Φροντιστήριο 4

Υπενθύμιση κάποιων εννοιών (που είδαμε σε προηγούμενα φροντιστήρια - διαλέξεις)

- Αντίστροφη Εικόνα: Έστω συνάρτηση $f: \Omega \to \mathbb{R}$. Τότε ορίζεται η αντίστροφη εικόνα του A (μέσω της f) ως το σύνολο των στοιχείων του Ω τα οποία απεικονίζονται, μέσω της f στο A.

$$f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A\}.$$

- Τυχαίες Μεταβλητές

▶ $\boxed{\text{Ορισμός:}}$ Έστω οι μετρήσιμοι χώροι (Ω, Σ_Ω) και $(\mathbb{R}, \Sigma_\mathbb{R})$. Τυχαία μεταβλητή θα ονομάζεται οποια συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε αν $A \in \Sigma_\mathbb{R}$, τότε η αντίστροφη εικόνα του (ή προ-εικόνα), μέσω της $X(\cdot)$,

$$X^{-1}(A) \in \Sigma_\Omega.$$

• Δηλαδή οτιδήποτε μπορεί να μετρηθεί στο $\mathbb{R}$ έχει προκύψει ως εικόνα μέσω της X από κάτι που μπορεί να μετρηθεί στο Ω.
Ουσιαστικά, η τυχαία μεταβλητή μετασχηματίζει ένα μετρήσιμο χώρο σ'έναν άλλο μετρήσιμο χώρο κι μας επιτρέπει να ορίσουμε νέες πιθανότητες.

- Κατανομές από μεταφορά: Οι τυχαίες μεταβλητές μεταφέρουν τις κατανομές πιθανότητας στους πραγματικούς. Αν θέλουμε να προσάγουμε πιθανότητα σ'ένα μετρήσιμο υποσύνολο των πραγματικών, βρίσκουμε την αντίστροφη εικόνα αυτού μέσω της τυχαίας μεταβλητής X και αποδίδουμε σ'αυτή πιθανότητα μέσω της κατανομής $\mathbb{P}$ που υπάρχει ήδη στον δειγματικό χώρο.

▶ $\boxed{\text{Ορισμός}}$ Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$, ο μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}, \Sigma_\mathbb{R})$ και η τυχαία μεταβλητή X. Το ζεύγος $\mathbb{P}, X$ προσδιορίζει μονοσήμαντα κατανομή στο $\mathbb{R}$, έστω $\mathbb{P}^*(\cdot)$ που ορίζεται ως εξής:

Αν $A \in \Sigma_\mathbb{R}$ τότε $\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$

- Στήριγμα (support) κατανομής

Έστω κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}$ στο $\mathbb{R}$. Το στήριγμα (supp) αυτής είναι το μικρότερο κλειστό και μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο η $\mathbb{P}$ αποδίδει μοναδιαία πιθανότητα.

• Το στήριγμα διευκολύνει την διαδικασία περιγραφής μιας κατανομής πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και την απόδοση πιθανοτήτων αφού ξέρουμε ότι ισχύει:

$\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, $\boxed{\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap supp)}$ (δείτε διαλέξεις για απόδειξη)

• Επίσης, ανάλογα με την μορφή που μπορεί να πάρει το στήριγμα, μας παρέχει κατηγοριοποίηση των κατανομών στο $\mathbb{R}$.

- → διακριτές κατανομές (διακριτό supp)
- → συνεχείς κατανομές (supp διάστημα ή ένωση διαστημάτων)
- → μεικτές κατανομές (το supp έχει δύο ξένα μεταξύ τους μέρη, διακριτό & συνεχές)

Διακριτές κατανομές → διακριτό supp της μορφής: $supp = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

Πόρισμα (απόδειξη στις διαλέξεις)

Μια διακριτή κατανομή αποδίδει αυστηρά θετική πιθανότητα σε κάθε στοιχείο του στηρίγματός της, $supp = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ άρα

$\mathbb{P}(\{x_i\}) > 0, \ \forall x_i \in supp$

Μεθοδολογία

Για να μελετήσουμε μία διακριτή κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, θα πρέπει:

α. να γνωρίζουμε το στήριγμά της (supp)

β. να γνωρίζουμε τις πιθανότητες που αποδίδει η κάθε κατανομή σε κάθε στοιχείο του στηρίγματός της

Άρα, αφού ξέρουμε τα α, β μπορούμε να υπολογίσουμε τη πιθανότητα κάθε ενδεχομένου $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$.

Αντίστροφα, αν γνωρίζουμε τα α και β τότε για να αποδείξουμε ότι η κατανομή είναι διακριτή και καλώς ορισμένη θα πρέπει:

1. Το στήριγμα της να είναι διακριτό
2. $\forall x_i \in supp,\ \mathbb{P}(\{x_i\}) > 0$
3. $\mathbb{P}(supp) = 1$.

<u>Παραδείγματα Διακριτών κατανομών</u>

Στο φροντιστήριο ασχολούμαστε περισσότερο με παραδείγματα σχετικά με την κατανομή Poisson με παράμετρο λ. Για Bernoulli και Διωνυμική (Binomial), υπάρχουν πολλά παραδείγματα στις διαλέξεις.

Κατανομή Poisson ως προς παράμετρο $\lambda \to Poiss(\lambda)$

Δίνονται: - $supp = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

- $\mathbb{P}(\{i\}) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^i}{i!}, \quad i \in \mathbb{N},\ \lambda > 0$

Τα παραπάνω περιγράφουν μία καλώς ορισμένη κατανομή?

Πρέπει να ελέγξουμε τις τρεις απαιτήσεις που έχουμε ώστε η κατανομή να είναι διακριτή και καλώς ορισμένη.

1. Το supp είναι διακριτό αφού είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών ($\mathbb{N}$) που ξέρουμε ότι είναι διακριτό σύνολο.
2. $\mathbb{P}(\{i\}) > 0$ αφού $\mathbb{P}(\{i\}) = \underbrace{e^{-\lambda}}_{>0} \dfrac{\lambda^i}{i!}$ και $\lambda > 0$, $i \in \mathbb{N}$ ~~άρα~~ ισχύει
3. $\mathbb{P}(supp) = \mathbb{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}(\{0, 1, 2, \ldots\}) = \mathbb{P}(\{0\}) + \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \ldots =$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{i\}) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} =$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^1}{1!} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} + \ldots =$$

$$= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!} + \ldots \right) =$$

$$= e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}}_{e^{\lambda}} \overset{(*)}{=} e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^{-\lambda + \lambda} = e^0 = 1$$

Εφαρμόζουμε το ανάπτυγμα Mclaurin (θέτοντας $x = \lambda$)

(*) Ανάπτυγμα Mclaurin της e^x:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

<u>Υπενθύμιση</u>

$$i! = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = 0, 1 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots i, & \text{αν } i > 0 \end{cases}$$

Παραδείγματα Υπολογισμού πιθανοτήτων για την Poisson(λ)

Έστω $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ πώς $\mathbb{P}(A)$??

π.χ.

- αν $A=(0,1)$: $\mathbb{P}((0,1)) = \mathbb{P}((0,1)\cap supp) = \mathbb{P}((0,1)\cap\{0,1,2,\dots\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

- αν $A=\{0,1\}$: $\mathbb{P}(\{0,1\}) = \mathbb{P}(\{0,1\}\cap supp) = \mathbb{P}(\{0,1\}\cap \mathbb{N}) = \mathbb{P}(\{0,1\}\cap\{0,1,2,3,\dots\}) =$
$$= \mathbb{P}(\{0,1\}) = \mathbb{P}(\{0\}\cup\{1\}) \overset{\text{προσθ.}}{=} \mathbb{P}(\{0\}) + \mathbb{P}(\{1\}) =$$
$$= e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} = e^{-\lambda} + \lambda\cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda}(1+\lambda)$$

- αν $A = \{x\in\mathbb{R} : x^2=1\} = \{-1,1\}$

  άρα $\mathbb{P}(\{x\in\mathbb{R} : x^2=1\}) = \mathbb{P}(\{-1,1\}) = \mathbb{P}(\{-1,1\}\cap supp) = \mathbb{P}(\{-1,1\}\cap\mathbb{N}) =$
$$= \mathbb{P}(\{-1,1\}\cap\{0,1,2,\dots\}) = \mathbb{P}(\{1\}) = \lambda\cdot e^{-\lambda}$$

- αν $A=\mathbb{Z}$ ή $A=\mathbb{Q}$ τότε
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\mathbb{Z}) = \mathbb{P}(\mathbb{Z}\cap\mathbb{N}) = \mathbb{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}(supp) = 1$$
  αντίστοιχα $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\mathbb{Q}) = \mathbb{P}(\mathbb{Q}\cap\mathbb{N}) = \mathbb{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}(supp) = 1$

(*) Note: ισχύει $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$

Παρατηρούμε ότι χρησιμοποιώντας το supp και το $\mathbb{P}(\{i\})$ που μας δόθηκε μπορούμε να αποδώσουμε πιθανότητα σε οποιοδήποτε διάστημα των πραγματικών $\in \Sigma_{\mathbb{R}}$. Κάποια πιο περίπλοκα παραδείγματα:

- Αν $A=(-2,-1)\cup(1,3/2)$: $\mathbb{P}((-2,-1)\cup(1,3/2)) = \mathbb{P}[((-2,-1)\cup(1,3/2))\cap supp] =$
$$= \mathbb{P}[((-2,-1)\cup(1,3/2))\cap\{0,1,2,\dots\}] = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Δηλαδή, η κατανομή Poisson αποδίδει μηδενική πιθανότητα σ' αυτό το διάστημα.

- Αν $A = (-2,-1) \cup [1, 3/2))$ ποια η πιθανότητα του A, $\mathbb{P}(A)$;

$\mathbb{P}((-2,-1) \cup [1,3/2)) = \mathbb{P}[((-2,-1) \cup [1,3/2)) \cap \{0,1,2,\dots\}] \overset{\text{"super"}}{=} \mathbb{P}(\{1\}) =$
$= e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^1}{1!} = \lambda e^{-\lambda}$

Αν η παράμετρος $\lambda = \frac{1}{2}$ τότε $\Rightarrow \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{2} \cdot e^{-1/2}$

- Ποια είναι η πιθανότητα $\mathbb{P}((-2,-1) \cup [1,3])$??
έχουμε $A = (-2,-1) \cup [1,3]$
άρα

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((-2,-1) \cup [1,3]) = \mathbb{P}[((-2,-1) \cup [1,3]) \cap \{0,1,2,\dots\}) = \mathbb{P}(\{1,2,3\}) \overset{\text{προσθετικότητα}}{=}$

$= \mathbb{P}(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}) = \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) =$

$= e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^1}{1!} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^3}{3!} =$

Θυμ.: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$= e^{-\lambda} \cdot \lambda + e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2} + e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^3}{6} = \lambda \cdot e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{6}\right)$

Αν π.χ. $\lambda = 1$ τότε $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((-2,-1) \cup [1,3]) = e^{-1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{10}{6} \cdot \frac{1}{e}$

Q5: Πόσες κατανομές Poisson υπάρχουν ??

Απάντηση

Μπορούν να υπάρξουν τόσες κατανομές Poisson όσες και οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει το λ στο διάστημα $(0, +\infty)$.
Συνεπώς, τα προηγούμενα παραδείγματα ανήκουν στην οικογένεια κατανομών Poisson με παράμετρο λ.

Γενικότερα, στο στατιστικό πρόβλημα αν γνωρίζουμε σε ποια οικογένεια ανήκει η εκάστοτε κατανομή (π.χ. Poisson) τότε πρέπει να βρούμε την παράμετρό της (λ). Συνεπώς, το πρόβλημα εύρεσης της άγνωστης κατανομής ανάγεται σε πρόβλημα εύρεσης της άγνωστης παραμέτρου.

<u>Κατανομές πιθανότητας στους πραγματικούς ($\mathbb{R}$)</u>

Πολλές φορές υπάρχει δυσκολία περιγραφής τόσο των διακριτών κατανομών αλλά κυρίως των συνεχών και μεικτών κατανομών. Για τον λόγο αυτό, χρειαζόμαστε πιο "οικείες" έννοιες, προκειμένου να περιγράψουμε μία κατανομή. Η πρώτη έννοια που συναντάμε είναι αυτή της Αθροιστικής συνάρτησης.

<u>Αθροιστική Συνάρτηση κατανομής</u> (cumulative distribution function - cdf)

Ορισμός: Έστω κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}$ επί του $\mathbb{R}$. Η αθροιστική συνάρτηση της κατανομής (cdf) είναι η $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζεται ως:

$$F(x) := \mathbb{P}\big((-\infty, x]\big), \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Εφόσον $(-\infty, x] \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, τότε η $\mathbb{P}((-\infty,x])$ υπάρχει και είναι καλώς ορισμένη, που σημαίνει ότι ορίζεται για οποιαδήποτε κατανομή πιθανότητας και την αναπαριστά πλήρως.

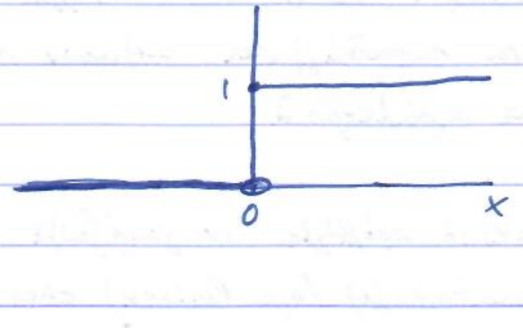
<u>π.χ.</u> Εκφυλισμένη κατανομή στο 0

$$\mathbb{P}(\{0\}) = 1, \quad supp(\mathbb{P}) = \{0\}$$

Έχουμε ότι $F(x) = \mathbb{P}\big((-\infty,x]\big) = \mathbb{P}\big((-\infty,x] \cap \{0\}\big) =$

$$= \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset) & , \text{αν } x<0 \\ \mathbb{P}(\{0\}) & , \text{αν } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \text{αν } x<0 \\ 1 & , \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

<u>Γράφημα cdf</u>



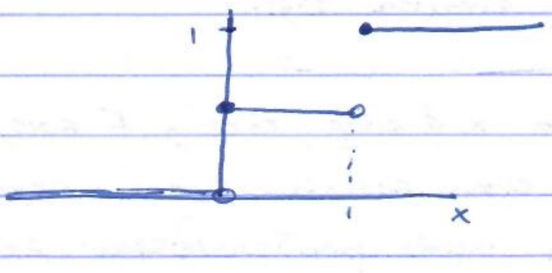
π.χ. $Ber(q)$ ως Bernoulli με παράμετρο q

- $supp(Ber) = \{0,1\}$
- $\mathbb{P}(\{0\}) = 1-q$, $\mathbb{P}(\{1\}) = q$

$$F(x) = \mathbb{P}((-\infty,x]) = \mathbb{P}((-\infty,x] \cap supp) = \mathbb{P}((-\infty,x] \cap \{0,1\}) =$$

$$= \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset), & x<0 \\ \mathbb{P}(\{0\}), & 0 \le x < 1 \\ \mathbb{P}(\{0,1\}), & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-q, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Γράφημα cdf



Ιδιότητες
- μη φθίνουσα
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\forall x<0$
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$, $\forall x \geq 1$

Παρατηρούμε ότι και στα δύο προηγούμενα παραδείγματα, οι cdf είναι αύξουσες, ασυνεχείς σε σημεία, αλλά είναι παντού συνεχείς από δεξιά.

Θεώρημα Χαρακτηρισμού

Αν η $\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η αθροιστική της $\mathbb{P}$, τότε η F ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1. Η F είναι αύξουσα (δηλ. αν $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$)
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
3. Η F είναι από δεξιά συνεχής (δηλ. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{y \to x^+} F(y) = F(x)$)

- Αντίστροφα, αν κάποια $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες 1,2,3 τότε είναι η αθροιστική συνάρτηση (cdf) μοναδικής κατανομής πιθανότητας $\mathbb{P}$ στο $\mathbb{R}$.

- Σε κάθε κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}$ αντιστοιχεί μοναδική αθροιστική συνάρτηση F και σε κάθε συνάρτηση F που ικανοποιεί τις ιδιότητες 1,2,3 αντιστοιχεί μοναδική κατανομή $\mathbb{P}$.
Αυτό σημαίνει ότι η F αναπαριστά "τέλεια" την $\mathbb{P}$. Οπότε,
α) μέσω της F μπορούμε να βρούμε τις πιθανότητες που αποδίδει η $\mathbb{P}$
β) οι ιδιότητες της $\mathbb{P}$ θα πρέπει να αντανακλώνται σε σχετικές ιδιότητες της F.

Κάποια χρήσιμα πορίσματα που προκύπτουν και αποδεικνύονται στις διαλέξεις είναι τα εξής:

- Πόρισμα: Αν το $x \notin supp$, τότε η F συνεχής στο x.
Δηλαδή, η F είναι συνεχής εκτός στηρίγματος.
Αυτό προκύπτει αφού αποδεικνύεται ότι η F ασυνεχής στο x ανν $\mathbb{P}(\{x\}) > 0$. Οπότε, ισοδύναμα, η F συνεχής στο x ανν $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$.
Ωστόσο, στις διακριτές κατανομές, σε κάθε στοιχείο x του supp αποδίδεται αυστηρά θετική πιθανότητα. Άρα, η F είναι ασυνεχής στα σημεία x όπως παρατηρήσαμε και νωρίτερα. Επομένως, καταλήγουμε στο επόμενο πόρισμα.
- Πόρισμα: Αν η $\mathbb{P}$ διακριτή κατανομή, η F θα είναι ασυνεχής σε κάθε στοιχείο του στηρίγματος (supp) της κατανομής.

- Μπορεί να αποδειχθεί ακόμη: - η F σταθερή εκτός στηρίγματος (supp)
  - η F γνησίως αύξουσα εντός του στηρίγματος

Άσκηση

Poisson από Μεταφορά

Έστω η κατανομή $\mathbb{P}$ με $supp\mathbb{P} = \{\overbrace{0, 1, 2, \ldots}^{\mathbb{N}}\}$ και $\mathbb{P}(\{x\}) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$ για $\forall x \in supp\mathbb{P}$, όπου $\lambda \in (0, +\infty)$.

Έστω η τυχαία μεταβλητή $X_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου $X_1(x) = -x$

1. Να βρεθεί το στήριγμα της $\mathbb{P}^*$ από μεταφορά.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της κατανομής από μεταφορά έχουμε ότι:

$$\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) \qquad \forall A \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^*(\{-x\}) \xrightarrow[\text{λόγω ορισμό της κατανομής από μεταφορά}]{} = \mathbb{P}(X_1^{-1}(-x)) \xrightarrow[\text{από ορισμό αντίστροφης εικόνας}]{} = \mathbb{P}(\{x\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} > 0$$

Συνεπώς, σε κάθε στοιχείο του συνόλου $\{\ldots, -2, -1, 0\}$ αποδίδεται αυστηρά θετική πιθανότητα.

Επίσης

$$\mathbb{P}^*(\{\ldots, -2, -1, 0\}) = \mathbb{P}(X_1^{-1}(\{\ldots, -2, -1, 0\})) = \mathbb{P}(\underbrace{\{0, 1, 2, \ldots\}}_{supp\mathbb{P}}) =$$

$$= \mathbb{P}(supp\mathbb{P}) = 1$$

άρα επειδή $\mathbb{P}^*(\{\ldots, -2, -1, 0\}) = 1$ τότε $supp\mathbb{P}^* = \{\ldots, -2, -1, 0\}$

2. Να βρεθεί η $\mathbb{P}^*$

Επειδή $supp\mathbb{P}^* = \{\ldots, -2, -1, 0\}$ τότε η $\mathbb{P}^*(\{x\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{|x|}}{|x|!}$.

3. Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση της κατανομής $\mathbb{P}^*$.

Η αθροιστική συνάρτηση της $\mathbb{P}^*$ θα ορίζεται ως:

$$F_{X_1}(x) := \mathbb{P}^*((-\infty,x]) \quad , x \in \mathbb{R}$$

όπου $\mathbb{P}^*((-\infty,x]) = \mathbb{P}^*((-\infty,x] \cap \operatorname{supp}\mathbb{P}^*)$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $x > 0$, $F_{X_1}(x) = \mathbb{P}^*((-\infty,x] \cap \operatorname{supp}\mathbb{P}^*) = \mathbb{P}^*((-\infty,x] \cap \{\dots,-2,-1,0\}) =$

$$= \mathbb{P}^*(\operatorname{supp}\mathbb{P}^*) = 1$$

- $-1 \le x < 0$, $F_{X_1}(x) = \mathbb{P}^*((-\infty,x] \cap \operatorname{supp}\mathbb{P}^*) =$

$$= \mathbb{P}^*(\operatorname{supp}\mathbb{P}^* - \{0\}) = \mathbb{P}^*(\operatorname{supp}\mathbb{P}^*) - \mathbb{P}^*(\{0\}) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}^*(\{0\})$$

Note! Αν $A \supseteq B$ τότε $\mathbb{P}(A-B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$

- $-2 \le x < -1$, $F_{X_1}(x) = \mathbb{P}^*((-\infty,x] \cap \operatorname{supp}\mathbb{P}^*) =$

$$= \mathbb{P}^*(\operatorname{supp}\mathbb{P}^* - \{0\} - \{-1\}) = 1 - \mathbb{P}^*(\{0\}) - \mathbb{P}^*(\{-1\})$$

$\vdots$

Επομένως,
$$\underset{\text{cdf της } \mathbb{P}^*}{F_{X_1}(x)} = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 1 - \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}^*(\{-i\}), & x < 0,\ i \in \operatorname{supp}\mathbb{P}^* \end{cases}$$

όπου $\lfloor x \rfloor$ ο μεγαλύτερος αρνητικός ακέραιος (ή μηδέν) μικρότερος ή ίσος του x

π.χ. $x = -2.75$ τότε $\lfloor x \rfloor = \lfloor -2.75 \rfloor = -3$

Άσκηση

Έστω η κατανομή $\mathbb{P}$ με $\operatorname{supp}\mathbb{P} = \{0,1,2,\dots\}$ και $\mathbb{P}(\{x\}) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}$ για $\forall x \in \operatorname{supp}$, όπου $\lambda \in (0,+\infty)$.

Έστω η τυχαία μεταβλητή $X_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου $X_2(x) = x^2$.

1. Να βρεθεί το στήριγμα της $\mathbb{P}^*$ από μεταφορά.
2. Να βρεθεί η $\mathbb{P}^*$
3. Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση της $\mathbb{P}^*$.