο Σ_{Ω}, το οποίο χρησιμοποιούμε σαν τον σχετικό χώρο ενδεχομένων πάνω στον οποίο θα ορίσουμε τη συνάρτηση πιθανότητας.

- Μετρήσιμα υποσύνολα του Ω εννοούμε τα υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω στα οποία μπορούμε να προσάγουμε πιθανότητα.

π.χ. Έστω ότι ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \mathbb{R}$, το δυναμοσύνολό του $2^{\mathbb{R}}$ είναι υπεραριθμήσιμο και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως χώρος ενδεχομένων γιατί υπάρχουν άπειρα υποσύνολα του Ω (τα οποία, προφανώς, είναι στοιχεία του $2^{\mathbb{R}}$) που δεν μπορούν να "μετρηθούν" άρα δεν είναι ενδεχόμενα.

Σε αυτή την περίπτωση, ως σχετικό χώρο ενδεχομένων, θα χρησιμοποιούμε μία συλλογή μετρήσιμων υποσυνόλων του Ω (δηλαδή, του $\mathbb{R}$), την οποία θα συμβολίζουμε $\Sigma_{\mathbb{R}}$.

Η θεωρία μέτρου και η τοπολογία που είναι κλάδοι της μαθηματικής επιστήμης μας καθορίζουν τα στοιχεία που περιέχει το $\Sigma_{\mathbb{R}}$, δηλαδή μας λένε ποια υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμα και επομένως, μπορούν να συμπεριληφθούν ως στοιχεία στη συλλογή μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, στο $\Sigma_{\mathbb{R}}$.

- Περαιτέρω εμβάθυνση στο συγκεκριμένο ζήτημα ξεφεύγει από τους σκοπούς του μαθήματος.
- Στα πλαίσια του μαθήματος, θα θεωρούμε ότι το δυναμοσύνολο 2^{Ω} του δειγματικού χώρου Ω μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ο σχετικός χώρος ενδεχομένων πάνω στον οποίο μπορούμε να ορίσουμε μία συνάρτηση πιθανότητας.

Κατασκευή Συναρτήσεων Πιθανότητας

Υποθέτουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω είναι πεπερασμένος και περιέχει n στοιχεία, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.
Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το δυναμοσύνολο του Ω, 2^Ω ως χώρο ενδεχομένων.

- Με ποιο τρόπο μπορούμε να προσάγουμε πιθανότητες σε κάθε ενδεχόμενο $A \in 2^\Omega$??
- Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε τη συν. πιθανότητας $\mathbb{P}: 2^\Omega \to [0,1]$ σε μια τέτοια περίπτωση??

Η απάντηση έχει ως εξής:

Βήμα 1: Θεωρούμε όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του 2^Ω, δηλαδή τα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \ldots, \{\omega_n\}$.

Βήμα 2: Σε κάθε ένα από αυτά αποδίδουμε μια πιθανότητα $\mathbb{P}(\{\omega_j\}) = p_j \;, j=1,2,\ldots,n$ με τέτοιο τρόπο ώστε $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$.

Αυτός ο ορισμός πιθανοτήτων για καθένα από τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι επαρκής για να ορίσει τη συνάρτηση πιθανότητας $\mathbb{P}: 2^\Omega \to [0,1]$ πάνω σε όλο το χώρο ενδεχομένων 2^Ω.
Συνεπώς, για οποιοδήποτε ενδεχόμενο $A \in 2^\Omega$ αρκεί να δούμε πόσα και ποια ω_j περιέχει και να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A, το άθροισμα των αντίστοιχων πιθανοτήτων p_j, δηλαδή

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_j \in A} p_j$$

(*) Παρατήρηση!! Αν τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, η πιθανότητα του ενδεχομένου A ορίζεται ως το πηλίκο του πλήθους $\omega_j \in A$ προς το πλήθος όλων των $\omega_j \in \Omega$. Δηλαδή, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega}$

π.χ. αν $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ με $m \leq n$, τότε $\mathbb{P}(A) = \dfrac{m}{n}$

Παραδείγματα Συναρτήσεων Πιθανότητας

Δίνουμε παρακάτω κάποια παραδείγματα συναρτήσεων πιθανότητας, οι οποίες αξίζουν να ικανοποιούν τις απαιτήσεις που θέσαμε στη συνολοσυνάρτηση $\mathbb{P}$, προκειμένου να την αποκαλούμε κατανομή πιθανότητας.

1) Ρίψη νομίσματος

Έστω ρίχνουμε ένα νόμισμα με δυνατά αποτελέσματα K και Γ. Άρα, ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{K, \Gamma\} \rightarrow$ πεπερασμένος δειγματικός χώρος. Ορίζουμε ως χώρο ενδεχομένων το δυναμοσύνολο του Ω, 2^{Ω}.

$2^{\Omega} = \{\{K\}, \{\Gamma\}, \phi, \Omega\}$

Όσον αφορά τη συνάρτηση πιθανότητας, μπορούμε να βρούμε μία $\mathbb{P}$ πάνω στο χώρο ενδεχομένων 2^{Ω}, η οποία να πληροί τις απαιτήσεις της συνάρτησης πιθανότητας. Δηλαδή να προσάγουμε σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο έναν αριθμό p_i, $i = 1, 2$ όπου $0 \leq p_i \leq 1$ με τέτοιο τρόπο ώστε $P(\Omega) = \sum p_i = 1$ και να ορίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A \in 2^{\Omega}$, το άθροισμα των αντίστοιχων πιθανοτήτων p_i, δηλαδή $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$.

Κατά αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να έχουμε:

$$p_1 = \mathbb{P}(\{K\}) = \frac{1}{2} \quad , \quad p_2 = \mathbb{P}(\{\Gamma\}) = \frac{1}{2} \quad . \text{ Προφανώς, } \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

Επιπλέον, για οποιαδήποτε ενδεχόμενα του 2^{Ω}, τα οποία είναι ξένα μεταξύ τους ή αμοιβαίως αποκλειόμενα, η πιθανότητα της ένωσής τους ισούται με το άθροισμα των πιθανοτήτων τους. Ισχύει

$\mathbb{P}(\{K\} \cup \{\Gamma\}) = \mathbb{P}(\{K\}) + \mathbb{P}(\{\Gamma\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \mathbb{P}(\Omega)$

Με άλλα λόγια, η συνάρτηση $\mathbb{P}: 2^{\Omega} \rightarrow [0,1]$ ορισμένη ως:

$\mathbb{P}(\{K\}) = \mathbb{P}(\{\Gamma\}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, $\mathbb{P}(\phi) = 0$ είναι καλώς ορισμένη συνάρτηση πιθανότητας.

(*) <u>Παρατήρηση</u>!! Η παραπάνω συνάρτηση πιθανότητας βασίζεται στην έννοια των "ισοπίθανων" στοιχειωδών ενδεχομένων και είναι κατάλληλη για την περίπτωση που το νόμισμα είναι "δίκαιο".
Στην περίπτωση ενός "κάλπικου" νομίσματος και πάλι θα μπορούσαμε να ορίσουμε μία συνάρτηση πιθανότητας πάνω στον χώρο ενδεχομένων 2^{Ω}, μόνο που σε αυτή τη περίπτωση τα στοιχειώδη ενδεχόμενα δεν θα είναι ισοπίθανα. Αν προσάγουμε πιθανότητα $0 \leq p \leq 1$ στο ένα από τα δύο στοιχειώδη ενδεχόμενα, τότε αρκεί να προσάγουμε πιθανότητα $1-p$ στο άλλο, προκειμένου να έχουμε ορίσει μία συνάρτηση πιθανότητας $P(A) = \sum_{\omega \in A} p_i$ που να ικανοποιεί τις απαραίτητες ιδιότητες (δηλαδή την $P(\Omega)=1$ και την ιδιότητα της αριθμήσιμης προσθετικότητας).

2) Έστω ο υπεραριθμήσιμος δειγματικός χώρος $\Omega = (0,1]$. Σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση, σε αυτή την περίπτωση <u>δεν</u> μπορούμε να θεωρήσουμε το δυναμοσύνολο του Ω (το 2^{Ω}) ως χώρο ενδεχομένων γιατί υπάρχουν μη-μετρήσιμα υποσύνολα του Ω → <u>Θεωρία Μέτρου</u> μας λέει ποιος είναι ο κατάλληλος χώρος ενδεχομένων και πως ορίζεται ένα μέτρο πιθανότητας
↳ γίνεται σ'αυτή την περίπτωση να κατασκευάσουμε ένα μέτρο πιθανότητας, ορισμένο σε ένα χώρο ενδεχομένων →
→ Θεωρήματα Επέκτασης (Θεώρημα Καραθεοδωρή) - <u>εκτός σκοπού μαθήματος</u>

3) Έστω $\Omega = \{\kappa\}$, δυναμοσύνολο-χώρος ενδεχομένων : $2^{\Omega} = \{\emptyset, \{\kappa\}, \{\kappa\}, \Omega\}$

Οι μονοσύνολοι δειγματικοί χώροι έχουν αναγκαστικά μοναδική κατανομή πιθανότητας και την ξέρουμε. Ονομάζεται <u>εκφυλισμένη κατανομή πιθανότητας</u> στο κ και ορίζεται ως $\mathbb{P}(\{\kappa\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

4) Έστω $\Omega = \{K, \Gamma\}$. Το δυναμοσύνολό του Ω είναι $2^\Omega = \{\emptyset, \{K\}, \{\Gamma\}, \Omega\}$.
Έστω $q \in [0,1]$ και κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}_q : 2^\Omega \to [0,1]$ που ορίζεται ως
$\mathbb{P}_q(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}_q(\{K\}) = q$, $\mathbb{P}_q(\{\Gamma\}) = 1-q$, $\mathbb{P}_q(\Omega) = 1$.

⊙ Όλες οι κατανομές πιθανότητας που ορίζονται σε ένα δειγματικό χώρο Ω που περιέχει δύο στοιχεία έχουν την παραπάνω μορφή.
Για παράδειγμα, αν $q = \frac{1}{2}$, έχουμε το πείραμα τύχης του αμερόληπτου νομίσματος.
Υπάρχουν τόσες κατανομές πιθανότητας σε αυτό το Ω, όσα και τα $q \in [0,1]$.
Ουσιαστικά, στο ένα στοιχείο του Ω (π.χ. K) αποδίδεται μία πιθανότητα (q) και στο άλλο (στο στοιχείο: Γ), η συμπληρωματική του πιθανότητα ($1-q$).

- Για $q = 1 \Rightarrow$ εκφυλισμένη κατανομή πιθανότητας στο K, αφού $\mathbb{P}(\{K\}) = 1$
- Για $q = 0 \Rightarrow$ εκφυλισμένη κατανομή πιθανότητας στο Γ, αφού $\mathbb{P}(\{\Gamma\}) = 1$

5) Ρίχνουμε ένα δίκαιο ζάρι. Ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Θέλουμε τα ενδεχόμενα:
$A = \{2,4,6\}$ = "ζυγό αποτέλεσμα"
$B = \{1,3,5\}$ = "μονό αποτέλεσμα"
Έχουμε τα 6 στοιχειώδη ενδεχόμενα: $E_i = \{i\}$, $\forall i = 1,2,3,4,5,6$
Εφόσον το ζάρι είναι δίκαιο, απαιτούμε το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ που περιγράφει αυτό το πείραμα, να δίνει την ίδια πιθανότητα, δηλαδή $\frac{1}{6}$ σε κάθε ένα δυνατό αποτέλεσμα, δηλαδή $\mathbb{P}(E_i) = \frac{1}{6}$, για $\forall i = 1,2,3,4,5,6$.

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου A (η οποία διαισθητικά είναι προφανώς ίση με $\frac{1}{2}$), παρατηρούμε ότι το ενδεχόμενο A μπορεί να εκφραστεί ως ένωση στοιχειωδών ενδεχομένων. Δηλαδή,
$A = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\} = E_2 \cup E_4 \cup E_6$ και γνωρίζουμε ότι όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους. Άρα, από την ιδιότητα (iii) της προσθετικότητας έχουμε: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(E_2 \cup E_4 \cup E_6) = \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_4) + \mathbb{P}(E_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
Αντίστοιχα, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_3) + \mathbb{P}(E_5) = \frac{1}{2}$.

<u>Παρατηρήσεις!!</u>

1. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα.
2. Τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι <u>πάντα</u> ξένα μεταξύ τους. Κατά συνέπεια, αν ο δειγματικός χώρος Ω είναι πεπερασμένος, για να οριστεί το μέτρο πιθανότητας για όλα τα ενδεχόμενα αρκεί να οριστεί για τα στοιχειώδη ενδεχόμενα.

<u>Γιατί??</u> Επειδή μπορούμε να εκφράσουμε τα ενδεχόμενα ως την ένωση των στοιχειωδών ενδεχομένων. Έστω ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο A το οποίο αποτελείται από τα στοιχεία $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$. Εκφράζοντας το A ως την ένωση των ξένων στοιχειωδών ενδεχομένων $A = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \dots \cup \{\omega_k\}$ και χρησιμοποιώντας την τρίτη ιδιότητα του ορισμού του μέτρου πιθανότητας, μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα του A ως το άθροισμα των πιθανοτήτων των στοιχειωδών ενδεχομένων $\{\omega_i\}$ ως:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \mathbb{P}(\{\omega_2\}) + \dots + \mathbb{P}(\{\omega_k\})$$

<u>Ανεξαρτησία Ενδεχομένων</u>

Ας προσεγγίσουμε την έννοια της ανεξαρτησίας δύο ενδεχομένων διαισθητικά. Υποθέτουμε, για παράδειγμα, ότι έχουμε ένα τυχαίο πείραμα και δύο σχετικά με αυτό ενδεχόμενα A_1, A_2, για τα οποία γνωρίζουμε ότι οι πιθανότητες να συμβούν είναι $\mathbb{P}(A_1) = 0.5$ και $\mathbb{P}(A_2) = 0.4$. Αυτό σημαίνει ότι για ένα μεγάλο αριθμό επαναλήψεων του πειράματος, το ενδεχόμενο A_1 θα συμβεί στο 50% των επαναλήψεων.

Αν το A_2 είναι ανεξάρτητο από το A_1, τότε η πραγματοποίηση του A_1 δεν θα πρέπει να επηρεάσει την πιθανότητα να συμβεί το A_2. Αυτό δηλαδή σημαίνει ότι αν απομονώσουμε μόνο τις φορές που έχει συμβεί το A_1, τότε το A_2 θα πρέπει να συνεχίσει να εμφανίζεται με συχνότητα 40%. Επομένως, η πιθανότητα του να συμβεί και το A_1 και το A_2 ταυτόχρονα $(A_1 \cap A_2)$ θα πρέπει να ισούται με το γινόμενο των αντίστοιχων πιθανοτήτων των A_1 και A_2, δηλαδή,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)$$

▸ **Ορισμός** <u>Ανεξαρτησία Δύο ενδεχομένων</u>
Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, 2^\Omega, \mathbb{P})$ και δύο ενδεχόμενα $A_1, A_2 \in 2^\Omega$ (χώρος ενδεχομένων - δυναμοσύνολο). Τα ενδεχόμενα αυτά θα λέγονται <u>ανεξάρτητα</u> (independent events) αν και μόνο αν: $\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)}$

<u>Παράδειγμα</u>
Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\spadesuit, \diamondsuit, \heartsuit, \clubsuit\}$. Ο χώρος ενδεχομένων είναι το δυναμοσύνολο του Ω, 2^Ω και η συνάρτηση πιθανότητας είναι $\mathbb{P}: 2^\Omega \to [0,1]$ που προσδίδει πιθανότητα ίση με $\frac{1}{4}$ σε καθένα από τα στοιχειώδη ενδεχόμενα.
Θεωρούμε τα ενδεχόμενα $A_1 = \{\spadesuit, \diamondsuit\}$ και $A_2 = \{\spadesuit, \heartsuit\}$ καθένα εκ των οποίων έχει πιθανότητα ίση με $\frac{1}{2}$. <u>Γιατί</u>?? Αφού τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, η πιθανότητα του ενδεχομένου A_1 είναι
$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{\text{πλήθος στοιχείων } A_1}{\text{πλήθος στοιχείων } \Omega} = \frac{\# A_1}{\# \Omega} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$
Αντίστοιχα, για το A_2, $\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}$.

Είναι τα A_1, A_2 ανεξάρτητα ενδεχόμενα??
Πρώτα βρίσκουμε την τομή των δύο ενδεχομένων δηλαδή $A_1 \cap A_2 = \{\spadesuit\}$ το οποίο είναι ενδεχόμενο με πιθανότητα ίση με $\frac{1}{4}$, δηλαδή $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4}$
<u>άρα</u> αφού $\frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, τα A_1, A_2 είναι <u>ανεξάρτητα</u>

⊙ Μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια της ανεξαρτησίας για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα και να την ορίσουμε για αριθμήσιμα άπειρα ενδεχόμενα.

(*) <u>Παρατήρηση</u>!!
Η ανεξαρτησία δύο ενδεχομένων είναι διαφορετική έννοια από την έννοια των ασυμβίβαστων ή αμοιβαίως αποκλειόμενων ενδεχομένων.

⊙ Δύο ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους ή αμοιβαίως αποκλειόμενα αν $A \cap B = \emptyset$. Δηλαδή, τα δύο ενδεχόμενα δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο και δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν σύγχρονως.

⊙ Η ανεξαρτησία δύο ενδεχομένων ουσιαστικά σημαίνει ότι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ένα ενδεχόμενο δεν μεταβάλλει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου ενδεχομένου. Δηλαδή, η πραγματοποίηση του ενός ενδεχομένου δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση ή μη του άλλου ενδεχομένου.

Παράδειγμα

Έστω τυχαίο πείραμα → ρίψη ενός ζαριού 2 φορές

ενδεχόμενο $A =$ "η ένδειξη του πρώτου ζαριού να είναι 3" $= \{3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6\}$

-"- $\Gamma =$ "το άθροισμα των ενδείξεων των 2 ζαριών να είναι 7" $=$
$= \{1.6, 2.5, 3.4, 4.3, 5.2, 6.1\}$

Ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\underbrace{1.1, 1.2, 1.3, \ldots, 2.4, 2.5, 2.6, \ldots, 6.4, 6.5, 6.6}_{\text{36 στοιχεία (δυνατά αποτελέσματα)}}\}$

Αφού τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, η πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Αντίστοιχα, η $P(\Gamma) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ άρα $P(A) \cdot P(\Gamma) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Επίσης, έχουμε $A \cap \Gamma = \{3.4\}$ άρα $P(A \cap \Gamma) = \frac{1}{36}$

άρα $P(A \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(\Gamma)$ άρα τα ενδεχόμενα A, Γ είναι ανεξάρτητα

Ωστόσο, $A \cap \Gamma = \{3.4\} \neq \emptyset$ άρα τα ενδεχόμενα A, Γ δεν είναι ξένα μεταξύ τους ή αμοιβαίως αποκλειόμενα.