Κατανομές στους Πραγματικούς: Ολοκλήρωση και Ροπές

Στα προηγούμενα παρατηρήσαμε ότι το να γνωρίζουμε πως συμπεριφέρεται μια κατανομή ως διαδικασία ολοκλήρωσης σε κατάλληλο σύνολο από συναρτήσεις ισοδυναμεί με το να γνωρίζουμε την κατανομή.

Προκύπτει το ερώτημα το εάν κάτι ανάλογο είναι δυνατόν να συμβαίνει όταν περιορίζουμε τον κατάλογο των συναρτήσεων που ολοκληρώνουμε ως προς την εν λόγω κατανομή, π.χ. στις ολοκληρώσιμες ως προς την συγκεκριμένη κατανομή πολυωνυμικές συναρτήσεις (εφόσον υπάρχουν).

Ένα πιο ασθενές ερώτημα αφορά στο αν είναι δυνατόν τέτοιου είδους ολοκληρώματα να αναπαριστούν τουλάχιστον κάποιες ιδιότητες της κατανομής.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τα όσα (περιορισμένα) γνωρίζουμε για την ολοκλήρωση ως προς κατανομή στους πραγματικούς, αποκτούμε τον παρακάτω (αναλόγως εύλογο) ορισμό που αφορά στις ροπές κατανομής πιθανότητας.

Ορισμός. Έστω P κατανομή στο $\mathbb{R}$, και $k \in \mathbb{N}$ φυσικός. Ως ροπή k-τάξης της P ορίζεται το ολοκλήρωμα ως προς την P, της $g(x)=x^k$, δηλαδή,

$$E(g) := \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \, dP = \begin{cases} \sum_{i \in supp} i^k P(\{i\}), & P \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx, & \text{η } f \text{ pdf της } P. \end{cases}$$

Αναλόγως ως απόλυτη ροπή k-τάξης της P ορίζεται το ολοκλήρωμα ως προς την P, της $g(x)=|x|^k$, δηλαδή,

$$E(g) := \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \, dP = \begin{cases} \sum_{i \in supp} |i|^k P(\{i\}), & P \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k f(x)\,dx, & \text{η } f \text{ pdf της } P. \end{cases}$$

Σχόλια και Ιδιότητες:

1. Αν X είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί η κατανομή, τότε εξαιτίας ιδιότητας μετασχηματισμού που έχει η σχετική διαδικασία ολοκλήρωσης

οι παραπάνω ροπές συνηθίζεται να συμβολίζονται ως $E(X^k)$ και $E(|X|^k)$ αντιστοίχως. Στο εξής θα χρησιμοποιούμε αυτόν τον συμβολισμό.

2. Εφόσον τα παραπάνω είναι ειδικές περιπτώσεις των διαδικασιών ολοκλήρωσης που έχουμε μελετήσει, ισχύουν στο ακέραιο και εδώ τα όσα σχόλια και ιδιότητες είχαμε αναφέρει και εκεί εντός της εκεί τελευταίας.

3. Επειδή όταν $k=0$ $x^0=|x|^0=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, έχουμε ότι η (απόλυτη) ροπή 0-τάξης υπάρχει για κάθε P και ισούται με 1 (γιατί;).

4. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η $E(X^k)$ υπάρχει (δηλ. $\in\mathbb{R}$) ανν $E(|X|^k)$ υπάρχει. Επίσης η $E(|X|^k)$ υπάρχει, ανν $E(|X|^k)<+\infty$.

5. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι αν για $k^*\in\mathbb{N}$, $E(X^{k^*})$ υπάρχει τότε η $E(X^k)$ υπάρχει $\forall k=0,1,\dots,k^*$.

6. Δυικά του προηγούμενου, αν για $k^*>0$, $E(X^{k^*})$ δεν υπάρχει, τότε η $E(X^k)$ δεν υπάρχει, $\forall k\geq k^*$.

7. Προφανώς όταν το k είναι άρτιο τότε η ροπή k τάξης ταυτίζεται με την απόλυτη ροπή k τάξης.

8. Όταν $supp\subseteq[0,+\infty)$ τότε η ροπή k-τάξης ταυτίζεται με την απόλυτη ροπή k-τάξης για κάθε k (γιατί;).

9. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι αν το supp είναι φραγμένο (δηλ. μπορεί να εγκλειστεί σε διάστημα πεπερασμένης ακτίνας) τότε η $E(X^k)$ υπάρχει για κάθε k.

10. Δεδομένης της ύπαρξης του $E(X^k)$, θεωρείται γνωστή η έννοια της ροπής k-τάξης περί του μέσου, δηλ. της $E(X-E(X))^k$ και συνακόλουθα εννοιών όπως η διακύμανση $(k=2)$, κ.ο.κ. (γιατί η ύπαρξη της $E(X-E(X))^k$ είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη της $E(X^k)$; Τι συμβαίνει όταν $E(X)=0$;).

11. [Ανισότητα του Markov] Για όποιο k, και $\forall\varepsilon>0$
$$P(|X|\geq\varepsilon)=P((-\infty,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,+\infty))\leq\frac{E(|X|^k)}{\varepsilon^k}.$$
(Στο προηγούμενο υπάρχει μια κατάχρηση συμβολισμού - μπορείτε να την βρείτε;)

Απόδειξη. Όταν $E(|X|^k)=+\infty$, τότε η ανισότητα είναι τετριμμένη (γιατί;). Όταν $E(|X|^k)<+\infty$ τότε (υποθέτουμε χάριν οικονομίας χώρου ότι η P έχει συνάρτηση πυκνότητας, την f). Αν $\varepsilon>0$, τότε, $E(|X|^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k f(x)dx =$

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \underbrace{|x|^k f(x)}_{\geq 0} dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \underbrace{|x|^k f(x)}_{\geq 0} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \underbrace{|x|^k f(x)}_{\geq 0} dx \geq \int_{-\infty}^{-\varepsilon} |x|^k f(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} |x|^k f(x)dx$$

$$\geq \int_{-\infty}^{-\varepsilon} |-\varepsilon|^k f(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} |\varepsilon|^k f(x)dx =$$ (αφού $|-\varepsilon|^k \leq |x|^k, \forall x \in (-\infty,-\varepsilon]$ και $|\varepsilon|^k \leq |x|^k, \forall x \in [\varepsilon,+\infty)$ και εξαιτίας της μονοτονίας του ολοκληρώματος)

$$= \varepsilon^k\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx\right) = \varepsilon^k\left(P((-\infty,-\varepsilon]) + P([\varepsilon,+\infty))\right) =$$

$\varepsilon^k P((-\infty,-\varepsilon] \cup [\varepsilon,+\infty))$ που αποδεικνύει το ζητούμενο (γιατί;).

Όταν $k=2$ αποκτούμε την ανισότητα του Chebychev. Η παραπάνω ανισότητα γίνεται τετριμμένη όταν $E(|X|^k)=+\infty$ ή/και το ε πολύ μικρό. Γίνεται πληροφοριακή για ιδιότητες της κατανομής όταν $E(|X|^k)<+\infty$ και το ε "αρκετά μεγάλο". Σε αυτή την περίπτωση η ανισότητα αποτελεί μερική απάντηση στο παραπάνω ασθενές ερώτημα.

11. Το σύνολο $\{E(X^k), k=0,1,\ldots\}$ γενικά δεν αναπαριστά την κατανομή. Αυτό μπορεί να συμβαίνει επειδή για κάποιο k^*, $E(X^{k^*})$ δεν υπάρχει (όπως ισχύει στο σχόλιο 5). Είναι δυνατόν το παραπάνω σύνολο να μην αναπαριστά την κατανομή ακόμη και αν $E(X^k) \in \mathbb{R}\ \forall k=0,1,\ldots$ εξαιτίας της συμπεριφοράς του $E(X^k)$ καθώς $k \to +\infty$. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι για να χαρακτηρίζει το παραπάνω σύνολο την κατανομή είναι αναγκαίο να $E(X^k) \in \mathbb{R}\ \forall k=0,1,\ldots$, ενώ είναι αναγκαίο και ικανό κατάλληλη συνάρτηση που εξαρτάται από τις ροπές και ονομάζεται ροπογεννήτρια συνάρτηση της P, να είναι καλώς ορισμένη σε κάποιο διάστημα με κέντρο το 0. Αυτό αποτελεί και την απάντηση στο παραπάνω ισχυρό ερώτημα, ενώ ακριβής διερεύνηση του βρίσκεται εκτός του εύρους του μαθήματος (οι ενδιαφερόμενες/οι μπορούν να συμβουλευτούν

το λήμμα της Wikipedia για την moment generating function).

Παραδείγματα Υπολογισμού Ροπών για Διακριτές Κατανομές.

1. $P=$ Εκφυλισμένη κατανομή στο 0. Ισχύουν τα σχόλια 8 και 9 (γιατί;). Βάσει προηγούμενου υπολογισμού βρίσκουμε εύκολα:
$$E(X^k)=E(|X|^k)=0^k=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k>0\end{cases}.$$
Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η συγκεκριμένη P αναπαρίσταται από το σύνολο των ροπών της. □

2. $P=Ber(q)$, $q\in(0,1)$. Ισχύουν τα σχόλια 8 και 9 (γιατί;). Πάλι βάσει προηγούμενου υπολογισμού βρίσκουμε ότι:
$$E(X^k)=E(|X|^k)=0^k(1-q)+1^kq=\begin{cases}1, & k=0\\ q, & k>0\end{cases}.$$

Επομένως π.χ. $Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=q-q^2=q(1-q)$. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι και αυτή η κατανομή αναπαρίσταται από το σύνολο των ροπών της. □

3. $P=Poiss(\lambda)$, $\lambda>0$. Ισχύει το σχόλιο 8 (γιατί;). Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι $E(X^k)\in\mathbb{R}$, $\forall k=0,1,\dots$ και ότι η κατανομή αναπαρίσταται από το σύνολο των ροπών της. Έχουμε π.χ. όταν $k=1$
$$E(X)=\sum_{i\in\mathbb{N}}iP(\{i\})=\sum_{i=0}^{\infty}ie^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}=e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\frac{i}{i!}=e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i\frac{1}{(i-1)!}=$$
$$=e^{-\lambda}\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}\overset{j=i-1}{=}\lambda e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$ (αφού $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x=\sum_{j=0}^{\infty}x^i/i!$ και θέτουμε $x=\lambda$). Επίσης για $k=2$,
$$E(X^2)=\sum_{i\in\mathbb{N}}i^2P(\{i\})=\sum_{i=0}^{\infty}i^2e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}=e^{-\lambda}\lambda\sum_{i=1}^{\infty}i\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}\overset{j=i-1\Leftrightarrow i=j+1}{=}$$
$$\lambda e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\frac{\lambda^j}{j!}=\lambda\left(\sum_{j=0}^{\infty}je^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}+\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}\right)=\lambda\Big[\sum_{j\in supp}jP(\{j\})$$

$$+\sum_{j=0}^{\infty} P(\{j\})\Big] = \lambda\left[E(X) + P(supp)\right] = \lambda[\lambda+1] = \lambda^2+\lambda. \text{ Επομένως,}$$

$$Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \lambda^2+\lambda - \lambda^2 = \lambda. \ \square$$

Οι σημειώσεις βρίσκονται σε στάδιο διαρκούς διόρθωσης και δεν υποκαθιστούν τις διαλέξεις. Παρακαλώ αναφέρτε όποιο λάθος στο stelios@aueb.gr ή στο e-class του μαθήματος.