Φροντιστήριο 5 & 6 (5 συνέχεια)

Άσκηση (από φροντιστήριο 4)

Έστω η κατανομή $\mathbb{P}$ με $\text{supp}\mathbb{P} = \{0,1,2,\dots\}$ και $\mathbb{P}(\{x\}) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$ για $\forall x \in \text{supp}$, όπου $\lambda > 0$. Έστω η τυχαία μεταβλητή $X_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου $X_2(x) = x^2$.

1. Να βρεθεί το στήριγμα της P^* από μεταφορά.

Για $\forall x \in \text{supp}$ ισχύει $X_2(x) = x^2$.
Σύμφωνα με τον ορισμό της αντίστροφης εικόνας θα έχουμε:

$$X^{-1}(x^2) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2\} \quad \underline{\text{άρα}}$$

$$X_2^{-1}(x^2) = \pm x$$

Για παράδειγμα υπολογίζουμε $\forall x \in \text{supp}\mathbb{P}$:

$$\left.\begin{array}{lll}
X_2(0) = 0 & \Rightarrow & X_2^{-1}(0) = 0 \\
X_2(1) = 1^2 & \Rightarrow & X_2^{-1}(1^2) = \pm 1 \\
X_2(2) = 2^2 & \Rightarrow & X_2^{-1}(2^2) = \pm 2 \\
X_2(3) = 3^2 & \Rightarrow & X_2^{-1}(3^2) = \pm 3 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}\right\}$$

δηλ. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 0\}$ κ.ο.κ.

παρατηρούμε ότι οι αντίστροφες εικόνες των $\{0, 1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$ σχηματίζουν τα σύνολα $\{0, 1, 2, \dots\}$ και $\{\dots, -2, -1, 0\}$

Επειδή $\text{supp}\mathbb{P} = \{0,1,2,\dots\}$ κρατάμε τις αντίστροφες εικόνες με το θετικό πρόσημο.

Από ορισμό κατανομής από μεταφορά έχουμε: $\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$, $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$
$\underline{\text{άρα}}$

$$\mathbb{P}^*(\{x^2\}) = \underbrace{\mathbb{P}(X_2^{-1}(\{x^2\})) = \mathbb{P}(\{x\})}_{\text{από ορισμό αντίστροφης εικόνας}} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} > 0$$

που σημαίνει ότι η $\mathbb{P}^*$ αποδίδει αυστηρά θετική πιθανότητα σε κάθε σημείο του supp.

$$\mathbb{P}^*(\{0,1,4,9,\dots\}) \underset{\text{από ορισμό κατανομής από μεταφορά}}{\longrightarrow} = \mathbb{P}\left(X_2^{-1}(\{0,1^2,2^2,3^2,\dots\})\right) =$$

$$= \mathbb{P}(\underbrace{\{0,1,2,\dots\}}_{\text{supp}\,\mathbb{P}}) = \mathbb{P}(\text{supp}\,\mathbb{P}) = 1$$

Συνεπώς, αφού η κατανομή από μεταφορά $\mathbb{P}^*$ αποδίδει αυστηρά θετική πιθανότητα σε $\forall x \in \{0,1^2,2^2,3^2,\dots\}$ και αποδίδει μοναδιαία πιθανότητα στο σύνολο, τότε το στήριγμα της κατανομής από μεταφορά $\mathbb{P}^*$ θα είναι: $\text{supp}\,\mathbb{P}^* = \{0,1^2,2^2,3^2,\dots\}$

2. Να βρεθεί η $\mathbb{P}^*$.

$$\mathbb{P}^*(x) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}!}, \quad \forall x \in \text{supp}\,\mathbb{P}^*$$

3. Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση της $\mathbb{P}^*$.

$$F_{X_2}(x) := \mathbb{P}^*((-\infty,x]), \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου $\mathbb{P}^*((-\infty,x]) = \mathbb{P}^*((-\infty,x] \cap \text{supp}\,\mathbb{P}^*) =$

$= \mathbb{P}^*((-\infty,x] \cap \{0,1^2,2^2,3^2,\dots\}) =$

$= \mathbb{P}^*((-\infty,x] \cap \{0,1,4,9,\dots\})$

Παίρνουμε περιπτώσεις:

- $x<0$ η τομή του $(-\infty,x]\cap\{0,1,4,9,\dots\} = \phi \Rightarrow \mathbb{P}^*(\phi)=0$
- $0 \le x < 1$ τότε $(-\infty,x]\cap\{0,1,4,9,\dots\} = \{0\} \Rightarrow \mathbb{P}^*(\{0\})$
- $1 \le x < 4$ τότε $(-\infty,x]\cap\{0,1,4,9,\dots\} = \{0,1\} \Rightarrow \mathbb{P}^*(\{0,1\}) = \mathbb{P}^*(\{0\}) + \mathbb{P}^*(\{1\})$
- $4 \le x < 9$ τότε $(-\infty,x]\cap\{0,1,4,9,\dots\} = \{0,1,4\} \Rightarrow$
  $\mathbb{P}^*(\{0,1,4\}) = \mathbb{P}^*(\{0\}) + \mathbb{P}^*(\{1\}) + \mathbb{P}^*(\{4\})$

  ⋮
- $9 \le x < 16$ ...

  ⋮

Άρα η cdf (αθροιστική συνάρτηση) της $\mathbb{P}^*$ είναι:

$$F_{X_2}(x) = \begin{cases} \mathbb{P}^*(\phi), & x<0 \\ \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}^*(\{i^2\}), & x \ge 0 \end{cases}$$

Υπολογισμός Πιθανοτήτων με την αθροιστική συνάρτηση (cdf)

Μεθοδολογία

1. Δίνεται η αθροιστική συνάρτηση F (ακόμα ή χωρίς το supp)
2. Εξετάζεται το αν η F είναι καλώς ορισμένη δηλ. ικανοποιεί τα α, β, γ του θεωρήματος χαρακτηρισμού: α) η F αύξουσα

β) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

γ) F από δεξιά συνεχής

3. Εφόσον είναι, το θεώρημα χαρακτηρισμού συνεπάγεται ότι η F αναπαριστά μοναδική κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}$.
4. Εφόσον η F αναπαριστά την $\mathbb{P}$, βρίσκουμε, μέσω της F, ιδιότητες της $\mathbb{P}$ και επίσης, μέσω της F, μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες που αποδίδει η P.

- Αθροιστική συνάρτηση της $\mathbb{P}$ είναι αυτή που ορίζεται ως: $F(x) := \mathbb{P}((-\infty, x])$, για $\forall x \in \mathbb{R}$

Υπενθύμιση!!

Θεώρημα Χαρακτηρισμού

Αν η $\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η αθροιστική συνάρτηση της $\mathbb{P}$, τότε η F ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

α) αύξουσα

β) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

γ) Από δεξιά συνεχής

- Αντίστροφα, αν η $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις α, β και γ, τότε υπάρχει μοναδική κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}$ στο $\mathbb{R}$ της οποίας η F είναι αθροιστική.

Αν η F είναι καλώς ορισμένη, αναπαριστά μοναδική $\mathbb{P}$.
Επομένως, μπορούμε μέσω της F να βρούμε ιδιότητες της F.
Κάποια παραδείγματα πώς η αθροιστική συνάρτηση F αντανακλά ιδιότητες της κατανομής πιθανότητας $\mathbb{P}$ αποτελούν τα ακόλουθα πορίσματα που αποδεικνύονται στις διαλέξεις:

- Η F είναι ασυνεχής στο x αν και μόνο αν $\mathbb{P}(\{x\})>0$. Ισοδύναμα, η F συνεχής στο x ανν $\mathbb{P}(\{x\})=0$.

- Πόρισμα: Αν το $x \notin supp$, τότε η F συνεχής στο x. (Δηλαδή η F συνεχής εκτός του στηρίγματος).

- Πόρισμα: Αν η $\mathbb{P}$ διακριτή, η F θα είναι ασυνεχής σε κάθε στοιχείο του στηρίγματος (supp).

- Μπορούν να αποδειχθούν και άλλα πορίσματα όπως ότι σε διαστήματα εκτός του στηρίγματος η F είναι σταθερή και ότι η F είναι γνησίως αύξουσα εντός του στηρίγματος κ.ο.κ.

- Όπως αναφέραμε παραπάνω, μέσω της F, μπορούμε να υπολογίσουμε πιθανότητες που αποδίδει η $\mathbb{P}$.

Εξ' ορισμού γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbb{P}((-\infty,x]) = F(x) \quad , \quad \mathbb{P}((-\infty,x)) = \lim_{y\to x^-} F(y)$$

Συνεπώς, η πιθανότητα σημείου x διακριτής κατανομής ορίζεται ως:

$$\mathbb{P}(\{x\}) = F(x) - \lim_{y\to x^-} F(y)$$

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, υπολογίζουμε τις πιθανότητες που αποδίδονται στα παρακάτω διαστήματα:

- Έστω $A = (\alpha, \beta]$ νδο $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((\alpha,\beta]) = F(\beta) - F(\alpha)$

<u>πως σκέφτομαι:</u>

$(\alpha, \beta] = (-\infty, \beta] - (-\infty, \alpha]$

$\alpha < x \leq \beta \qquad x \leq \beta \; - \; x \leq \alpha$

θέλουμε $x \in (\alpha, \beta]$

ξέρουμε $\alpha < \beta$

<u>άρα</u> $\mathbb{P}((\alpha,\beta]) = \mathbb{P}((-\infty,\beta] - (-\infty,\alpha])$

όμως αφού $\alpha<\beta$, έχουμε ότι $(-\infty,\beta] \supset (-\infty,\alpha]$ και ξέρουμε ότι η $\mathbb{P}$ μετατρέπει την συνολοθεωρητική διαφορά $(-\infty,\beta] - (-\infty,\alpha]$ σε πραγματική αφαίρεση <u>άρα</u> αφού $(-\infty,\beta) \supset (-\infty,\alpha]$ τότε

$$\mathbb{P}((-\infty,\beta] - (-\infty,\alpha]) = \mathbb{P}((-\infty,\beta]) - \mathbb{P}((-\infty,\alpha])$$

<u>άρα</u> συνοπτικά: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((\alpha,\beta]) = \mathbb{P}((-\infty,\beta] - (-\infty,\alpha]) =$

$$= \mathbb{P}((-\infty,\beta]) - \mathbb{P}((-\infty,\alpha]) = F(\beta) - F(\alpha)$$

- Έστω $A = [\alpha, \beta)$, $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}([\alpha,\beta)) = \lim_{x \to \beta^-} F(x) - \lim_{x \to \alpha^-} F(x)$$

<u>πως σκέφτομαι:</u> $[\alpha,\beta) = (-\infty,\beta) - (-\infty,\alpha)$ και

$(-\infty,\beta) \supset (-\infty,\alpha)$ αφού $\beta > \alpha$

<u>άρα</u> $\mathbb{P}([\alpha,\beta)) = \mathbb{P}((-\infty,\beta) - (-\infty,\alpha)) = \mathbb{P}((-\infty,\beta)) - \mathbb{P}((-\infty,\alpha)) =$

$$= \lim_{x \to \beta^-} F(x) - \lim_{x \to \alpha^-} F(x)$$

- Έστω $A = [\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ νδο $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}([\alpha,\beta]) = F(\beta) - \lim_{x \to \alpha^-} F(x)$

<u>πως σκέφτομαι:</u>

$[\alpha,\beta] = (-\infty,\beta] - (-\infty,\alpha)$ όπου $(-\infty,\beta] \supset (-\infty,\alpha)$ αφού $\alpha < \beta$

<u>άρα</u>

$$\mathbb{P}([\alpha,\beta]) = \mathbb{P}((-\infty,\beta] - (-\infty,a)] = \mathbb{P}((-\infty,\beta]) - \mathbb{P}((-\infty,a)) =$$

$$= F(\beta) - \lim_{x \to \alpha^-} F(x)$$

- Έστω $A=(\alpha,+\infty)$ όπου $A'=(-\infty,a]$ άρα
$$\mathbb{P}((\alpha,+\infty)) = 1-\mathbb{P}((-\infty,a]) = 1-F(\alpha)$$

- Έστω $A=[\alpha,+\infty)$ όπου $A'=(-\infty,a)$ άρα αφού $\mathbb{P}(A)=1-\mathbb{P}(A')$
$$\mathbb{P}([\alpha,+\infty)) = 1-\mathbb{P}((-\infty,a)) = 1-\lim_{x\to a^-}F(x)$$

- Έστω $A=\{\alpha,\beta\}$ $\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}(\{a,\beta\}) = \mathbb{P}(\{a\})+\mathbb{P}(\{\beta\}) =$
$$= F(\alpha)-\lim_{x\to a^-}F(x) + F(\beta) - \lim_{x\to\beta^-}F(x)$$

<u>Άσκηση</u>

Έστω μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R},\mathcal{E}_{\mathbb{R}})$. Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση για την κατανομή Poisson, $Pois(\lambda)$.

Δίνονται : $supp\,\mathbb{P}=\{0,1,2,\ldots\}$

$$\mathbb{P}(\{x\}) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^x}{x!} \quad, \forall x\in supp\,\mathbb{P} \quad, \lambda>0$$

Περιπτώσεις :

- αν $x<0$: $F(x)=\mathbb{P}((-\infty,x]) = \mathbb{P}((-\infty,x]\cap supp\,\mathbb{P}) =$
$$= \mathbb{P}((-\infty,x]\cap\{0,1,2,\ldots\}) =$$
$$= \mathbb{P}(\emptyset)=0$$

- αν $0\le x<1$: $F(x)=\mathbb{P}((-\infty,x]) = \mathbb{P}((-\infty,x]\cap supp\,\mathbb{P}) =$
$$= \mathbb{P}((-\infty,x]\cap\{0,1,2,3,\ldots\}) =$$
$$= \mathbb{P}(\{0\}) = e^{-\lambda}$$

- αν $1\le x<2$: $F(x)=\mathbb{P}((-\infty,x]) = \mathbb{P}((-\infty,x]\cap supp\,\mathbb{P}) =$
$$= \mathbb{P}((-\infty,x]\cap\{0,1,2,3,\ldots\}) =$$
$$= \mathbb{P}(\{0,1\}) = \mathbb{P}(\{0\})+\mathbb{P}(\{1\}) =$$
$$= e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda} = e^{-\lambda}(1+\lambda)$$

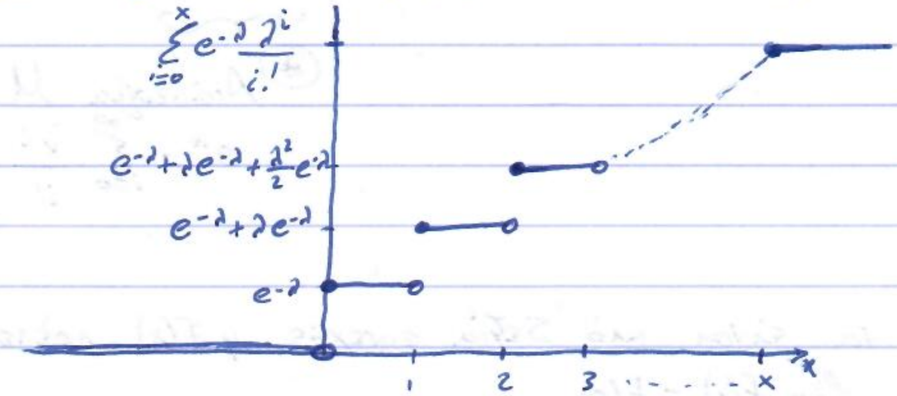
- αν $2\le x<3$: $F(x)=\mathbb{P}((-\infty,x]) = \mathbb{P}((-\infty,x]\cap supp\,\mathbb{P}) =$
$$= \mathbb{P}((-\infty,x]\cap\{0,1,2,3,\ldots\}) =$$
$$= \mathbb{P}(\{0,1,2\}) = \mathbb{P}(\{0\})+\mathbb{P}(\{1\})+\mathbb{P}(\{2\}) =$$
$$= e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}+\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda} =$$
$$= e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}\right)$$

$\vdots$

άρα γενικεύοντας, παίρνουμε ότι η cdf της Poisson είναι:

$$F(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset) &, x<0 \\ \sum_{i=0}^{x} \mathbb{P}(\{i\}) &, x\geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 &, x<0 \\ e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda^i}{i!} &, x\geq 0 \end{cases}$$

Γράφημα Αθροιστικής Συνάρτησης της Poisson (λ)



Poisson: κλιμακωτά σχήματα με ασυνέχειες

<u>Υπολογισμός πιθανοτήτων μέσω της F</u>

<u>π.χ.</u> $\mathbb{P}(\{0\}) = F(0) - \lim_{x\to 0^-} F(x) = e^{-\lambda} - 0 = e^{-\lambda}$

$$\mathbb{P}(\{2\}) = F(2) - \lim_{x\to 2^-} F(x) = e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}+\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda} - \lim_{x\to 2^-} e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{x}\frac{\lambda^i}{i!} =$$

$$= e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}+\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda} - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^2}{2}$$

<u>Επιβεβαίωση ιδιοτήτων της F</u>

(α) Για να είναι η F αύξουσα (μη φθίνουσα) πρέπει να ισχύει

αν $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

Έστω $x_1<x_2$ παίρνουμε περιπτώσεις:

- αν $x_1 < x_2 < 0$ τότε $F(x_1) = F(x_2) = 0$
- αν $x_1 < 0 \leq x_2$ τότε $F(x_1) = 0 < F(x_2) = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{x_2}\frac{\lambda^i}{i!} > 0$ γιατί $\lambda>0$

  <u>άρα</u> $F(x_1) < F(x_2)$
- αν $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$ δηλαδή

  $e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{x_1}\frac{\lambda^i}{i!} < e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{x_2}\frac{\lambda^i}{i!}$ γιατί $\lambda>0$ και $x_1<x_2$

άρα η $F(x)$ είναι αύξουσα (μη φθίνουσα) (β) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad , \forall x < 0$

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ γιατί $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \left\{ e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda^i}{i!} \right\} =$

$$= e^{-\lambda} \lim_{x \to +\infty} \sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}}_{(*)} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^{-\lambda+\lambda} = e^0 = 1$$

(*) Ανάπτυγμα Mclaurin της e^x:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

και θέτω $\boxed{x = \lambda}$

(γ) Για να είναι από δεξιά συνεχής η $F(x)$ πρέπει να ισχύει $\lim_{x \to 0^+} F(x) = F(0)$

άρα $\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} \left\{ e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda^i}{i!} \right\} = e^{-\lambda} \lim_{x \to 0^+} \sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda^i}{i!} =$

$$= e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda} = F(0)$$

άρα η F είναι από δεξιά συνεχής.

· Όπως έχουμε αναφέρει ανάλογα με την μορφή που έχει το στήριγμα, διακρίνουμε τις κατανομές σε διακριτές και μη διακριτές. Συγκεκριμένα, μία κατανομή ονομάζεται διακριτή όταν έχει διακριτό στήριγμα (π.χ. $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$).

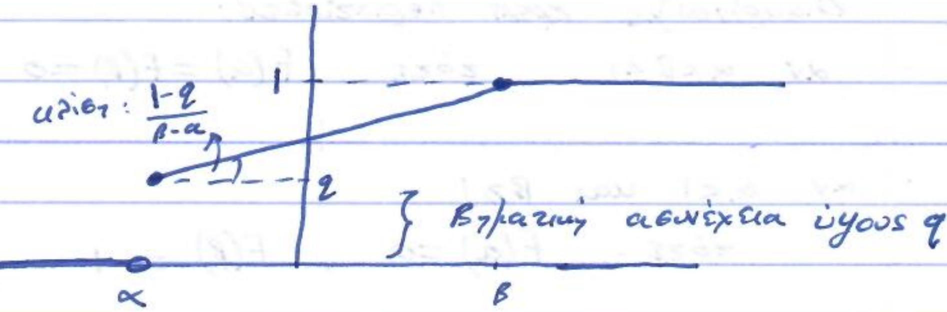
· Στις μη διακριτές κατανομές περιλαμβάνονται οι συνεχείς και οι μεικτές κατανομές. Μία κατανομή λέγεται συνεχής όταν το στήριγμά της είναι συνεχές (π.χ. $[0,1]$ ή $[0,1] \cup [2,3]$). Μία μεικτή κατανομή ονομάζεται μεικτή όταν το στήριγμά της αποτελείται από ένα διακριτό και ένα συνεχές κομμάτι.

- Ωστόσο, αξίζει να σημειώσουμε ότι αν έχουμε μία συνεχή κατανομή $\mathbb{P}$, <u>δεν</u> συνεπάγεται ότι και η αθροιστική της συνάρτηση F θα είναι συνεχής. Είναι δυνατόν να έχουμε συνεχή κατανομή $\mathbb{P}$ και ασυνέχεια στην αθροιστική συνάρτηση F.

<u>Π.χ.</u> ① Ομοιόμορφη Κατανομή με παράμετρο q (συνεχής κατανομή)
- $supp = [\alpha, \beta]$, $q \in (0,1)$

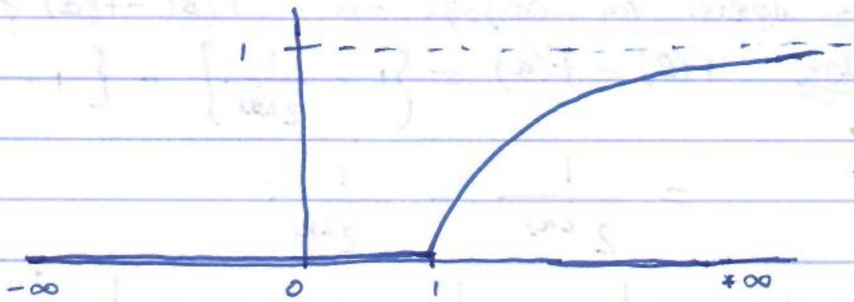
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ q + (1-q)\frac{(x-a)}{\beta - a} & , a \leq x < \beta \\ 1 & , x \geq \beta \end{cases}$$

Το γράφημα της cdf της $unif[a,\beta]$ με παράμετρο $q \in (0,1)$



Παρατηρούμε ότι αν και η $\mathbb{P}$ είναι συνεχής κατανομή αφού το στήριγμα της είναι συνεχές $supp\,\mathbb{P} = [a, \beta]$, η αθροιστική της συνάρτηση F παρουσιάζει ασυνέχεια στο a.

<u>Π.χ.</u> ②
Έστω $F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & , x \geq 1 \end{cases}$ και $supp = [1, +\infty)$



$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1$$

Παρατηρούμε ότι η F είναι παντού συνεχής, γνησίως αύξουσα εντός supp και σταθερή εκτός supp.

Άσκηση

Να εξετάσετε αν η F είναι καλώς ορισμένη αθροιστική συνάρτηση.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x<1 \\ 1-\dfrac{1}{2^{\lfloor x\rfloor}} & , x\geq 1 \end{cases}$$ όπου $\lfloor x\rfloor = \max\{m\in\mathbb{N} : m\leq x\}$ και $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$

Λύση

Ελέγχουμε αν ισχύουν οι τρεις ιδιότητες της αθροιστικής συνάρτησης F.

(α) Ελέγχουμε αν η F είναι αύξουσα (μη φθίνουσα).

Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$.

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- αν $\alpha<\beta<1$, τότε $F(\alpha)=F(\beta)=0$

- αν $\alpha<1$ και $\beta\geq 1$

  τότε $F(a)=0$, $F(\beta)=1-\dfrac{1}{2^{\lfloor\beta\rfloor}}\geq 0$ αφού $\beta\geq 1$

  άρα $F(\alpha)<F(\beta)$

- αν $1\leq\alpha<\beta$ τότε $F(a)=1-\dfrac{1}{2^{\lfloor\alpha\rfloor}}$

  $$F(\beta)=1-\frac{1}{2^{\lfloor\beta\rfloor}}$$

  άρα πρέπει να δείξουμε ότι $F(\beta)-F(a)\geq 0$

  άρα $F(\beta)-F(a)=\left\{1-\dfrac{1}{2^{\lfloor\beta\rfloor}}\right\}-\left\{1-\dfrac{1}{2^{\lfloor a\rfloor}}\right\}=$

  $$=\frac{1}{2^{\lfloor\alpha\rfloor}}-\frac{1}{2^{\lfloor\beta\rfloor}}$$

άρα πρέπει $\dfrac{1}{2^{\lfloor a\rfloor}}-\dfrac{1}{2^{\lfloor\beta\rfloor}}\geq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2^{\lfloor a\rfloor}}\geq\dfrac{1}{2^{\lfloor\beta\rfloor}}$ για να είναι η F μη φθίνουσα

που ισχύει γιατί $\alpha<\beta\Rightarrow 2^a<2^\beta\Rightarrow\dfrac{1}{2^a}>\dfrac{1}{2^\beta}$

άρα $F(\beta) - F(a) \geq 0 \Rightarrow F(\alpha) \leq F(\beta)$

άρα η F είναι αύξουσα (μη φθίνουσα).

(β) Ελέγχουμε αν $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ και $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Πράγματι, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ αφού $F(x) = 0$ για $\forall x < 1$.

Επίσης, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}} \right\} = 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}} =$

$= 1 - \frac{1}{2^{\infty}} = 1 - 0 = 1$ (αφού ξέρουμε ότι $2^{\infty} = \infty$ και $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$)

(γ) Ελέγχουμε αν η F είναι από δεξιά συνεχής

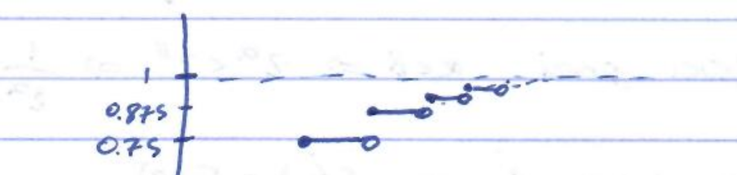
Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$

- αν $\alpha < 1$ τότε $\lim_{x \to a^+} F(x) = F(a) = 0$
- αν $\alpha \geq 1$ τότε $\lim_{x \to \alpha^+} F(x) = \lim_{x \to a^+} \left(1 - \frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}}\right) = 1 - \frac{1}{2^{\lfloor a \rfloor}} = F(a)$

Συνεπώς, η F είναι συνεχής από δεξιά.

Εφόσον η F ικανοποιεί τις ιδιότητες α, β και γ, η F είναι αθροιστική συνάρτηση μοναδικής κατανομής πιθανότητας P.

Γράφημα cdf



$F(0) = 0$, $F(x) = 0 \; \forall x < 1$

$F(1) = 1 - \frac{1}{2^1} = 0.5$

$F(2) = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = 0.75$

$F(3) = 1 - \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8} = 0.875$

Έχει αριθμήσιμο πλήθος ασυνεχειών η F (το πλήθος των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Άσκηση

Να εξετάσετε αν η παρακάτω συνάρτηση είναι αθροιστική συνάρτηση:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x<1 \\ 1-\frac{1}{2^x} & , x \geq 1 \end{cases} \qquad supp P = [1, +\infty)$$

Λύση

Αφού το supp P είναι συνεχές σημαίνει ότι η κατανομή P είναι συνεχής.
Ελέγχουμε τις ιδιότητες της αθροιστικής συνάρτησης.

(α) Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$.

Όπως και πριν, διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- $\alpha<\beta<1$ τότε $F(\alpha)=F(\beta)=0$

- $\alpha<1$ και $\beta \geq 1$ τότε $F(a)=0$

$$F(\beta) = 1-\frac{1}{2^\beta} > 0 \text{ γιατί } \beta \geq 1$$

άρα αν $\alpha<1\leq\beta \Rightarrow F(a)<F(\beta)$

- $1\leq\alpha<\beta$ τότε $F(a) = 1-\frac{1}{2^a}$ και $F(\beta)=1-\frac{1}{2^\beta}$

πρέπει να δείξουμε ότι $F(\beta)-F(a) \geq 0$

$$F(\beta)-F(a) = \left\{1-\frac{1}{2^\beta}\right\} - \left\{1-\frac{1}{2^a}\right\} = \frac{1}{2^a}-\frac{1}{2^\beta} > 0$$

ισχύει γιατί $\alpha<\beta \Rightarrow 2^a<2^\beta \Rightarrow \frac{1}{2^a} > \frac{1}{2^\beta} \Rightarrow \frac{1}{2^a}-\frac{1}{2^\beta}>0$

άρα αν $1\leq\alpha<\beta \Rightarrow F(a) \leq F(\beta)$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση για $\alpha<\beta \Rightarrow F(a)\leq F(\beta)$

άρα η F είναι μη φθίνουσα (αύξουσα)

(β) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ αφού $F(x) = 0$ για $\forall x < 1$.

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{2^x} \right\} = 1 - \frac{1}{2^\infty} = 1 - \frac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1$$

(γ) Η F είναι από δεξιά συνεχής αφού άμα διακρίνουμε περιπτώσεις έχουμε για $\alpha \in \mathbb{R}$:

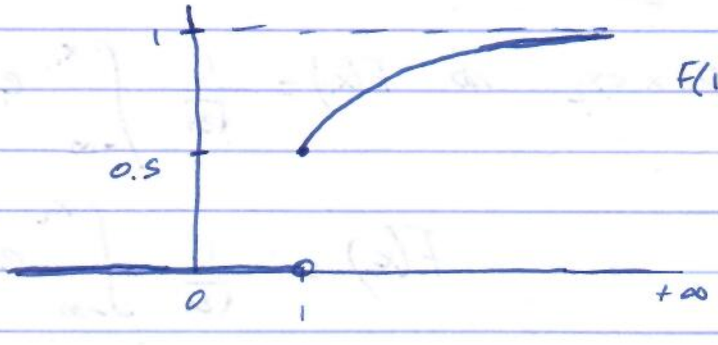
- αν $\alpha < 1$ τότε $\lim_{x \to a^+} F(x) = f(a) = 0$
- αν $a \geq 1$ τότε $\lim_{x \to a^+} F(x) = \lim_{x \to a^+} \left(1 - \frac{1}{2^x}\right) = 1 - \frac{1}{2^a} = F(a)$

άρα η $F(x)$ είναι από δεξιά συνεχής.

Άρα, η συνάρτηση που δίνεται ικανοποιεί τις α, β, γ ιδιότητες και επομένως, η F είναι αθροιστική συνάρτηση μοναδικής $\mathbb{P}$.

- Στην συγκεκριμένη άσκηση παρατηρούμε ότι ενώ η κατανομή $\mathbb{P}$ είναι συνεχής, η αθροιστική της συνάρτηση F είναι ασυνεχής.

Γράφημα cdf



$F(1) = 1 - \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

- Παρατηρούμε, επίσης, ότι η F είναι γνησίως αύξουσα εντός στηρίγματος ($\text{supp}\,\mathbb{P} = [1, +\infty)$) και σταθερή εκτός στηρίγματος.

Άσκηση (Τυπική Κανονική κατανομή, $\mathcal{N}(0,1)$)
Να εξετάσετε αν η F είναι αθροιστική συνάρτηση.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz & , x \geq 0 \end{cases}$$

Δίνεται: $\int_{0}^{+\infty} e^{-k^2} dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; ολοκλήρωμα Gauss

Λύση
Ελέγχουμε τις ιδιότητες της αθροιστικής συνάρτησης
(α) η F αύξουσα (μη φθίνουσα)
Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$
Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:
1η. αν $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow F(x_1) = F(x_2) = 0$
2η. αν $x_1 < 0$ και $x_2 \geq 0$ τότε $F(x_1) = 0$

$$F(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-z^2/2} dz > 0 \quad \text{γιατί } f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} > 0$$

άρα αν $x_1 < 0 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$

3η. αν $0 \leq x_1 < x_2$ τότε $F(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

$$F(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

πρέπει να δείξουμε ότι $F(x_2) - F(x_1) \geq 0$ ώστε η F να είναι μη φθίνουσα και για αυτήν την περίπτωση.
άρα έχουμε:

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-z^2/2} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-z^2/2} dz \quad (*)$$

Note!! Από ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann γνωρίζουμε ότι, δεδομένου ότι τα ολοκληρώματα υπάρχουν στο $\mathbb{R}$, τότε αν $x_1 < x_2$: $\int_{-\infty}^{x_2} f(z)dz = \int_{-\infty}^{x_1} f(z)dz + \int_{x_1}^{x_2} f(z)dz$

Άρα εφαρμόζοντας την παραπάνω ιδιότητα έχουμε:

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \overset{*}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz > 0 \quad \text{γιατί} \quad f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} > 0$$

άρα $F(x_2) - F(x_1) > 0 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$

Συνεπώς, η F είναι μη φθίνουσα (αύξουσα) σε κάθε περίπτωση.

(β) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ αφού $F(x) = 0$ για $\forall x < 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \overset{*}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (1)$$

- Παρατηρούμε ότι η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι άρτια. Δηλαδή, $f(z) = f(-z)$, αφού το z είναι στο τετράγωνο.

- Για να χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα Gauss θα πρέπει να κάνουμε τους κατάλληλους μετασχηματισμούς στα όρια του ολοκληρώματος. Ο στόχος είναι να μετασχηματίσουμε τα ολοκληρώματα ώστε να έχουν αντίστοιχη μορφή με το ολοκλήρωμα Gauss, ώστε να το χρησιμοποιήσαμε για να αποδείξουμε ότι $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Αλλάζουμε την μεταβλητή προς ολοκλήρωση μόνο στο πρώτο ολοκλήρωμα

θέτω $\boxed{p=-z} \Rightarrow z=-p$

$dp=-dz \Rightarrow dz=-dp$

νέα όρια

αφού $z=-\infty$ τότε $p=-(-\infty)=+\infty$

$z=0$ τότε $p=0$

άρα συνεχίζοντας την ① έχουμε μετά την αλλαγή μεταβλητής:

$$① = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{0} e^{-\frac{(-p)^2}{2}} (-dp) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \overset{(**)}{=}$$

$$\overset{(**)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(p)^2}{2}} (-dp) \right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

(**) Ιδιότητα ορισμένων ολοκληρωμάτων:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{p^2}{2}} dp + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad ②$$

θέτουμε $p=z$ $\quad p=0 \Rightarrow z=0$ $\quad$ μόνο για το πρώτο ολοκλήρωμα

$dp=dz$ $\quad p=+\infty \Rightarrow z=+\infty$

άρα συνεχίζοντας την ② έχουμε:

$$② = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2} dz \quad ③$$

θέτουμε $k=\frac{z}{\sqrt{2}}$ και $dk=\frac{1}{\sqrt{2}}dz \Rightarrow dz=\sqrt{2}\,dk$

$\Rightarrow z=\sqrt{2}\,k$

νέα όρια

$z=0 \Rightarrow k=0$

$z=+\infty \Rightarrow k=+\infty$

Άρα, αφού έχουμε θέσει $k=\frac{z}{\sqrt{2}}$ συνεχίζουμε την ③:

$$③ = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-k^2}\left(\sqrt{2}\,dk\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-k^2}\,dk}_{\text{ολοκλήρωμα Gauss}} =$$

$$= \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\cancel{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = 1$$

Δίνεται: $\int_0^{+\infty} e^{-k^2}\,dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

άρα καταλήξαμε ότι ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

⑧ Από δεξιά συνεχής η F

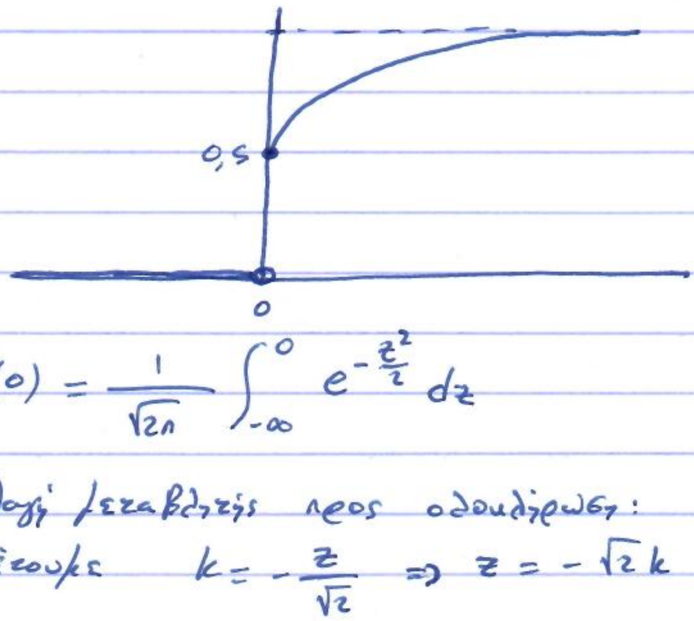
Έστω $\alpha\in\mathbb{R}$

$\alpha<0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+} F(x) = F(a) = 0$

$\alpha\geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+} F(x) = \lim\limits_{x\to a^+}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a^+} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = F(a)$

Άρα, αφού ισχύουν οι παραπάνω ιδιότητες η F είναι πράγματι αθροιστική συνάρτηση της τυπικής κανονικής κατανομής ($N(0,1)$).

Γράφημα cdf



$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

αλλαγή μεταβλητής προς ολοκλήρωση:

Θέτουμε $k=-\frac{z}{\sqrt{2}} \Rightarrow z=-\sqrt{2}\,k$ 　　νέα όρια

$z_2=0 \Rightarrow k_2=0$

$dk=-\frac{1}{\sqrt{2}}\,dz \Rightarrow dz=-\sqrt{2}\,dk$ 　　$z_1=-\infty \Rightarrow k_1=+\infty$

άρα $F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$ (μετά την αλλαγή μεταβλητής)

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\int_{0}^{+\infty} e^{-k^2} (-\sqrt{2}\, dk) \right] =$

$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{0}^{+\infty} e^{-k^2} dk}_{\text{ολοκλήρωμα Gauss} \left(= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\cancel{\sqrt{2\pi}}}{\cancel{\sqrt{2\pi}}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

<u>Υπενθύμιση για ορισμένα ολοκληρώματα</u>

- $\int_{\alpha}^{\beta} k f(x) dx = k \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{c} f(x) dx + \int_{c}^{\beta} f(x) dx$, όπου $\alpha \le c \le \beta$
- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$