σ-Αλγεβρα και Μετρήσιμος Χώρος

Τα παρακάτω βρίσκονται σε στάδιο διαρκούς διόρθωσης και δεν υποκαθιστούν τις διαλέξεις. Παρακαλώ αναφέρετε όποια παραδρομή στο stelios@aueb.gr ή στο e-class του μαθήματος.

Στέλιος Αρβανίτης

Δεδομένων βασικών εννοιών από την συνολοθεωρία προσπαθούμε να δώσουμε τον ορισμό της κατανομής πιθανότητας επί του Ω. Θα αναμέναμε ότι αυτή ως συνάρτηση θα μπορούσε να οριστεί στην συλλογή των υποσυνόλων του Ω για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι σε κάθε περίπτωση καλώς ορισμένη. Αποδεικνύεται όμως ότι αν θέλουμε ο ορισμός να ικανοποιεί κάποιες ιδιότητες (δείτε αργότερα την προσθετικότητα) είναι δυνατόν, όταν το Ω έχει μεγάλο πλήθος στοιχείων (π.χ. όταν $\Omega = \mathbb{R}$) τότε είναι δυνατόν να υπάρχουν παθολογικά υποσύνολα του στα οποία δεν μπορούμε να αποδώσουμε με "συνεπή τρόπο" έννοια μεγέθους. Αυτά όταν υπάρχουν ονομάζονται μη μετρήσιμα (non-measurable) και οπωσδήποτε θα πρέπει να εξαιρεθούν από το πεδίο ορισμού όποιας κατανομής πιθανότητας. Η κατασκευή αυτή εμπλέκει την έννοια του καταλόγου από υποσύνολα του Ω στα οποία μπορούν να αποδωθούν με συνεπή τρόπο πιθανότητες (μετρήσιμα σύνολα-measurable sets) οπότε αρχικά αναγκαστήκαμε να ασχοληθούμε με την έννοια του μετρήσιμου χώρου.

Ορισμος. Η συλλογή από τα μετρήσιμα υποσύνολα του Ω ονομάζεται σ-άλγεβρα επί του Ω και θα την συμβολίζουμε με Σ_{Ω}.

Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι όποια τέτοια συλλογή, αναγκαστικά περιέχει τα Ω και $\emptyset$, ενώ είναι κλειστή ως προς ενώσεις, τομές, συμπληρώματα, διαφορές κ.ο.κ., εφόσον αυτές δεν έχουν "μεγάλο πλήθος". Ετσι π.χ. αν $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Sigma_{\Omega}$ τότε και $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots \in \Sigma_{\Omega}$ και $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots \in \Sigma_{\Omega}$, κ.ο.κ.

Οταν το Ω έχει μικρό πλήθος, τότε ως Σ_{Ω} μπορεί να επιλεγεί η συλλογή από όλα τα υποσύνολα του Ω.

Οταν $\Omega = \mathbb{R}$ τότε όπως αναφέρθηκε προηγουμένως υπάρχουν περίεργ υποσύνολα του τα οποία δεν μπορούν να βρίσκονται σε σ-άλγεβρα του. Παρόλα αυτά η $\Sigma_{\mathbb{R}}$ είναι δυνατόν να επιλεγεί ώστε να αποτελείται από τα "οικεία" υποσύνολα των πραγματικών (ανοικτά και κλειστά διαστήματα, μονοσύνολα κ.ο.κ.).

Ορισμος. Η δυάδα $(\Omega, \Sigma_{\Omega})$ ονομάζεται μετρήσιμος χώρος.$\square$

Η παραπάνω έννοια κωδικοποιεί την πληροφορία που περιλαμβάνει το σύνολο αναφοράς, μαζί με τα "κομμάτια" του στα οποία μπορούν να αποδοθούν πιθανότητες. *Δεδομένου* του παραπάνω, μια κατανομή πιθανότητας στον Ω θα είναι ένας μηχανισμός ο οποίος αποδίδει πιθανότητες στα παραπάνω κομμάτια και ικανοποιεί "εύλογους" περιορισμούς, δηλαδη μια συνάρτηση $\Sigma_{\Omega} \to \mathbb{R}$ που έχει κατάλληλες ιδιότητες.